

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques n°1

Corrigé de l'exercice 1.

- (1) On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et de limite l et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

- (a) Tout d'abord, établissons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité $b_n \leq a_n$. Pour ce faire, fixons un entier $n \geq 1$. Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on voit que $a_k \leq a_n$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Par sommation, ceci nous donne que :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_n = \frac{n}{n} a_n = a_n.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{b_n \leq a_n.}$$

A présent, étudions la monotonie de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. D'après ce qui précède, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{1}{n+1} \left[a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right] - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{a_n}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{a_n}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \frac{1}{n+1} \left[a_n - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right] \\ &= \frac{1}{n+1} [a_n - b_n] \geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

- (b) Montrons que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l' et que $l' \leq l$. Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et de limite l , on voit que $a_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, comme $b_n \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question précédente, on trouve que $b_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par l . Mais comme elle est croissante d'après la question (1)(a), le théorème de la limite monotone entraîne que :

$$\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel } l'.$$

Comme de plus $b_n \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question (1)(a), il s'ensuit par passage à la limite dans les inégalités que :

$$\boxed{l' \leq l.}$$

(c) Etablissons l'inégalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}.$$

Pour ce faire, fixons un entier $n \geq 1$. D'après ce qui précède, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} b_{2n} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \\ &= \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \right] \\ &= \frac{1}{2n} \left[nb_n + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \right]. \quad (*) \end{aligned}$$

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on voit que $a_k \geq a_n$ pour tout $k \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket$. Par sommation, ceci nous donne que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geq \sum_{k=n}^{2n-1} a_n = na_n.$$

Dès lors, il s'ensuit avec l'égalité (*) que :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n} \left[nb_n + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \right] \geq \frac{1}{2n} [nb_n + na_n] \geq \frac{1}{2} [b_n + a_n].$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}}.$$

(d) Montrons que $l = l'$. D'après la question (1)(c), on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}.$$

Comme la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers l' , la suite extraite $(b_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge aussi vers l' . Dès lors, il s'ensuit par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus que :

$$l \geq \frac{l + l'}{2},$$

ce qui entraîne que $2l' \geq l + l'$, et donc $l' \geq l$. Comme de plus $l' \leq l$ d'après la question (1)(b), on en déduit que :

$$\boxed{l' = l}.$$

On se propose maintenant d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

(2) (a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"le réel } u_n \text{ est bien défini et } \geq 1\text{"}.$$

Tout d'abord, on constate que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car u_0 est bien défini et vaut $1 \geq 1$ par hypothèse. A présent, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq 0$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n est bien défini et ≥ 1 . En particulier, on voit que $u_n^2 + u_n \geq 1^2 + 1 = 2 \geq 0$, et donc le réel $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est bien défini (vu que c'est la racine carrée d'un réel positif). De plus, par croissance de la racine carrée, on voit que $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geq \sqrt{2} \geq 1$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le réel } u_n \text{ est bien défini et } \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Etudions tout d'abord les variations de la suite (u_n) . D'après la question (2)(a), on sait que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $u_n^2 + u_n \geq u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par croissance de la racine

carée, on obtient que $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et ce car $u_n \geq 0$). Par conséquent, on en déduit que :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

A présent, établissons que la suite (u_n) diverge et donnons sa limite. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que (u_n) converge. Si α désigne sa limite, on sait que la suite extraite (u_{n+1}) converge aussi vers α . Comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient par passage à la limite dans cette égalité que :

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2 + \alpha}.$$

En élevant le tout au carré, ceci entraîne que $\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha$, et donc $\alpha = 0$. En d'autres termes, la suite (u_n) converge vers 0. Par ailleurs, comme $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question (2)(a), on obtient par passage à la limite dans cette inégalité que :

$$\alpha \geq 1.$$

Dès lors, ceci implique que $0 \geq 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, on en déduit que :

la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

En particulier, comme la suite (u_n) diverge et qu'elle est croissante, le théorème de la limite monotone entraîne que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

(3) Recherche d'un équivalent de u_n .

