

TRAVAUX DIRIGÉS : APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

1. CALCUL MATRICIEL

Exercice 1. Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & (2) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, & (3) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}, & (4) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \\
 (5) \quad & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, & (6) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, & (7) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, & (8) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui calculer leur inverse :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, & (2) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & (3) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, & (4) \quad & \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \\
 (5) \quad & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & (6) \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & (7) \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, & (8) \quad & \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Calculer A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

- (1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que $B = J + aI_n$ soit inversible.
- (2) Calculer la matrice B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0$.
- (2) En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1} en fonction de A .

Exercice 6. (HEC 2009) Pour tout $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on pose :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt $\mathbb{R}^4$.

- (1) (a) *Question de cours* : rappeler la définition du sous-espace vectoriel engendré par une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E . Dans quel cas la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est-elle une base de $\text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$?
 (b) Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E , de bases respectives $(x_1, \dots, x_p)$ et $(y_1, \dots, y_q)$, tels que $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$. Montrer que $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est libre. Qu'en déduit-on sur $p + q$?
- (2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.
- (3) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on pose $M_i = M(e_i)$. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la matrice $M_i + J$ est inversible et que la famille $(M_i + J)_{1 \leq i \leq 4}$ est libre.
- (4) Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que, si la matrice $M(a) + \theta J$ est non inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}^*$, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.
- (5) Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice inversible et tel que $J \in G$.
 (a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que G est de dimension ≤ 12 .
 (b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J (*indication* : penser aux matrices ayant une colonne nulle)?

2. APPLICATIONS LINÉAIRES

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathfrak{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient f, g des endomorphismes de E tels que $E = \mathfrak{Im}(f) + \mathfrak{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 - f = 0$. Montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f^2)$ (*indication : on commencera par montrer que f^2 est un projecteur*).

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathfrak{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0_E\}.$$

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel et soient p, q deux projecteurs de E . Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice 12. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

- (1) Vérifier que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- (2) Déterminer la projection d'un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G .
- (3) En déduire le symétrique d'un triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G .

Exercice 13. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(2) = P(3) = 0\}.$$

- (1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[x]$.
- (2) Déterminer la projection d'un polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ sur F parallèlement à G .
- (3) En déduire le symétrique d'un polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ sur F parallèlement à G .

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

- (1) Montrer par récurrence que, pour toutes formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ sur E , on a : $\dim(\cap_{i=1}^p \ker(f_i)) \geq n - p$.
- (2) Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E .
 - (a) Donner les dimensions de $\ker(f)$ et $\ker(g)$.
 - (b) A l'aide d'un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E , montrer que $\ker(f) = \ker(g)$ si et seulement si les formes linéaires f et g sont colinéaires.
 - (c) En déduire que, si f et g ne sont pas colinéaires, alors $\dim \ker(f) \cap \ker(g) = n - 2$.

Exercice 15. (QSP HEC 2015) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On considère l'ensemble A défini par $A = \{(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, u \circ v = 0\}$. Déterminer $\sup_{(u,v) \in A} (\text{rg}(u) + \text{rg}(v))$.

Exercice 16. (QSP HEC 2017) Soit E un espace vectoriel, soit p un projecteur de E et soit u un endomorphisme de E . Montrer que p et u commutent si et seulement si $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ sont stables par u , c'est-à-dire si l'on a $u(\ker(p)) \subset \ker(p)$ et $u(\mathfrak{Im}(p)) \subset \mathfrak{Im}(p)$.

3. APPLICATIONS LINÉAIRES ET MATRICES

Exercice 17. Montrer que l'application f est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, puis donner sa matrice dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $n = 2, f(x, y) = (2x - y, x + y), \mathcal{B} = \mathcal{C} = \text{base canonique}$.
- (2) $n = 2, f(x, y) = (x + y, 2x), \mathcal{B} = ((-2, 7), (3, 5)), \mathcal{C} = \text{base canonique}$.
- (3) $n = 2, f(x, y) = (x + 3y, 2x + y), \mathcal{B} = \mathcal{C} = ((1, 1), (1, 2))$.
- (4) $n = 2, f(x, y) = (x + 2y, 3x - 3y), \mathcal{B} = ((2, 1), (1, -1)), \mathcal{C} = ((1, 1), (1, -1))$.
- (5) $n = 3, f(x, y, z) = (x - 2y - 2z, x + y + z, z), \mathcal{B} = ((1, 1, 3), (1, 1, 2), (1, 0, 1)), \mathcal{C} = \text{base canonique}$.
- (6) $n = 3, f(x, y, z) = (x - 2y, y + z, -x + z), \mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1)), \mathcal{C} = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Exercice 18. Montrer que l'application f est linéaire de $\text{Vect}(\cos, \sin)$ dans lui-même, puis donner sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (\cos, \sin)$, et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $f(g) = g', \quad (2) f(g) = h : x \mapsto g(x + a), \quad (3) f(g) = h : x \mapsto g'(x + a).$

