

Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques n°2

Corrigé de l'exercice 1. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ de taille $n > 0$ quelconque, calcule et affiche la matrice $A = (\cos(x_i + x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Pour ce faire, on va commencer par déterminer la longueur du vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ avec la commande `np.shape`, puis on construira la matrice nulle et enfin, on utilisera deux boucles `for` pour en modifier les coefficients, et ce comme suit :

```
def matrice(x):
    n=np.shape(x)[0]
    a=np.zeros([n,n])
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,i+1):
            a[i,j]=np.cos(x[i]*x[j])
    return a
```

Corrigé de l'exercice 2. Une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite "magique" si les sommes de ses coefficients en ligne, en colonne et en diagonale sont toutes égales. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ entrée par l'utilisateur, détermine si A est magique ou pas. Pour ce faire, on commence par construire le vecteur l des sommes en ligne, en colonne et en diagonale des coefficients de A . Ensuite, on détermine combien de composantes du vecteur l sont égales à la première. S'il y en a 8, alors on affiche que la matrice est magique, et sinon qu'elle ne l'est pas. Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
def matmag(a):
    l=np.zeros([8])
    for i in range(0,3):
        l[i]=a[i,0]+a[i,1]+a[i,2]
    for j in range(0,3):
        l[j+3]=a[0,j]+a[1,j]+a[2,j]
    l[6]=a[0,0]+a[1,1]+a[2,2]
    l[7]=a[0,2]+a[1,1]+a[2,0]
    s=0
    for i in range(0,8):
        if l[i]!=l[0]:
            s=s+1
    if s==0:
        print('la matrice est magique')
    else:
        print('la matrice n est pas magique')
```

Corrigé de l'exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur E l'application φ qui, à toute fonction f de E , associe la fonction $\varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(0) = f(0)$ et pour tout $x > 0$ par :

$$\varphi(f)(x) = \frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 f(t) dt.$$

- (1) Soit $\alpha \geq 0$ et posons $h_\alpha(x) = x^\alpha$ pour tout $x \geq 0$. Explicitons $\varphi(h_\alpha)$. Par définition, on voit que $\varphi(h_\alpha)(0) = 0^\alpha$, et donc $\varphi(h_\alpha)$ est égale à 0 si $\alpha > 0$ et à 1 si $\alpha = 0$. De plus, pour tout $x > 0$, on trouve par des calculs simples que :

$$\varphi(f)(x) = \frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 t^\alpha dt = \frac{6}{x^6} \int_0^x t^{5+\alpha} dt = \frac{6}{x^6} \left[\frac{t^{6+\alpha}}{6+\alpha} \right]_0^x = \frac{6}{x^6} \times \frac{x^{6+\alpha}}{6+\alpha}.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x \geq 0$:

$$\varphi(h_\alpha)(x) = \begin{cases} \frac{6x^\alpha}{6+\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0^\alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Mais comme 0^α est égal à 0 si $\alpha > 0$ et à 1 si $\alpha = 0$, on voit que $\frac{6 \cdot 0^\alpha}{6 + \alpha} = 0^\alpha$ pour tout $\alpha \geq 0$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $\alpha \geq 0$:

$$\boxed{\varphi(h_\alpha) = \frac{6}{6 + \alpha} h_\alpha.}$$

(2) Soit f un élément quelconque de E .

(a) Montrons que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(\min_{[0,x]}(f) \right) \frac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t) dt \leq \left(\max_{[0,x]}(f) \right) \frac{x^6}{6}.$$

Pour ce faire, fixons un réel $x > 0$ et posons $m_x = \min_{[0,x]}(f)$ et $M_x = \max_{[0,x]}(f)$. Par définition de m_x et M_x , on voit que, pour tout $t \in [0, x]$:

$$m_x \leq f(t) \leq M_x.$$

Après multiplication par t^5 (lequel est ≥ 0 car $t \geq 0$), on trouve que, pour tout $t \in [0, x]$:

$$m_x t^5 \leq t^5 f(t) \leq M_x t^5.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient que :

$$\int_0^x m_x t^5 dt \leq \int_0^x t^5 f(t) dt \leq \int_0^x M_x t^5 dt,$$

ce qui nous donne après calculs que :

$$m_x \frac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t) dt \leq M_x \frac{x^6}{6}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\left(\min_{[0,x]}(f) \right) \frac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t) dt \leq \left(\max_{[0,x]}(f) \right) \frac{x^6}{6}.$$

(b) Tout d'abord, justifions que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \min_{[0,x]}(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \max_{[0,x]}(f) = f(0).$$

Pour ce faire, fixons un réel $x > 0$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle est continue sur le segment $[0, x]$. En particulier, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[0, x]$, et donc il existe des réels $c_x, d_x \in [0, x]$ tels que :

$$f(c_x) = \min_{[0,x]}(f) \quad \text{et} \quad f(d_x) = \max_{[0,x]}(f).$$

Comme $0 \leq c_x \leq x$ et $0 \leq d_x \leq x$ pour tout $x > 0$, il s'ensuit que c_x et d_x tendent vers 0 quand x tend vers 0^+ . Mais comme f est continue en 0, on trouve que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(c_x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(d_x) = f(0).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \min_{[0,x]}(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \max_{[0,x]}(f) = f(0).}$$