- (a) Montrons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$. Comme $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question (2)(a), on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \sqrt{u_n^2 \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)} - u_n = u_n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \right].$$

Comme la suite (u_n) tend vers $+\infty$ d'après la question (2)(b), la suite $(\frac{1}{u_n})$ converge vers 0. Dès lors, comme $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on obtient par substitution que :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2u_n}.$$

Par produit, ceci nous donne que :

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left[\sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} - 1 \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}.$$

- (b) Dressons tout d'abord le tableau de variations complet de la fonction f définie pour tout $x \in [1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$. Pour commencer, on voit que la fonction f est dérivable comme composée et différence de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et de plus, on a pour tout $x \geq 1$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

A l'aide des quantités conjuguées, on trouve que, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1-2\sqrt{x^2+x})(2x+1+2\sqrt{x^2+x})}{2\sqrt{x^2+x}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} \\ &= \frac{(2x+1)^2 - (2\sqrt{x^2+x})^2}{2\sqrt{x^2+x}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} \\ &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 4x}{2\sqrt{x^2+x}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}(2x+1+2\sqrt{x^2+x})} \geq 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on voit que, pour tout $x \geq 1$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x = x \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right].$$

Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et que $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on a par substitution que :

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

Par produit, ceci nous donne que :

$$f(x) = x \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{2x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$\sqrt{2} - 1$	$1/2$

A présent, montrons que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Par construction, on sait que $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le tableau de variations de la question (3)(b), on voit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Comme de plus $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question (2)(a), il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1} - u_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est croissante.

- (c) Etablissons que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$. Si l'on pose $a_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait d'après la question (3)(b) et (3)(a) que la suite (a_n) est croissante et de limite $1/2$. De plus, on voit par télescopage que, pour tout $n \geq 1$:

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = n \times \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k.$$

Si l'on pose $b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait d'après la question (1) que la suite (b_n) converge aussi vers $1/2$. Comme cette limite est finie et non nulle, ceci entraîne que :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$u_n - u_0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{1}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}.$$

Par ailleurs, comme (u_n) tend vers $+\infty$, on voit que $u_n - u_0 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, puisque :

$$\frac{u_n - u_0}{u_n} = 1 - \frac{u_0}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}.$$

(4) Exprimons tout d'abord S_n en fonction de u_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve par télescopage que :

$$u_n^2 - u_0^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k^2 + u_k - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = S_n.$$

Comme de plus $u_0 = 1$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{S_n = u_n^2 - 1.}$$

A présent, déterminons un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$. Comme (u_n) tend vers $+\infty$ d'après la question (2)(b), on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_n^2 - 1}{u_n^2} = 1 - \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - 0 = 1.$$

En particulier, ceci nous donne avec la question précédente que :

$$S_n = u_n^2 - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n^2.$$

Mais comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ d'après la question (3)(c), on en déduit que :

$$\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}.}$$

Corrigé de l'exercice 2. On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$. Dans cet exercice, on s'intéresse à la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n), \quad S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}.$$

(1) (a) Rappelons les développements limités à l'ordre 2 quand x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$. D'après le cours, on sait qu'au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } \frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2).}$$

(b) Montrons alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n(1 + \frac{1}{n})} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \quad (*) \end{aligned}$$

Posons alors $x = \frac{1}{n}$. Comme x tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on obtient par substitution avec la question précédente que :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Dès lors, il s'ensuit avec l'égalité (*) qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} - w_n &= \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$w_{n+1} - w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

- (c) Montrons que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge. D'après la question précédente, on trouve en passant à la valeur absolue qu'au voisinage de $+\infty$:

$$|w_{n+1} - w_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le cours, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge par linéarité. Comme il s'agit d'une série à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} |w_{n+1} - w_n|$ converge d'après le critère d'équivalence. Dès lors, la série $\sum_{n \geq 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge absolument, et donc :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} (w_{n+1} - w_n) \text{ converge.}$$

- (d) Montrons que la suite (w_n) converge vers un réel γ (appelé la *constante d'Euler*). Par télescopage, on voit que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$w_n - w_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (w_{k+1} - w_k).$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} (w_{n+1} - w_n)$ converge d'après la question précédente, sa suite des sommes partielles converge, et donc la suite $(w_n - w_1)$ est convergente (puisque son terme général est la somme partielle de la série à l'ordre $n - 1$). Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{la suite } (w_n) \text{ converge vers un réel } \gamma.$$

- (2) Etudions les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$, puis dressons son tableau de variations en précisant ses limites aux bornes de son ensemble de définition. Par construction, la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t > 0$, on a :

$$\varphi'(t) = \frac{\ln'(t) \times t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \frac{1 - \ln(t)}{t^2}.$$

