Lycée Clemenceau **2025-26**
ECG 2

Devoir Maison de Mathématiques $n^o 2$:
Intégrales impropres - Révisions d'Algèbre linéaire

Exercice 1. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un vecteur $(x_1, ..., x_n)$ de taille $n > 0$ quelconque, retourne la matrice $A = (\cos(x_i + x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 2. Une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite "magique" si les sommes de ses coefficients en ligne, en colonne et en diagonale sont toutes égales. Ecrire une fonction en Python qui, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ entrée par l'utilisateur, détermine si A est magique ou pas.

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur E l'application φ qui, à toute fonction f de E, associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(0) = f(0)$ et pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(f)(x) = \frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 f(t)dt.$$

(1) Soit $\alpha \geq 0$ et posons $h_\alpha(x) = x^\alpha$ pour tout $x \geq 0$. Expliciter $\varphi(h_\alpha)$.
(2) Soit f un élément quelconque de E.
  (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\left(\min\limits_{[0,x]}(f)\right) \dfrac{x^6}{6} \leq \displaystyle\int_0^x t^5 f(t)dt \leq \left(\max\limits_{[0,x]}(f)\right) \dfrac{x^6}{6}$.
  (b) Justifier que $\lim\limits_{x \to 0^+} \min\limits_{[0,x]}(f) = \lim\limits_{x \to 0^+} \max\limits_{[0,x]}(f) = f(0)$ et que $\varphi(f)$ est continue à droite en 0^+.
  (c) Justifier que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que, pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x}\left[f(x) - (\varphi(f))(x)\right].$$

(3) (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
  (b) Justifier que $\ker(\varphi)$ ne contient que la fonction nulle. Qu'en déduit-on sur φ?
(4) Soient λ un réel non nul et g une fonction non nulle de E tels que $\varphi(g) = \lambda g$.
  (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{6(1-\lambda)}{\lambda} g(x) = x g'(x).$$

  (b) Pour tout $x > 0$, on pose : $u(x) = x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x)$.
    (i) Montrer que la fonction u est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
    (ii) En déduire que, pour tout $x > 0$, on a : $g(x) = g(1).x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}}$.
    (iii) En utilisant la continuité de g à droite en 0, montrer que $\lambda \in]0, 1]$.
(5) Application : déterminer $\ker\left(\varphi - \frac{1}{3}\mathrm{Id}_E\right)$ et $\ker\left(\varphi - 2\mathrm{Id}_E\right)$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ et soit f un endomorphisme de E. On dit que g est un *pseudo-inverse* de f si g est un endomorphisme de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) $f \circ g \circ f = f$.
- (ii) $g \circ f \circ g = g$.
- (iii) $f \circ g = g \circ f$.

(1) (a) On suppose que f est un automorphisme de E. Montrer que f admet un unique pseudo-inverse.
  (b) On suppose que f est un projecteur de E. Proposer un pseudo-inverse de f.
(2) Montrer que, pour tous endomorphismes u, v de E, on a : $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$.
(3) Dans cette question, on suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant la propriété (i).
  (a) Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des projecteurs de E.
  (b) Comparer les rangs de f, $f \circ g$ et $g \circ f$.
  (c) Montrer que $f \circ g$ est un projecteur sur $\mathfrak{Im}(f)$ parallèlement à un sous-espace vectoriel F contenant le noyau de g.
(4) Dans cette question, on suppose que g et h sont deux pseudo-inverses de f.
  (a) Montrer que $f \circ h = g \circ f$.
  (b) Montrer que $g = h$.
(5) Dans cette question, on suppose que f admet comme pseudo-inverse g.

(a) Montrer que $\mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{Im}(f)$ et $\ker(g) = \ker(f)$.
(b) Montrer que $\mathfrak{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E.

Problème 1. Pour tous entiers $p, n \geq 1$, on pose :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + ... + u_n.$$

Partie I: étude de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$

(1) Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

(2) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante et converge vers un réel noté γ tel que $0 \leq \gamma \leq 1$.

Partie II: expression intégrale du réel γ

(1) (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leq e^x$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

(c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

(2) (a) Etablir que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in [0, 1]$:

$$(1 - x)^n + nx - 1 \geq 0.$$

(b) A l'aide des questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, n]$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

(3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt.$$

(a) Justifier l'existence de I_n pour tout $n \geq 1$.
(b) Etablir que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) dt.$$

(a) Etablir pour tout entier $n \geq 1$ la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n\left(a_n + \ln(n+1)\right).$$

(b) Justifier l'existence de J_n, puis montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

(5) On considère les intégrales :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

(a) Justifier l'existence de U et de V
(b) Démontrer que : $\gamma = U - V$.