Exercice 19. Montrer que l'application f est linéaire de E dans E , puis donner sa matrice dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$, et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $f(P) : x \mapsto P(x) - P'(x)$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} =$ base canonique.
- (2) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $f(P) : x \mapsto nxP(x) - x^2P'(x)$, $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^n)$.
- (3) $E = \mathbb{R}_3[x]$, $f(P) : x \mapsto (x^2+1)P''(x) - P'(x)$, $\mathcal{B} = (1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$, $\mathcal{C} =$ base canonique.

Exercice 20. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$, ainsi que le rang de f , puis calculer $f \circ f$. Que constate-t-on?

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application l définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[x]$ par :

$$l(P) : x \mapsto xP(x) + (x-x^2)P'(x) + (ax^3 - x^2 + x - 1)P''(x).$$

- (1) Vérifier que l est linéaire, puis déterminer un réel a pour lequel l est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$.
- (2) Dans cette question, on suppose que a est la valeur trouvée en (1).
 - (a) Montrer que $\mathcal{B} = (x \mapsto x, x \mapsto x-1, x \mapsto \frac{1}{2}x^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$, puis calculer $\text{mat}_{\mathcal{B}}(l)$.
 - (b) Décrire le noyau et l'image de l , puis comparer l^2 et l^3 .

Exercice 22. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts, et soit f l'application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n))$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose :

$$L_i : x \mapsto \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

- (1) Montrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- (2) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
- (3) Calculer l'expression de $f(L_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$.
- (4) En déduire que $\mathcal{C} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (5) En déduire la matrice de f de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exercice 23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- (1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Dans cette question, on suppose que la famille $(x, f(x))$ est liée pour tout $x \in E$.
 - (a) Justifier que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.
 - (b) En calculant $f(e_i + e_j)$, montrer que, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on a : $\lambda_i = \lambda_j$.
 - (c) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \text{Id}_E$ (un tel endomorphisme est appelé une homothétie).
- (2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, si f n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathcal{C}$ de E dans laquelle la matrice de f a pour première colonne la colonne C de composantes $0, 1, 0, \dots, 0$.

Exercice 24. (QSP HEC 2010) Dans cet exercice, on considère les sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces vectoriels, puis déterminer $F \cap G$ et $F \cup G$. Enfin, calculer le noyau et l'image de l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25. (HEC 2017) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f_k : x \mapsto x^k e^x$. De plus, on note F_3 le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par f_0, f_1, f_2, f_3 . Enfin, on note Φ l'application qui, à toute fonction $f \in F_3$, associe la fonction :

$$\Phi(f) : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\alpha}^x f(t) dt.$$

- (1) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F_3 .
- (2) On suppose que $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que Φ n'est pas un endomorphisme de F_3 .
- (3) On suppose dans cette question que $\alpha = -\infty$.
 - (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F_3 .
 - (b) Déterminer la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$ ainsi que son inverse M^{-1} .

4. CHANGEMENT DE BASE - MATRICES SEMBLABLES - TRACE

Exercice 26. Déterminer la matrice de passage dans les bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E , et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$, $\mathcal{B}' = ((1, 1), (1, 2))$.
- (2) $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$, $\mathcal{B}' = ((2, 1), (-1, 1))$.
- (3) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$, $\mathcal{B}' =$ base canonique.
- (4) $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((2, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0))$, $\mathcal{B}' = ((0, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 1, 1))$.
- (5) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $\mathcal{B} =$ base canonique, $\mathcal{B}' = (x \mapsto 1, x \mapsto 1 + x, x \mapsto 1 + x + x^2, \dots, x \mapsto 1 + x + x^2 + \dots + x^n)$.
- (6) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto x - a, x \mapsto (x - a)^2, \dots, x \mapsto (x - a)^n)$, $\mathcal{B}' =$ base canonique.

Exercice 27. Dans ce qui suit, on désigne par A la matrice d'un endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dans la base canonique $\mathcal{B}$. A l'aide de la formule de changement de bases, déterminer la matrice de f dans la nouvelle base $\mathcal{C}$, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = ((2, 1), (-1, 1)), \quad (2) A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = ((1, 1, 0), (2, 1, 0), (2, 3, 1)),$$

$$(3) A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = ((1, -2), (-1, -1)), \quad (4) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = ((2, 0, 1), (1, 0, 1), (2, 2, 1)).$$

Exercice 28. Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, définie pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(A) = A - {}^tA$.