A présent, montrons que $\varphi(f)$ est continue à droite en 0^+ . D'après les calculs de la question (2)(a), on sait que, pour tout $x > 0$:

$$\left(\min_{[0,x]}(f) \right) \frac{x^6}{6} \leq \int_0^x t^5 f(t) dt \leq \left(\max_{[0,x]}(f) \right) \frac{x^6}{6}.$$

Après division par $\frac{x^6}{6}$ (ce qui est licite car $\frac{x^6}{6} > 0$), on obtient que, pour tout $x > 0$:

$$\min_{[0,x]}(f) \leq \frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 f(t) dt \leq \max_{[0,x]}(f).$$

Par définition de $\varphi(f)$, il s'ensuit que, pour tout $x > 0$:

$$\min_{[0,x]}(f) \leq \varphi(f)(x) \leq \max_{[0,x]}(f).$$

D'après ce qui précède, on obtient avec le théorème d'encadrement que :

$$\varphi(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0) = \varphi(f)(0).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi(f) \text{ est continue à droite en } 0^+}.$$

- (c) Tout d'abord, justifions que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto t^5 f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions continues. En particulier, cette dernière admet une primitive notée F , qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Dès lors, par définition de $\varphi(f)$, on voit que, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(f)(x) = \frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 f(t) dt = \frac{6(F(x) - F(0))}{x^6}.$$

En particulier, comme la fonction φ est un quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

A présent, montrons que, pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x} [f(x) - (\varphi(f))(x)].$$

Avec les notations ci-dessus, on voit que, pour tout $x > 0$:

$$\varphi(f)(x) = \frac{6(F(x) - F(0))}{x^6}.$$

Dès lors, il s'ensuit avec les règles classiques de dérivation que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} (\varphi(f))'(x) &= \left(\frac{6(F(x) - F(0))}{x^6} \right)' \\ &= \frac{(6(F(x) - F(0)))' \times x^6 - 6(F(x) - F(0)) \times 6x^5}{x^{12}} \\ &= \frac{6F'(x)x^6 - 6(F(x) - F(0)) \times 6x^5}{x^{12}} \\ &= \frac{6F'(x)}{x^6} - \frac{36(F(x) - F(0))}{x^7} \\ &= \frac{6F'(x)}{x^6} - \frac{6}{x} \varphi(f)(x). \end{aligned}$$

Mais comme F est une primitive de la fonction $t \mapsto t^5 f(t)$ sur $\mathbb{R}_+$, on voit que $F'(x) = x^5 f(x)$ pour tout $x > 0$. Dès lors, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(f))'(x) = \frac{6x^5 f(x)}{x^6} - \frac{6}{x} \varphi(f)(x) = \frac{6f(x)}{x} - \frac{6}{x} \varphi(f)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x} [f(x) - (\varphi(f))(x)]}.$$

- (3) (a) Montrons que φ est un endomorphisme de E . Tout d'abord, on voit avec les questions (2)(b) et (2)(c) que, pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $\varphi(f)$ est continue en 0^+ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, la fonction $\varphi(f)$ est continue en 0^+ et sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui entraîne que $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, et donc φ envoie tout élément de E sur un élément de E . Reste à montrer que φ est linéaire. Pour ce faire, considérons deux fonctions f_1, f_2 continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, et soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Par définition, on voit que :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) \\ &= \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) \\ &= \lambda_1 \varphi(f_1)(0) + \lambda_2 \varphi(f_2)(0). \end{aligned}$$

De plus, on trouve par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) dt \\
 &= \frac{6}{x^6} \left[\lambda_1 \int_0^x t^5 f_1(t) dt + \lambda_2 \int_0^x t^5 f_2(t) dt \right] \\
 &= \lambda_1 \left[\frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 f_1(t) dt \right] + \lambda_2 \left[\frac{6}{x^6} \int_0^x t^5 f_2(t) dt \right] \\
 &= \lambda_1 \varphi(f_1)(x) + \lambda_2 \varphi(f_2)(x).
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, on vient de montrer que $\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \varphi(f_1)(x) + \lambda_2 \varphi(f_2)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, ce qui entraîne que $\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2)$, et donc φ est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

φ est un endomorphisme de E .

- (b) Justifions que $\ker(\varphi)$ ne contient que la fonction nulle. Pour ce faire, considérons un élément f de E tel que $\varphi(f)$ soit la fonction nulle, c'est-à-dire tel que $\varphi(f)(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$. Alors on voit tout d'abord que $\varphi(f)(0) = f(0) = 0$ par définition. De plus, comme $\varphi(f)$ est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$, sa dérivée est aussi nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui entraîne avec la question (2)(c) que, pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(f))'(x) = 0 = \frac{6}{x} [f(x) - (\varphi(f))(x)] = \frac{6}{x} [f(x) - 0].$$

En particulier, on trouve que $\frac{6}{x} f(x) = 0$ pour tout $x > 0$, et donc $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Mais comme $f(0) = 0$, il s'ensuit que f est la fonction nulle, et donc :

$\ker(\varphi)$ ne contient que la fonction nulle.