Dès lors, on voit que $\varphi'(t)$ est ≥ 0 si et seulement si $1 - \ln(t) \geq 0$, c'est-à-dire si $\ln(t) \leq 1$, ou en d'autres termes si $t \leq e$. En particulier, la fonction φ est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $]e, +\infty[$. En outre, comme $\ln(t)$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers 0, il s'ensuit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{t} = -\infty.$$

Par ailleurs, on sait que, par croissance comparée :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0.$$

Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant pour φ :

t	0	e		$+\infty$
$\varphi'(t)$		+	0	-
φ		$1/e$ $\nearrow$ $\searrow$ $-\infty$ 0		

- (3) (a) Montrons que les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 S_{2n+2} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\
 &= (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
 &= \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
 &= \varphi(2n+2) - \varphi(2n+1).
 \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$, on voit que $2n+2 > 2n+1 \geq 5 > e$. Mais comme la fonction φ est décroissante sur $[e, +\infty[$ d'après la question (2), il s'ensuit que $\varphi(2n+2) - \varphi(2n+1) \leq 0$, et donc :

la suite $(S_{2n})_{n \geq 2}$ est décroissante.

De même, toujours par des calculs simples, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 S_{2n+3} - S_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} \\
 &= (-1)^{2n+3} \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + (-1)^{2n+2} \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\
 &= \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} \\
 &= \varphi(2n+2) - \varphi(2n+3).
 \end{aligned}$$

Comme $n \geq 2$, on voit que $2n+3 > 2n+2 \geq 6 > e$. Mais comme la fonction φ est décroissante sur $[e, +\infty[$ d'après la question (2), il s'ensuit que $\varphi(2n+2) - \varphi(2n+3) \geq 0$, et donc :

la suite $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ est croissante.

Enfin, par des calculs analogues aux précédents, on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = (-1)^{2n+1} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = -\varphi(2n+1).$$

Mais comme φ tend vers 0 en $+\infty$, il s'ensuit que :

$$S_{2n+1} - S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes.

- (b) Montrons tout d'abord que la série de terme général u_n converge. D'après la question précédente, on sait que les suites $(S_{2n})_{n \geq 2}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq 2}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, ces deux suites convergent et ont même limite. Dès lors, comme les suites des termes d'ordre pair et impair de la suite (S_n) convergent vers un même réel l , il s'ensuit que la suite (S_n) converge vers l . Mais comme (S_n) est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n , on en déduit que :

la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

A présent, montrons que la série de terme général u_n n'est pas absolument convergente. Comme $|u_n| = \frac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et que $3 > e$, on trouve que, pour tout $n \geq 3$:

$$|u_n| = \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(e)}{n} = \frac{1}{n} > 0.$$

Comme la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge d'après le cours, le critère de comparaison des séries à termes positifs entraîne que la série $\sum_{n \geq 3} |u_n|$ diverge. Comme la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, il s'ensuit que la série $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ diverge aussi, et donc :

la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas absolument.

(4) (a) Justifions que, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

D'après la question (2), on sait que la fonction φ est décroissante sur $[e, +\infty[$. Comme $3 > e$, on obtient que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $[n, n+1]$ pour tout $n \geq 3$. D'après la définition de la fonction φ , on voit que, pour tout $n \geq 3$ et pour tout $t \in [n, n+1]$:

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(t)}{t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $n \geq 3$:

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} dt \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

Par des calculs simples, on obtient que, pour tout $n \geq 3$:

$$(n+1-n) \frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 3$:

$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt.$

(b) Montrons que la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante et convergente. Par définition de la suite (v_n) , on voit que, pour tout $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} + \frac{[\ln(n)]^2}{2}. \end{aligned}$$

Comme la fonction φ admet pour primitive la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(\ln(t))^2$, on obtient avec la question précédente que, pour tout $n \geq 3$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2} \right) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

la suite $(v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

Comme à la question (4)(a), on peut montrer à l'aide de la décroissance de la fonction φ et d'après la croissance de l'intégrale que, pour tout $n \geq 3$:

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt. \quad (*)$$

Dès lors, il s'ensuit avec la relation de Chasles et par linéarité de la somme que, pour tout $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\
&= \frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} - \left(\frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} \right) - \frac{[\ln(3)]^2}{2} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} - \left(\frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} \right) \\
&= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} - \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt \\
&= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=3}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \\
&= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \sum_{k=3}^{n-1} \left[\frac{\ln(k)}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \right].
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (*), on voit que la somme de droite dans l'égalité ci-dessus est ≥ 0 , et donc on obtient que, pour tout $n \geq 4$:

$$v_n \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2} + \frac{\ln(n)}{n}.$$

Comme $\ln(n) \geq 0$ pour tout $n \geq 4$, on trouve que, pour tout $n \geq 4$:

$$v_n \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{[\ln(3)]^2}{2}.$$

En particulier, la suite $(v_n)_{n \geq 4}$ est minorée. Mais comme elle est décroissante, le théorème de la limite monotone entraîne que :

$$\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n \geq 3} \text{ converge.}}$$

(5) (a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

Pour ce faire, on constate par linéarité de la somme que, pour tout $n \geq 1$:

$$S_{2n} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{2n} [(-1)^k + 1] \frac{\ln(k)}{k}.$$

On remarque alors que $(-1)^k + 1 = 0$ si k est impair et $(-1)^k + 1 = 2$ si k est pair. Dès lors, on obtient par linéarité de la somme que, pour tout $n \geq 1$:

$$S_{2n} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{2n} [(-1)^k + 1] \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{1 \leq k \leq 2n, k \text{ pair}} 2 \frac{\ln(k)}{k} = 2 \sum_{1 \leq k \leq 2n, k \text{ pair}} \frac{\ln(k)}{k}.$$

Comme la somme de droite porte sur des indices pairs, on peut poser $l = \frac{k}{2}$. Alors on voit que l est un entier et que $k = 2l$, et de plus $1 \leq l \leq n$ car $1 \leq k \leq 2n$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de droite peut se réécrire sous la forme :

$$S_{2n} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = 2 \sum_{1 \leq k \leq 2n, k \text{ pair}} \frac{\ln(k)}{k} = 2 \sum_{1 \leq l \leq n} \frac{\ln(2l)}{2l} = 2 \sum_{l=1}^n \frac{\ln(2l)}{2l}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{S_{2n} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n).$$

D'après la question précédente, on obtient par linéarité de la somme que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}. \end{aligned}$$

Par définition de la suite (v_n) , on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \left[\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2} \right] + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \left[\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \right] - \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - v_{2n} - \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(2n)]^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(2) + \ln(n)]^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} - \frac{[\ln(2)]^2 + 2 \ln(2) \ln(n) + [\ln(n)]^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{S_{2n} = \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n).}$$

(c) Démontrons alors l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

D'après la question précédente et par définition de u_n , on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2) \ln(n) \\ &= \ln(2) \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right] + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} \\ &= \ln(2) w_n + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2}. \quad (*) \end{aligned}$$

Comme la série de terme général u_n converge d'après la question (3)(b), sa suite (S_n) des sommes partielles converge vers la somme S de la série. En particulier, la suite (S_{2n}) des termes d'ordre pair de (S_n) converge aussi vers S . En outre, comme la suite (v_n) converge vers un réel l d'après la question (4)(b), la suite (v_{2n}) des termes d'ordre pair de (v_n) converge aussi vers l . Dès lors, comme la suite (w_n) converge vers la constante d'Euler γ d'après la question (1)(d), on obtient par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'expression (*) que :

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \ln(2)\gamma + l - l - \frac{[\ln(2)]^2}{2} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}.$$

Mais comme S est la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}}.$$

Corrigé du problème 1. On considère l'application $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

De plus, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n dt, \quad J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt, \quad K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt.$$

(1) Résultats généraux sur φ et J_n :

- (a) Montrons que φ est continue sur $[0, +\infty[$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale J_n existe. Pour ce faire, on peut commencer à remarquer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. Comme de plus $\sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, il s'ensuit que :

$$\varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

En particulier, on voit que $\varphi(t)$ tend vers $\varphi(0) = 1$ quand t tend vers 0, et donc φ est continue en 0. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

Mais comme φ est continue sur $[0, +\infty[$, elle est continue sur $[0, 1]$, et donc φ^n est continue sur $[0, 1]$ comme puissance entière positive d'une fonction continue sur $[0, 1]$. En particulier, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ existe.}}$$