- (1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (2) Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$. L'endomorphisme f est-il un isomorphisme?
- (3) Calculer la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en déduire la trace de f .
- (4) Justifier que la concaténation d'une base de $\ker(f)$ et d'une base de $\mathfrak{Im}(f)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (5) En déduire que M est semblable à une matrice diagonale que l'on donnera.

Exercice 29. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $\text{Tr}(p) = \text{rg}(p)$.

Exercice 30. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par H_n l'ensemble des matrices carrées de taille n et de trace nulle. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Exercice 31. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang ≤ 1 .

- (1) Montrer qu'il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $A = CL$.
- (2) En déduire que : $A^2 = \text{Tr}(A)A$.

Exercice 32. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $f_a(P) : x \mapsto (a - x)P'(x) + nP(x)$.

- (1) Montrer que f_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2) Calculer la matrice M_a de f_a dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[x]$, et en déduire la trace de f_a .
- (3) Calculer $f_a(x \mapsto (x - a)^k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
- (4) En déduire que M_a est semblable à une matrice diagonale D_a que l'on donnera.

Exercice 33. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $\text{Tr}(A)X = -\text{Tr}(X)A$.

Exercice 34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, on considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = {}^tM$.

- (1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, puis donner les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- (2) A l'aide de cette décomposition en somme directe, calculer la trace de φ .

Exercice 35. (ESCP 2009) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et posons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application T de E dans E définie pour tout $M \in E$ par $T(M) = M - \text{Tr}(M)A$.

- (1) Montrer que T est un endomorphisme de E .
- (2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\text{Tr}(A)$ pour que T soit bijectif.
- (3) Caractériser l'endomorphisme T lorsque T n'est pas bijectif.

Exercice 36. (QSP HEC 2024) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables à A . Déterminer l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{S}(A) = \{A\}$ (indication : utiliser les matrices $I_n + E_{i,j}$, où $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

5. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 37. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 38. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f \circ f = 0$.

- (1) Montrer que $\text{rg}(f) = 1$ et $\dim \ker(f) = 2$.
- (2) Justifier l'existence de deux vecteurs $e_1, e_2 \in E$ tels que $f(e_1) \neq 0$ et $(f(e_1), e_2)$ est une base de $\ker(f)$.
- (3) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f(e_1), e_2, e_1)$ est une base de E , puis calculer $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- (4) En déduire que, si M est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = 0$, alors M est semblable à :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39. On considère l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est un projecteur, puis déterminer des bases de son noyau, de son image et son rang.

Exercice 40. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *nilpotent* s'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$. L'entier p est appelé *l'indice de nilpotence* de f .

- (1) Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
- (2) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre, et en déduire que $p \leq n$.
- (3) On suppose que $p = n$. Justifier que $\mathcal{F}$ est une base de E et déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 41. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AM - MA$, où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

- (1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (2) Déterminer des bases de $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$. L'endomorphisme f est-il un isomorphisme?
- (3) Calculer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et en déduire la trace de f .

Exercice 42. Soit $f : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $f(P) = \int_0^1 P(t)dt$.

- (1) Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de f , puis calculer une base de $\ker(f)$.
- (2) On pose $F = \ker(f)$ et $G = \text{Vect}(x \mapsto 1)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[x]$.
- (3) Calculer le projeté du polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ sur F parallèlement à G .

Exercice 43. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $f_\lambda(P) : x \mapsto P(x+1) + \lambda P(x)$.

- (1) Montrer que f_λ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, puis donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'endomorphisme f_λ est-il un isomorphisme? Justifier.
- (3) Calculer la trace de f_λ , puis déterminer une base du noyau et une base de l'image de f_{-1} .

Exercice 44. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $f(P) : x \mapsto (x-a)P'(x) + P(x) - P(a)$.

- (1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. En déduire la trace, le rang et le noyau de f .
- (3) Montrer que tout élément de $\mathfrak{Im}(f)$ est divisible par $Q : x \mapsto x - a$, et en déduire une base de $\mathfrak{Im}(f)$.