En particulier, on en déduit que :

φ est injective.

- (4) Soient λ un réel non nul et g une fonction non nulle de E tels que $\varphi(g) = \lambda g$.

- (a) Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{6(1-\lambda)}{\lambda} g(x) = xg'(x).$$

D'après la question (2)(c), on sait que, pour tout $f \in E$, la fonction $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(f))'(x) = \frac{6}{x} [f(x) - (\varphi(f))(x)].$$

Si l'on pose $f = g$, alors on voit que $\varphi(g)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$:

$$(\varphi(g))'(x) = \frac{6}{x} [g(x) - (\varphi(g))(x)].$$

Comme $\varphi(g) = \lambda g$, on voit que $g = \frac{1}{\lambda} \varphi(g)$, et donc la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme multiple d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on obtient par dérivation que $(\varphi(g))' = \lambda g'$, ce qui entraîne que, pour tout $x > 0$:

$$\lambda g'(x) = \frac{6}{x} [g(x) - \lambda g(x)].$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{6(1-\lambda)}{\lambda} g(x) = xg'(x)$.

- (b) Pour tout $x > 0$, on pose : $u(x) = x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x)$.

- (i) Montrons que la fonction u est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, on sait que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Dès lors, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit

de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après la question précédente, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
 u'(x) &= \left(x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x) \right)' \\
 &= \frac{6(\lambda-1)}{\lambda} x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}-1} g(x) + x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g'(x) \\
 &= x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}-1} \left[\frac{6(\lambda-1)}{\lambda} g(x) + x g'(x) \right] \\
 &= x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}-1} \left[\frac{6(\lambda-1)}{\lambda} g(x) + \frac{6(1-\lambda)}{\lambda} g(x) \right] \\
 &= x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}-1} g(x) \frac{6(\lambda-1) + 6(1-\lambda)}{\lambda} = 0.
 \end{aligned}$$

En particulier, la fonction u' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui entraîne que :

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

(ii) Montrons que, pour tout $x > 0$, on a :

$$g(x) = g(1).x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}}.$$

D'après la question précédente, on sait que la fonction $u : x \mapsto x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x)$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, on voit que, pour tout $x > 0$:

$$u(x) = x^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(x) = u(1) = 1^{\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}} g(1) = g(1).$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x > 0$:

$$g(x) = g(1).x^{-\frac{6(\lambda-1)}{\lambda}}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{g(x) = g(1).x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}}}.$$

(iii) Montrons que λ appartient à $]0, 1]$. Comme la fonction g est non nulle et continue à droite en 0 (puisque $g \in E$), on voit que :

$$\frac{6(1-\lambda)}{\lambda} \geq 0.$$

Comme $\lambda \neq 0$, on obtient en multipliant cette inégalité par λ^2 (qui est > 0) que :

$$\lambda^2 \times \frac{6(1-\lambda)}{\lambda} = 6(1-\lambda)\lambda \geq 0.$$

Comme le trinôme $6(1-\lambda)\lambda$ a pour racines 0 et 1 et que son coefficient dominant est égal à -6 , ce trinôme est positif entre ses racines et négatif en dehors. Dès lors, il s'ensuit que λ appartient à $[0, 1]$. Mais comme $\lambda \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que :

$$\boxed{\lambda \in]0, 1]}.$$

(5) Application : déterminons tout d'abord $\ker(\varphi - \frac{1}{3}\text{Id}_E)$. Par définition, $\ker(\varphi - \frac{1}{3}\text{Id}_E)$ est l'ensemble des éléments g de E tels que $\varphi(g) - \frac{1}{3}g = 0$, c'est-à-dire tels que $\varphi(g) = \frac{1}{3}g$. D'après la question (4)(b)(ii), une telle fonction g (s'il en existe une non nulle) doit être donnée pour tout $x > 0$ par :

$$g(x) = g(1).x^{\frac{6(1-\lambda)}{\lambda}} = g(1).x^{12}.$$

En d'autres termes, tout élément g de $\ker(\varphi - \frac{1}{3}\text{Id}_E)$ doit être (avec les notations de la question (1)) de la forme $g = \mu h_{12}$, où $\mu \in \mathbb{R}$. Réciproquement, on voit que toute fonction de la forme μh_{12} , avec $\mu \in \mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que, d'après la question (1) :

$$\varphi(g) = \varphi(\mu h_{12}) = \mu \varphi(h_{12}) = \mu \frac{6}{6+12} h_{12} = \frac{\mu}{3} h_{12} = \frac{1}{3} g.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\ker \left(\varphi - \frac{1}{3} \text{Id}_E \right) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(h_{12}).$$

A présent, déterminons $\ker(\varphi - 2\text{Id}_E)$. Par définition, $\ker(\varphi - 2\text{Id}_E)$ est l'ensemble des éléments g de E tels que $\varphi(g) - 2g = 0$, c'est-à-dire tels que $\varphi(g) = 2g$. Or on sait d'après la question précédente que, si une telle fonction g non nulle existait, alors 2 devrait appartenir à l'intervalle $]0, 1]$, ce qui est impossible. En d'autres termes, seule la fonction nulle appartient à $\ker(\varphi - 2\text{Id}_E)$, et donc :

$$\ker(\varphi - 2\text{Id}_E) = \{0\}.$$

Corrigé de l'exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$ et soit f un endomorphisme de E . On dit que g est un *pseudo-inverse* de f si g est un endomorphisme de E vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (i) $f \circ g \circ f = f$.