- (b) (i) Tout d'abord, montrons que φ est strictement positive sur $[0, 1]$. Comme la fonction $\sin$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, on voit que la fonction $\sin$ est strictement croissante sur $[0, 1]$. Comme de plus $\sin(0) = 0$, il s'ensuit que $\sin(t) > 0$ pour tout $t \in]0, 1]$. Mais comme $t > 0$ pour tout $t \in]0, 1]$, on obtient que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \in]0, 1]$. Comme $\varphi(0) = 1 > 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement positive sur } [0, 1].}$$

A présent, montrons que φ est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que φ est dérivable sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0, 1[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1[$. De plus, pour tout $t \in]0, 1[$, on a :

$$\varphi'(t) = \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)' = \frac{t \cos(t) - \sin(t)}{t^2}.$$

Considérons l'application $u : t \mapsto t \cos(t) - \sin(t)$. Alors la fonction u est dérivable sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0, 1]$, et de plus pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$u'(t) = (t \cos(t) - \sin(t))' = -t \sin(t) + \cos(t) - \cos(t) = -t \sin(t).$$

Comme $u'(t) < 0$ pour tout $t \in]0, 1[$, on trouve que la fonction u est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Comme u est continue en 0 et que $u(0) = 0$, il s'ensuit que u est strictement négative sur $]0, 1[$. Dès lors, on voit que $\varphi'(t) < 0$ pour tout $t \in]0, 1[$, et donc φ est strictement décroissante sur $]0, 1[$. Mais comme φ est continue en 0, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur } [0, 1].}$$

- (ii) Établissons que, pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a : $|\varphi(t)| < 1$. Pour ce faire, considérons l'application $u : t \mapsto \sin(t) - t$. Alors la fonction u est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme différence de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, et de plus pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$u'(t) = (\sin(t) - t)' = -1 + \cos(t).$$

Comme $\cos(t) \leq 1$, on voit que $u'(t) \leq 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Comme de plus u' ne s'annule qu'aux points de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on trouve que la fonction u est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Mais comme u est continue en 0 et que $u(0) = 0$, il s'ensuit que u est strictement négative sur $]0, +\infty[$. Dès lors, on a montré que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sin(t) < t \quad (*).$$

De même, considérons l'application $v : t \mapsto \sin(t) + t$. Alors v est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, et de plus pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$v'(t) = (\sin(t) + t)' = 1 + \cos(t).$$

Comme $-\cos(t) \leq 1$, on voit que $v'(t) \geq 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Comme de plus v' ne s'annule qu'aux points de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on trouve que la fonction v est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Mais comme v est continue en 0 et que $v(0) = 0$, il s'ensuit que v est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Dès lors, on a montré que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad -t < \sin(t) \quad (**).$$

En mettant bout à bout les inégalités (*) et (**), on obtient que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad -t < \sin(t) < t.$$

Mais ceci signifie exactement que $|\sin(t)| < |t|$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, et donc :

$$\boxed{\forall t \in]0, +\infty[, \quad |\varphi(t)| < 1.}$$

- (c) (i) Étudions les variations sur $[0, +\infty[$ de l'application $f : t \mapsto \sin(t) - t + t^2$. Par construction, la fonction f est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions deux fois dérivables sur $[0, +\infty[$, et de plus pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$f'(t) = \cos(t) - 1 + 2t \quad \text{et} \quad f''(t) = -\sin(t) + 2.$$

Comme $\sin(t) \leq 1 < 2$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on voit que $f''(t) > 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, et donc la fonction f' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f'(0) = \cos(0) - 1 + 0 = 0$, il s'ensuit que f' est strictement positive sur $]0, +\infty[$, et donc :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

- (ii) Montrons que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a : $\varphi(t) \geq 1 - t$. D'après la question précédente, on sait que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f(0) = \sin(0) - 0 + 0^2 = 0$, on obtient que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$f(t) = \sin(t) - t + t^2 \geq f(0) = 0.$$

Dès lors, on trouve que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\sin(t) \geq t - t^2.$$

Comme $t > 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, il s'ensuit que $\varphi(t) \geq 1 - t$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Mais comme $\varphi(0) = 1 \geq 1 - 0$, on en déduit que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\boxed{\varphi(t) \geq 1 - t.}$$