Exercice 45. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles et soit Φ l'endomorphisme de E défini pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\Phi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (1) Déterminer les noyaux de Φ et de $\Phi \circ \Phi$, ainsi que leurs dimensions respectives. Quelle est l'image de Φ ?
- (2) Dans cette question, on se propose de déterminer une base et la dimension de $\ker \Phi^3$. Pour ce faire, on pose $x_n = 1$, $y_n = n$ et $z_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, on considère l'application $f : \ker \Phi^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ker \Phi^3$ par $f((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_0, u_1, u_2)$.
 - (a) Vérifier que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à $\ker \Phi^3$.
 - (b) Etablir que la famille $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, (z_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre.
 - (c) Montrer que f est une application linéaire injective.
 - (d) En déduire une base et la dimension de $\ker \Phi^3$.

Exercice 46. (QSP ESCP 2011) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires. A-t-on $\ker(f) \subset \mathfrak{Im}(f)$ ou $\mathfrak{Im}(f) \subset \ker(f)$?

Exercice 47. (QSP ESCP 2012) Soit p un projecteur de $\mathbb{R}^3$ de rang 2. Soient f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On suppose que $g \circ f = p$. Calculer les rangs de f et g .

Exercice 48. (QSP HEC 2016) Soit n un entier ≥ 2 et soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ par : $m_{i,j} = i^{j-1}$. Montrer que la matrice M est inversible (*indication : résoudre l'équation $MX = 0$*).

Exercice 49. (QSP HEC 2017) Soit n un entier ≥ 1 et soit E un espace vectoriel de dimension $3n$. Soit f un endomorphisme de E de rang $2n$ et soit g la restriction de f au sous-espace vectoriel $\mathfrak{Im}(f)$.

- (1) Montrer que $\mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{Im}(f^2)$ et $\ker(g) = \ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f)$.
- (2) En déduire que $\text{rg}(f^2) \geq n$.

Exercice 50. (ESCP 2019) Soit k un entier ≥ 2 et soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

- (1) Soient $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_k$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

on désigne par p_i le projecteur de E sur F_i parallèlement à $G_i = \bigoplus_{j=1, j \neq i}^k F_j$.

- (a) Montrer que $\sum_{i=1}^k \text{rg}(p_i) = n$.
- (b) Montrer que $\sum_{i=1}^k p_i = \text{Id}_E$.
- (c) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i \neq j$, on a : $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- (2) Dans cette question, on considère des endomorphismes $q_1, \dots, q_k$ de E , tous non nuls et tels que :

$$q_1 + q_2 + \dots + q_k = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \text{rg}(q_1) + \text{rg}(q_2) + \dots + \text{rg}(q_k) \leq n.$$

- (a) Montrer que $E = \mathfrak{Im}(q_1) \oplus \mathfrak{Im}(q_2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(q_k)$.
- (b) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'endomorphisme q_i est un projecteur de E et que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i \neq j$, on a : $q_i \circ q_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- (c) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, l'endomorphisme q_i est le projecteur de E sur $\mathfrak{Im}(q_i)$ parallèlement

$$\text{à } K_i = \bigoplus_{j=1, j \neq i}^k \mathfrak{Im}(q_j).$$

Exercice 51. (QSP HEC 2019) Soient L_1 et L_2 deux matrices triangulaires inférieures, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. Soient U_1 et U_2 deux matrices triangulaires supérieures inversibles. On suppose que $L_1 U_1 = L_2 U_2$. Justifier que L_1 et L_2 sont inversibles, puis que $L_2^{-1} L_1$ est triangulaire inférieure, et en déduire que L_1 et L_2 sont égales.

Exercice 52. (Endomorphismes nilpotents - ESCP 2022) Soit n un entier ≥ 1 . Etant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\ker(M) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(M) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), Y = MX\}.$$

De plus, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout entier $k \geq 1$, on pose $v_k = \dim \ker(A^k)$ et $w_k = \dim \mathfrak{Im}(A^k)$.

- (1) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a : $\ker(A^k) \subset \ker(A^{k+1})$. En déduire que la suite (v_k) est croissante.
- (2) Montrer que la suite (w_k) est décroissante.
- (3) Supposons qu'il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que $v_{k_0+1} = v_{k_0}$. Montrer que $v_{k_0+2} = v_{k_0+1}$. Que peut-on alors dire des suites d'entiers $(v_k)_{k \geq k_0}$ et $(w_k)_{k \geq k_0}$?

Pour le reste de l'exercice, on définit les notions suivantes. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $M^m = 0$. Etant donnée une matrice nilpotente $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit son *indice de nilpotence* par :

$$p = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid M^m = 0\}.$$

- (4) Donner trois exemples de matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, un où $p = 1$, un où $p = 2$ et un où $p = 3$.
- (5) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Montrer que $p \leq n$.
- (6) On suppose ici que $n \geq 2$. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{si } j \neq i + 1 \end{cases}.$$

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation d'inconnue M donnée par : $M^2 = B$.