- (ii) $g \circ f \circ g = g$.
- (iii) $f \circ g = g \circ f$.

- (1) (a) On suppose que f est un automorphisme de E . Montrons que f admet un unique pseudo-inverse. Tout d'abord, on peut remarquer que, comme f est un automorphisme de E , l'endomorphisme f admet une bijection réciproque f^{-1} qui est aussi un automorphisme de E , et de plus :

$$\begin{cases} f \circ f^{-1} \circ f &= \text{Id}_E \circ f &= f \\ f^{-1} \circ f \circ f^{-1} &= \text{Id}_E \circ f^{-1} &= f^{-1} \\ f^{-1} \circ f &= f \circ f^{-1} &= \text{Id}_E \end{cases}.$$

Donc f^{-1} est un pseudo-inverse de f , et f admet bien un pseudo-inverse. Par ailleurs, si g est un pseudo-inverse de f , alors on obtient avec la relation (i) que :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ g \circ f \circ f^{-1} = \text{Id}_E \circ g \circ \text{Id}_E = g,$$

et donc $g = f^{-1}$. En particulier, on voit que f admet un unique pseudo-inverse g , à savoir $g = f^{-1}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{si } f \text{ est un automorphisme de } E, \text{ alors } f \text{ admet un unique pseudo-inverse.}$$

- (b) On suppose que f est un projecteur de E . Proposons un pseudo-inverse de f . Comme f est un projecteur de E , on sait que $f^2 = f \circ f = f$. Dès lors, si l'on pose $g = f$, on constate que :

$$\begin{cases} f \circ g \circ f &= f \circ f \circ f &= f \circ f &= f \\ g \circ f \circ g &= f \circ f \circ f &= f &= g \\ f \circ g &= g \circ f &= f \circ f &= f \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{si } f \text{ est un projecteur de } E, \text{ alors } f \text{ est un pseudo-inverse de } f.$$

- (2) Montrons que, pour tous endomorphismes u, v de E , on a : $\text{rg}(u \circ v) \leq \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v)\}$. Pour ce faire, considérons deux endomorphismes u, v de E . Tout d'abord, on peut remarquer que $\mathfrak{Im}(u \circ v) \subset \mathfrak{Im}(u)$. En effet, si y est un élément de $\mathfrak{Im}(u \circ v)$, alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = u \circ v(x) = u(v(x))$. Si l'on pose $z = v(x)$, on voit que $y = u(z)$, et donc y appartient à $\mathfrak{Im}(u)$, d'où l'inclusion recherchée. En passant aux dimensions, on trouve que :

$$\text{rg}(u \circ v) = \dim \mathfrak{Im}(u \circ v) \leq \dim \mathfrak{Im}(u) = \text{rg}(u).$$

et donc $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg}(u)$. En outre, on constate que $\ker(v) \subset \ker(u \circ v)$. En effet, si x est un élément de $\ker(v)$, alors on sait que $v(x) = 0$, ce qui entraîne que $u \circ v(x) = u(v(x)) = 0$ (car u est linéaire), et donc $x \in \ker(u \circ v)$, d'où l'inclusion recherchée. En passant aux dimensions, on trouve que :

$$\dim \ker(v) \leq \dim \ker(u \circ v).$$

D'après le théorème du rang, il s'ensuit que :

$$\text{rg}(u \circ v) = \dim E - \dim \ker(u \circ v) \leq \dim E - \dim \ker(v) = \text{rg}(v),$$

et donc $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg}(v)$. Mais comme $\text{rg}(u \circ v)$ est inférieur ou égal à $\text{rg}(u)$ et à $\text{rg}(v)$, il est inférieur ou égal au plus petit des deux. Par conséquent, on en déduit que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{rg}(u \circ v) \leq \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v)\}.$$

- (3) Dans cette question, on suppose que g est un endomorphisme de E vérifiant la propriété (i).