- (iii) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $J_n \geq \frac{1}{n+1}$. D'après la question précédente, on sait que $\varphi(t) \geq 1 - t \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Dès lors, on voit que $\varphi^n(t) \geq (1 - t)^n$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt \geq \int_0^1 (1 - t)^n dt = \left[-\frac{(1 - t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = -0 + \frac{(1 - 0)^{n+1}}{n+1}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{J_n \geq \frac{1}{n+1}.}$$

(2) Etude de I_1 :

- (a) (i) Montrons que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Pour ce faire, on pose $u(t) = -\cos(t)$ et $v(t) = \frac{1}{t}$ pour tout $t \in [1, x]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$, et de plus $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$ pour tout $t \in [1, x]$. Dès lors, par intégration par parties, on obtient que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt &= \int_1^x u'(t)v(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt \\ &= \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\boxed{\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.}$$

- (ii) Montrons que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Comme $|\cos(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [1, +\infty[$, on voit que, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{|\cos(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

D'après le cours, on sait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge. Dès lors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt$ converge aussi d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. En particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ converge absolument, et donc elle converge. Mais ceci signifie exactement que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Comme la fonction $\cos$ est bornée sur $[1, +\infty[$, il s'ensuit que $\frac{\cos(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Dès lors, d'après la question précédente, on obtient que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } K_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ est convergente.}}$$

Mais comme l'intégrale $J_1 = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge d'après la question (1)(a), on en déduit avec la relation de Chasles que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ est convergente.}}$$

(b) (i) Montrons que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$|\sin(t)| \geq \sin^2(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)).$$

Comme $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on voit que $|\sin(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. En particulier, on obtient que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|\sin(t)| - \sin^2(t) = |\sin(t)| (1 - |\sin(t)|) \geq 0,$$

d'où il s'ensuit que $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Comme de plus $\sin^2(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2t))$ d'après les formules de l'angle double en trigonométrie, on en déduit que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\boxed{|\sin(t)| \geq \sin^2(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2t)).}$$

(ii) Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge. Pour ce faire, on se fixe un réel $x \in [1, +\infty[$ et l'on pose $u(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$ et $v(t) = \frac{1}{2t}$ pour tout $t \in [1, x]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, x]$, et de plus $u'(t) = \cos(2t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{2t^2}$ pour tout $t \in [1, x]$. Dès lors, par intégration par parties, on obtient que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt &= \int_1^x u'(t)v(t) dt \\ &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t) dt \\ &= \left[\frac{\sin(2t)}{4t} \right]_1^x - \int_1^x -\frac{\sin(2t)}{4t^2} dt \\ &= \frac{\sin(2x)}{4x} - \frac{\sin(2)}{4} + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt \quad (*). \end{aligned}$$

Comme $|\sin(2t)| \leq 1$ pour tout $t \in [1, +\infty[$, on voit que, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{|\sin(2t)|}{4t^2} \leq \frac{1}{4t^2}.$$

D'après le cours, on sait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, et donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t^2} dt$ converge aussi par linéarité. Dès lors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(2t)|}{4t^2} dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. En particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$ converge absolument, et donc elle converge. Mais ceci signifie exactement que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Comme la fonction $\sin$ est bornée sur $[1, +\infty[$, il s'ensuit que $\frac{\sin(2x)}{4x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Dès lors, d'après la formule (*) ci-dessus, on obtient que la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt \text{ est convergente.}}$$

(iii) Montrons que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente. D'après les questions précédentes, on sait que, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$|\sin(t)| \geq \frac{1}{2} (1 - \cos(2t))$$

En particulier, on voit que, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \geq \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \int_1^x \left(\frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \right) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{1}{2} \int_1^x \frac{1}{t} dt - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\int_1^x \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \geq \frac{1}{2} \ln(x) - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt.$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ converge d'après la question précédente, la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Mais comme la fonction $\ln$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il s'ensuit que la fonction $x \mapsto \int_1^x \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

En particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$ diverge, et donc :

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.

(3) Etude de I_n pour $n \geq 2$:

- (a) (i) Montrons que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale K_n est convergente. Comme $|\sin(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [1, +\infty[$, on voit que, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$0 \leq \left| \frac{\sin^n(t)}{t^n} \right| \leq \frac{1}{t^n}.$$

D'après le cours, on sait que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ converge car $n \geq 2$. Dès lors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin^n(t)}{t^n} \right| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. En particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$ converge absolument, et donc pour tout $n \geq 2$:

l'intégrale $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt$ est convergente.

