

Devoir Surveillé de Mathématiques n°1

Remarques : Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1.

- (1) On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et de limite l et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

- (a) Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité $b_n \leq a_n$, puis étudier la monotonie de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(b) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l' et que $l' \leq l$.
(c) Etablir l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}.$$

- (d) En déduire que $l = l'$.

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

- (2) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est bien défini et ≥ 1 .
(b) Etudier les variations de la suite (u_n) , puis établir que (u_n) diverge et donner sa limite.
(3) Recherche d'un équivalent de u_n .
(a) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$.
(b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f définie pour tout $x \in [1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$, puis en déduire que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
(c) Utiliser la première question pour établir que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.
(4) Exprimer S_n en fonction de u_n , puis en déduire un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$. Dans cet exercice, on s'intéresse à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n), \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}.$$

- (1) (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 quand x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$.
(b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
(c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge.
(d) En déduire que la suite (w_n) converge vers un réel γ (appelé la *constante d'Euler*).
(2) Etudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$, puis dresser son tableau de variations en précisant ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
(3) (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes.
(b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente?
(4) (a) Justifier que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$.
(b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et convergente.

- (5) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$.
- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n)$.
- (c) Démontrer alors l'égalité : $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$.

Problème 1. On considère l'application $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

De plus, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n dt$, $J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt$, $K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt$.

(1) Résultats généraux sur φ et J_n :

- (a) Montrer que φ est continue sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale J_n existe.
- (b) (i) Montrer que φ est strictement positive sur $[0, 1]$ et strictement décroissante sur $[0, 1]$.
(ii) Etablir que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a : $|\varphi(t)| < 1$.
- (c) (i) Etudier les variations sur $[0, +\infty[$ de l'application $t \mapsto \sin(t) - t + t^2$.
(ii) En déduire que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a : $\varphi(t) \geq 1 - t$.
(iii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $J_n \geq \frac{1}{n+1}$.

(2) Etude de I_1 :

- (a) (i) Montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$: $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$.
(ii) En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.
- (b) (i) Montrer que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :
$$|\sin(t)| \geq \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

(ii) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge.
(iii) Déduire des questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

(3) Etude de I_n pour $n \geq 2$:

- (a) (i) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale K_n est convergente.
(ii) Etablir que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $|K_n| \leq \frac{1}{n-1}$.
- (b) (i) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
(ii) Montrer que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ converge. On note l sa limite.
(iii) A l'aide de la question (1)(b), établir que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout $a \in]0, 1[$:
$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a \quad \text{et} \quad \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n.$$

(iv) En déduire que, pour tout $a \in]0, 1[$, on a : $0 \leq l \leq a$, puis conclure que $l = 0$.
- (c) (i) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n est convergente.
(ii) Etablir que la suite (I_n) tend vers 0.

(4) Etude de la série de terme général I_n , pour $n \geq 2$:

- (a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0$.
- (b) En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1})$.
- (c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} I_n$ diverge (*indication : utiliser la question (1)(c)(iii)*).