- (a) Montrons que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont des projecteurs de E . En composant l'égalité (i) à droite et à gauche par g , on trouve que :

$$\begin{cases} (f \circ g)^2 &= f \circ g \circ f \circ g = f \circ g \\ (g \circ f)^2 &= g \circ f \circ g \circ f = g \circ f \end{cases}.$$

Comme de plus f et g sont des endomorphismes de E , on obtient par composition que les applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des endomorphismes de E . Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ sont des projecteurs de } E.}$$

- (b) Comparons les rangs de f , $f \circ g$ et $g \circ f$. D'après la question (2) et la relation (i), on voit que :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g \circ f) = \text{rg}((f \circ g) \circ f) \leq \text{rg}(f \circ g),$$

et donc $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(f \circ g)$. Toujours d'après la question (2), on trouve que :

$$\text{rg}(f \circ g) \leq \text{rg}(f).$$

Dès lors, il s'ensuit que $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(f)$. En procédant de même, on obtient avec la question (2) et la relation (i) que :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g \circ f) = \text{rg}(f \circ (g \circ f)) \leq \text{rg}(g \circ f),$$

et donc $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(g \circ f)$. Toujours d'après la question (2), on trouve que :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f).$$

Dès lors, il s'ensuit que $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g) = \text{rg}(g \circ f).}$$

- (c) Montrons que $f \circ g$ est un projecteur sur $\mathcal{Im}(f)$ parallèlement à un sous-espace vectoriel F inclus dans $\ker(g)$. Tout d'abord, on peut remarquer que $\mathcal{Im}(f \circ g) \subset \mathcal{Im}(f)$. En effet, si y est un élément de $\mathcal{Im}(f \circ g)$, alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que $y = f \circ g(x) = f(g(x))$. Si l'on pose $z = g(x)$, on voit que $y = f(z)$, et donc y appartient à $\mathcal{Im}(f)$, d'où l'inclusion recherchée. De plus, on sait d'après la question précédente que :

$$\dim \mathcal{Im}(f) = \text{rg}(f) = \text{rg}(f \circ g) = \dim \mathcal{Im}(f \circ g).$$

Dès lors, on obtient avec l'inclusion $\mathcal{Im}(f \circ g) \subset \mathcal{Im}(f)$ que :

$$\mathcal{Im}(f \circ g) = \mathcal{Im}(f).$$

De plus, comme $f \circ g$ est un projecteur de E d'après la question (3)(a), il s'ensuit que $f \circ g$ est un projecteur sur $\mathcal{Im}(f \circ g) = \mathcal{Im}(f)$ parallèlement à $F = \ker(f \circ g)$. En outre, on constate que $\ker(g) \subset F$. En effet, si x est un élément de $\ker(g)$, alors on sait que $g(x) = 0$, ce qui entraîne que $f \circ g(x) = f(g(x)) = 0$ (car f est linéaire), et donc $x \in \ker(f \circ g) = F$, d'où l'inclusion recherchée. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \circ g \text{ est un projecteur sur } \mathcal{Im}(f) \text{ parallèlement à un sous-espace vectoriel } F \text{ contenant } \ker(g).}$$

- (4) Dans cette question, on suppose que g et h sont deux pseudo-inverses de f .

- (a) Montrons que $f \circ h = g \circ f$. En composant la relation (i) à droite par h , on obtient que :

$$f \circ h = (f \circ g \circ f) \circ h = (f \circ g) \circ (f \circ h).$$

Comme g et h sont des pseudo-inverses de f , ils commutent tous deux avec f d'après la relation (iii), ce qui entraîne que :

$$(g \circ f) \circ (h \circ f) = (f \circ g) \circ (f \circ h) = f \circ h.$$

Dès lors, il s'ensuit avec la relation (i) et l'égalité ci-dessus que :

$$g \circ f = g \circ (f \circ h \circ f) = (g \circ f) \circ (h \circ f) = f \circ h.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g \circ f = f \circ h.}$$

- (b) Montrons que $g = h$. En composant l'égalité de la question précédente à droite par g , on obtient avec la relation (ii) que :

$$f \circ h \circ g = (f \circ h) \circ g = (g \circ f) \circ g = g \circ f \circ g = g. \quad (*)$$

Comme f et h commutent d'après la relation (ii), on trouve avec l'égalité (*) que :

$$h \circ (f \circ g) = h \circ f \circ g = f \circ h \circ g = g. \quad (**)$$

Comme $g \circ f = f \circ h$ d'après la question précédente et que f et g commutent d'après la relation (iii), il s'ensuit avec l'égalité (**) que :

$$g = h \circ (f \circ g) = h \circ (g \circ f) = h \circ (f \circ h) = h \circ f \circ h = h.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{g = h.}$$

- (5) Dans cette question, on suppose que f admet comme pseudo-inverse g .