- (ii) Etablissons que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $|K_n| \leq \frac{1}{n-1}$. D'après ce qui précède, on sait que, pour tout $t \in [1, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$0 \leq \left| \frac{\sin^n(t)}{t^n} \right| \leq \frac{1}{t^n}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ converge et que l'intégrale K_n est absolument convergente d'après la question précédente, on obtient d'après l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^n} dt \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin^n(t)}{t^n} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$

En particulier, on trouve que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$|K_n| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \right].$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 2$:

$|K_n| \leq \frac{1}{n-1}.$

- (b) (i) Montrons que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante. Pour tout entier $n \geq 2$, on obtient par définition de (J_n) et par linéarité de l'intégrale que :

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^{n+1} dt - \int_0^1 (\varphi(t))^n dt = \int_0^1 (\varphi^{n+1}(t) - \varphi^n(t)) dt = \int_0^1 \varphi^n(t)(\varphi(t) - 1) dt.$$

Comme $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \in]0, 1[$ d'après la question (1)(b)(ii) et que $\varphi(0) = 1$, on voit que $|\varphi(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier, cela signifie que $-1 \leq \varphi(t) \leq 1$ pour tout

$t \in [0, 1]$, et donc $\varphi(t) - 1 \leq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Mais comme φ est strictement positive sur $[0, 1]$ d'après la question (1)(b)(i), il s'ensuit que $\varphi^n(t)(\varphi(t) - 1) \leq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Dès lors, par positivité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \varphi^n(t)(\varphi(t) - 1)dt \leq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

- (ii) Montrons que la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ converge (vers une limite notée l). Pour tout entier $n \geq 2$, on sait par définition de (J_n) que :

$$J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt.$$

Mais comme φ est strictement positive sur $[0, 1]$ d'après la question (1)(b)(i), il s'ensuit que $\varphi^n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$. Dès lors, par positivité de l'intégrale, on a pour tout $n \geq 2$:

$$J_n = \int_0^1 \varphi^n(t) dt \geq 0.$$

En particulier, la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est minorée par 0. Mais comme elle est aussi décroissante d'après la question précédente, le théorème de la limite monotone entraîne que :

la suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

- (iii) Etablissons que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $a \in]0, 1[$, on a :

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a \quad \text{et} \quad \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n.$$

D'après la question (1)(b)(ii), on sait que $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \in]0, 1]$. En particulier, on voit que $|\varphi^n(t)| < 1$ pour tout $t \in]0, 1]$ et tout entier $n \geq 2$. Comme $\varphi(0) = 1$, il s'ensuit que $|\varphi^n(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout entier $n \geq 2$, et donc $\varphi^n(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$ et tout entier $n \geq 2$. Dès lors, par croissance de l'intégrale, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq \int_0^a 1 dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $a \in]0, 1[$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a.$$

D'après la question (1)(b)(i), on sait que φ est strictement positive et strictement décroissante sur $[0, 1]$. En particulier, on voit que $\varphi^n(t) \leq \varphi^n(a)$ pour tout $a \in]0, 1[$, tout $t \in [a, 1]$ et tout entier $n \geq 2$. Dès lors, par croissance de l'intégrale, on a pour tout $a \in]0, 1[$ et tout $n \geq 2$:

$$\int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq \int_a^1 (\varphi(a))^n dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $a \in]0, 1[$:

$$\int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n.$$

- (iv) Montrons que, pour tout $a \in]0, 1[$, on a : $0 \leq l \leq a$, puis que $l = 0$. Soit a un réel fixé dans $]0, 1[$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a \quad \text{et} \quad \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n.$$

D'après la relation de Chasles, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$\int_0^1 (\varphi(t))^n dt = \int_0^a (\varphi(t))^n dt + \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq a + (1-a)(\varphi(a))^n.$$

Par définition de (J_n) , on trouve que, pour tout $n \geq 2$:

$$J_n \leq a + (1-a)(\varphi(a))^n.$$

D'après la question (1)(b)(ii), on sait que $|\varphi(a)| < 1$ pour tout $a \in]0, 1[$. En particulier, on voit que $|\varphi^n(a)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Dès lors, par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus, on trouve que, pour tout $a \in]0, 1[$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \leq a.$$