- (a) Montrons que $\mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{Im}(f)$ et $\ker(g) = \ker(f)$. D'après le raisonnement de la question (2), on sait que $\mathfrak{Im}(u \circ v) \subset \mathfrak{Im}(v)$ pour tous endomorphismes u, v de E . Dès lors, on obtient avec les propriétés (ii) et (iii) que :

$$\mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{Im}(g \circ f \circ g) \subset \mathfrak{Im}(g \circ f) = \mathfrak{Im}(f \circ g) \subset \mathfrak{Im}(f).$$

De même, on trouve avec les propriétés (i) et (iii) que :

$$\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Im}(f \circ g \circ f) \subset \mathfrak{Im}(f \circ g) = \mathfrak{Im}(g \circ f) \subset \mathfrak{Im}(g).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{Im}(f).}$$

En outre, on constate que $\ker(f) \subset \ker(g)$. En effet, si $x \in \ker(f)$, on voit que $f(x) = 0$. Comme $g = g \circ f \circ g$ et $g \circ f = f \circ g$ d'après les propriétés (ii) et (iii), on obtient par linéarité de g que :

$$g(x) = g \circ f \circ g(x) = g \circ g \circ f(x) = g \circ g(0) = 0.$$

En particulier, on trouve que x appartient à $\ker(g)$, et donc $\ker(f) \subset \ker(g)$. Comme on a l'égalité $\mathfrak{Im}(g) = \mathfrak{Im}(f)$ d'après ce qui précède, on obtient avec le théorème du rang que :

$$\dim \ker(g) = \dim E - \dim \mathfrak{Im}(g) = \dim E - \dim \mathfrak{Im}(f) = \dim \ker(f).$$

Comme $\ker(f) \subset \ker(g)$, on en déduit que :

$$\boxed{\ker(g) = \ker(f).}$$

- (b) Montrons que $\mathfrak{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont supplémentaires dans E . D'après le théorème du rang, on sait que $\dim \ker(f) + \dim \mathfrak{Im}(f) = \dim E$. Dès lors, pour montrer que $E = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f)$, il suffit de vérifier que $\ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f) = \{0\}$. Pour ce faire, considérons un élément x de $\ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f)$. Comme $\mathfrak{Im}(f) = \mathfrak{Im}(g)$ d'après la question précédente, on voit que x appartient à $\mathfrak{Im}(g)$, et donc il existe un vecteur $y \in E$ tel que $x = g(y)$. Dès lors, comme x appartient aussi à $\ker(f)$, on obtient que :

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = 0.$$

En composant la relation ci-dessus à gauche par g , on trouve par linéarité de g et d'après la propriété (ii) que :

$$x = g(y) = (g \circ f \circ g)(y) = g(f \circ g(y)) = g(0) = 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que $x = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f)$, ceci entraîne que $\ker(f) \cap \mathfrak{Im}(f) = \{0\}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f).}$$

Corrigé du problème 1. Pour tous entiers $p, n \geq 1$, on pose :

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad a_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + \dots + u_n.$$

Partie I : étude de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

(1) Montrons que, pour tout entier $p \geq 1$, on a :

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante, on voit que $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$ pour tout $t \in [p, p+1]$. Dès lors, on obtient par croissance de l'intégrale que, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{p} dt.$$

En particulier, on trouve après simplification que, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

Dès lors, on obtient par des calculs simples que, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \geq \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{p}.$$

Mais par définition de u_p , on en déduit que, pour tout entier $p \geq 1$:

$$\boxed{\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \geq u_p \geq 0.}$$

(2) Montrons tout d'abord que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \sum_{k=1}^n u_k = u_{n+1}.$$

Comme (u_n) est une suite positive d'après la question (1), il s'ensuit que $a_{n+1} - a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n \geq 1} \text{ est croissante.}}$$

A présent, montrons que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel noté γ tel que $0 \leq \gamma \leq 1$. D'après la question (1), on sait que, pour tout $k \geq 1$:

$$0 \leq u_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Par sommation sur k , on obtient que, pour tout $p \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^p u_k \leq \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Par télescopage, on trouve que, pour tout $p \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{k=1}^p u_k \leq \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{p+1}.$$

Dès lors, il s'ensuit par définition de a_p que, pour tout $p \geq 1$:

$$0 \leq a_p \leq 1 - \frac{1}{p+1} \leq 1.$$

En particulier, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est majorée par 1. Mais comme cette suite est croissante, le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge vers un réel noté γ . De plus, partant du fait que $0 \leq a_p \leq 1$ pour tout $p \geq 1$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans cet encadrement que $0 \leq \gamma \leq 1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers un réel } \gamma \text{ tel que } 0 \leq \gamma \leq 1.}$$

Partie II : expression intégrale du réel γ

(1) (a) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 + x \leq e^x$. Pour ce faire, considérons la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$. Il est facile de voir que f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et que de plus on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x - 1.$$

En particulier, on voit que $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $e^x \geq 1$, c'est-à-dire si $x \geq 0$. Dès lors, la fonction f est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $[0, +\infty[$, et donc elle admet un minimum

en 0, qui vaut $f(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$. Par conséquent, la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, d'où l'on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{1 + x \leq e^x.}$$

(b) Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Tout d'abord, si l'on pose $x = \frac{t}{n}$ dans l'inégalité de la question précédente, on trouve que :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq e^{\frac{t}{n}}.$$

Comme $t \in [0, n]$, on voit que $1 + \frac{t}{n} > 0$, ce qui nous donne en passant aux puissances que :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^n = e^t.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\boxed{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t.}$$

A présent, si l'on pose $x = -\frac{t}{n}$ dans l'inégalité de la question précédente, on trouve que :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq e^{-\frac{t}{n}}.$$

Comme $t \in [0, n]$, on voit que $1 - \frac{t}{n} \geq 0$, ce qui nous donne en passant aux puissances que :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n = e^{-t}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\boxed{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

(c) Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Tout d'abord, on sait déjà d'après la question précédente que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}. \quad (*)$$

Comme $1 - \frac{t^2}{n^2} = \left(1 - \frac{t}{n}\right)\left(1 + \frac{t}{n}\right)$, on obtient avec la question précédente que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t e^{-t} = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n. \quad (**)$$

En réunissant les inégalités (*) et (**), on en déduit que, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\boxed{\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

(2) (a) Etablissons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$\mathcal{P}(n) : " \forall x \in [0, 1], (1 - x)^n + nx - 1 \geq 0."$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, car pour tout $x \in [0, 1]$:

$$(1 - x)^1 + 1 \times x - 1 = 1 - x + x - 1 = 0 \geq 0.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait déjà que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$(1 - x)^n + nx - 1 \geq 0. \quad (*)$$

Comme $x \in [0, 1]$, on voit que $(1 - x) \geq 0$, ce qui nous donne par produit avec (*) que :

$$(1 - x) [(1 - x)^n + nx - 1] \geq 0.$$

En développant cette inégalité, on obtient après simplification que :

$$(1 - x)^{n+1} + (n + 1)x - 1 - nx^2 \geq 0,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(1 - x)^{n+1} + (n + 1)x - 1 \geq nx^2.$$

Comme $nx^2 \geq 0$, il s'ensuit que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$(1 - x)^{n+1} + (n + 1)x - 1 \geq 0,$$

et donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui nous permet d'écrire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$\boxed{(1 - x)^n + nx - 1 \geq 0.}$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, n]$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

Tout d'abord, d'après la question (1)(c) de la partie II, on sait déjà que $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$, ce qui entraîne par différence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, n]$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n. \quad (*)$$

D'après la question (1)(c), on sait aussi que $\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$, ce qui nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, n]$:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}. \quad (**)$$

Comme $t \in [0, n]$, on voit que $\frac{t^2}{n^2}$ appartient à $[0, 1]$, ce qui entraîne avec la question (2)(a) que :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n + n \times \frac{t^2}{n^2} - 1 = \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n + \frac{t^2}{n} - 1 \geq 0,$$

cette inégalité pouvant se réécrire sous la forme :

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}.$$

En multipliant cette relation par e^{-t} (qui est > 0), on trouve que :

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}. \quad (***)$$

En mettant bout à bout les inégalités (**) et (***), on obtient que :

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, n]$:

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}. \quad (****)$$

Par conséquent, en mettant bout à bout les inégalités (*) et (****), on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [0, n]$:

$$\boxed{0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.}$$

(3) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

- (a) Justifions l'existence de I_n pour tout $n \geq 1$. Tout d'abord, on voit que la fonction à intégrer est continue sur $]0, n]$ comme différence et quotient de fonctions continues sur $]0, n]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, n]$. Dès lors, l'intégrale I_n est impropre en 0. De plus, d'après la question précédente, on sait que, pour tout $t \in]0, n]$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

Après division par t , on obtient que, pour tout $t \in]0, n]$:

$$0 \leq \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) \leq \frac{t}{n} e^{-t}.$$

Comme l'intégrale $\int_0^n \frac{t}{n} e^{-t} dt$ converge (vu que $t \mapsto \frac{t}{n} e^{-t}$ est continue sur $[0, n]$), le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives entraîne que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ converge pour tout } n \geq 1.}$$

- (b) Établissons que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $t \in]0, n]$:

$$0 \leq \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) \leq \frac{t}{n} e^{-t}.$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt \leq \int_0^n \frac{t}{n} e^{-t} dt.$$

Par définition de I_n et linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt.$$

Par des calculs simples, on vérifie facilement que $t \mapsto -(t+1)e^{-t}$ est dérivable, avec pour dérivée la fonction $t \mapsto t e^{-t}$ (à noter qu'on pourrait aussi trouver ce résultat par intégration par parties). Dès lors, on obtient par des calculs simples que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt = \frac{1}{n} [-(t+1)e^{-t}]_0^n = \frac{1}{n} [-(n+1)e^{-n} + 1].$$

En d'autres termes, on vient de trouver l'encadrement suivant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-n}.$$

Comme le terme de droite de cet encadrement tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, le théorème d'encadrement entraîne que :

$$\boxed{I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

- (4) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

- (a) Établissons pour tout entier $n \geq 1$ la relation :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n (a_n + \ln(n+1)).$$

Pour ce faire, on pose $u = 1 - \frac{t}{n}$. Alors la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, n]$, et de plus $du = -\frac{1}{n}dt$, $u = 1$ si $t = 0$ et $u = 0$ si $t = n$. Par changement de variable et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_1^0 -nu^k du \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} -n \int_1^0 u^k du \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} -n \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_1^0 \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} -n \left[0 - \frac{1^{k+1}}{k+1} \right] \\
 &= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right).