Comme de plus la suite (J_n) est minorée par 0 d'après la question (3)(b)(ii), on obtient par passage à la limite que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \geq 0.$$

Par définition de l , on en déduit que, pour tout $a \in]0, 1[$:

$$\boxed{0 \leq l \leq a.}$$

Comme l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $a \in]0, 1[$, elle est aussi vraie pour tout réel a de la forme $a = \frac{1}{p}$ avec $p \geq 2$. En d'autres termes, pour tout $p \geq 2$, on a :

$$0 \leq l \leq \frac{1}{p}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il s'ensuit que la suite constante (l) converge vers 0, et donc :

$$\boxed{l = 0.}$$

- (c) (i) Montrons que, pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n est convergente. D'après les questions (1)(a) et (3)(a)(i), on sait que les intégrales J_n et K_n convergent pour tout entier $n \geq 2$. Mais comme $I_n = J_n + K_n$ pour tout $n \geq 2$ d'après la relation de Chasles, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$$

- (ii) Etablissons que la suite (I_n) tend vers 0. D'après la question (3)(a)(ii), on sait que $|K_n| \leq \frac{1}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$. Dès lors, on obtient que, pour tout $n \geq 2$:

$$-\frac{1}{n-1} \leq K_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il s'ensuit que la suite (K_n) converge vers 0. En outre, on sait d'après les questions précédentes que la suite (J_n) converge aussi vers 0. Mais comme $I_n = J_n + K_n$ pour tout $n \geq 2$ d'après la relation de Chasles, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge vers 0.}}$$

(4) Etude de la série de terme général I_n , pour $n \geq 2$:

- (a) Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0$. Par définition de K_n et par linéarité de l'intégrale, on obtient que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} K_{2p} + K_{2p+1} &= \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^{2p+1} dt + \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^{2p} dt \\ &= \int_1^{+\infty} (\varphi^{2p+1}(t) + \varphi^{2p}(t)) dt \\ &= \int_1^{+\infty} \varphi^{2p}(t)(1 + \varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

D'après la question (1)(b)(ii), on sait que $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. En particulier, on voit que $\varphi(t) \geq -1$ pour tout $t \in [1, +\infty[$, et donc $\varphi(t) + 1 \geq 0$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. Mais alors la fonction $t \mapsto \varphi^{2p}(t)(1 + \varphi(t))$ est positive sur $[1, +\infty[$, et donc on obtient par positivité de l'intégrale que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \varphi^{2p}(t)(1 + \varphi(t)) dt \geq 0.$$

Par conséquent, on vient de montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0.}$$

(b) Montrons que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}).$$

Comme $I_n = J_n + K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question précédente entraîne que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$K_{2p} + K_{2p+1} = (I_{2p} - J_{2p}) + (I_{2p+1} - J_{2p+1}) \geq 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2p} + I_{2p+1} \geq J_{2p} + J_{2p+1}.$$

Par sommation sur p , on en déduit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}).}$$

(c) Montrons que la série $\sum_{n \geq 2} I_n$ diverge. D'après la question (1)(c)(iii), on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$J_n \geq \frac{1}{n+1}.$$

En particulier, on trouve que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$J_{2p} + J_{2p+1} \geq \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \geq \frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p+2} = \frac{1}{p+1}.$$

Comme la série harmonique $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p}$ diverge d'après le cours, on voit que la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1}$ diverge aussi par un simple décalage d'indice. Comme de plus la série $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p+1}$ est à termes positifs, il s'ensuit que la série $\sum_{p \geq 1} (J_{2p} + J_{2p+1})$ diverge d'après le critère de comparaison. Mais comme cette dernière est aussi à termes positifs, on en déduit que sa suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$\sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Comme $\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1})$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ d'après la question précédente, cela entraîne que :

$$\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on voit que :

$$\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) = (I_2 + I_3) + (I_4 + I_5) + \dots + (I_{2N} + I_{2N+1}) = \sum_{k=2}^{2N+1} I_k.$$

Si la série $\sum_{n \geq 2} I_n$ convergerait, alors la suite (S_n) de ses sommes partielles serait aussi convergente. Dès lors, la sous-suite (S_{2N+1}) de ses termes d'ordre impair convergerait aussi. Mais ceci est impossible vu que, d'après ce qui précède :

$$S_{2N+1} = \sum_{k=2}^{2N+1} I_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 2} I_n \text{ diverge.}}$$