 \end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $l = k + 1$, puis en utilisant la linéarité de la somme et la relation de Chasles ainsi que la définition de u_l et de a_n , on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt &= n \left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{l} \right) \\
 &= n \left(\sum_{l=1}^n \left[\frac{1}{l} - \int_l^{l+1} \frac{dt}{t} + \int_l^{l+1} \frac{dt}{t} \right] \right) \\
 &= n \left(\sum_{l=1}^n \left[u_l + \int_l^{l+1} \frac{dt}{t} \right] \right) \\
 &= n \left(\sum_{l=1}^n u_l + \sum_{l=1}^n \int_l^{l+1} \frac{dt}{t} \right) \\
 &= n \left(a_n + \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \right) \\
 &= n (a_n + \ln(n+1) - \ln(1)).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n (a_n + \ln(n+1)).}$$

(b) Justifions tout d'abord l'existence de J_n . D'après la formule du binôme, on trouve que :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1)^{n-k} \left(-\frac{t}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{t}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{t}{n}\right)^k.$$

Dès lors, il s'ensuit par des calculs simples que, pour tout $t \in]0, n]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) &= \frac{1}{t} \left(1 - 1 - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{t}{n} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{t} \left(- \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{t}{n} \right)^k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{t^{k-1}}{n^k}. \end{aligned}$$

En particulier, on voit que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right)$ est un polynôme sur $]0, n]$, et donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge.}}$$

A présent, montrons que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

Partant de la question précédente, en utilisant les propriétés des suites géométriques et la linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} n(a_n + \ln(n+1)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n} \right)^k dt \\ &= \int_0^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{t}{n} \right)^k dt \\ &= \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^{n-1+1}}{1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)} dt \\ &= \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n}{\frac{t}{n}} dt \\ &= \int_0^n n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n}{t} dt \\ &= n \int_0^n \frac{1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n}{t} dt. \end{aligned}$$

Par définition de J_n , il s'ensuit que $n(a_n + \ln(n+1)) = nJ_n$ pour tout $n \geq 1$, et donc :

$$\boxed{J_n = a_n + \ln(n+1).}$$

(5) On considère les intégrales :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- (a) Justifions tout d'abord l'existence de U . Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$ est définie et continue sur $]0, 1]$ comme différence et quotient de fonctions continues sur $]0, 1]$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1]$. Dès lors, l'intégrale U présente une impropriété en 0. De plus, comme $e^x = 1 + x + o(x)$ au voisinage de 0, on obtient par substitution en posant $y = -x$ (vu que y tend vers 0 quand x tend vers 0) que :

$$e^{-x} = 1 - x + o(x).$$

Dès lors, il s'ensuit qu'au voisinage de 0 :

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - (1 - x + o(x))}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - 1 + x + o(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + o(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1).$$

En particulier, on voit que la fonction $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0, et donc cette fonction est prolongeable par continuité en 0. En d'autres termes, l'intégrale U est faussement impropre en 0, d'où l'on déduit que :

l'intégrale U converge.

A présent, justifions l'existence de V . Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues sur $[1, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. Dès lors, l'intégrale V présente une impropreté en $+\infty$. De plus, comme l'intégrale exponentielle $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge d'après le cours, on voit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge aussi. Mais comme $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$, le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives entraîne que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge. Par conséquent, on en déduit que :

l'intégrale V converge.

- (b) Démontrons que : $\gamma = U - V$. D'après les questions précédentes, par linéarité de l'intégrale et d'après la relation de Chasles, on trouve que, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 J_n - I_n &= \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt - \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt \\
 &= \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n - e^{-t} + \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt \\
 &= \int_0^n \frac{1}{t} (1 - e^{-t}) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{t} (1 - e^{-t}) dt + \int_1^n \frac{1}{t} (1 - e^{-t}) dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_1^n \frac{dt}{t} - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \ln(n) - \ln(1) - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \ln(n) - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt.
 \end{aligned}$$

Comme $J_n = a_n + \ln(n+1)$ pour tout $n \geq 1$ d'après la question (4)(b), on a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 J_n - I_n &= \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \ln(n) - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \\
 &= U + \ln(n) - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \\
 &= a_n + \ln(n+1) - I_n.
 \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 a_n &= I_n - \ln(n+1) + U + \ln(n) - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \\
 &= I_n - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt \\
 &= I_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Comme l'intégrale $V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge d'après la question précédente, on voit que l'expression $\int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt$ tend vers V quand n tend vers $+\infty$. Dès lors, comme la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers γ

d'après la question (2) de la partie I et que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 d'après la question (3)(b) de la partie II, il s'ensuit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans (*) que :

$$\gamma = 0 - 0 + U - V.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\gamma = U - V.}$$