Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 6 : 3 novembre 2025)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. *Petite innovation cette année : il y a quelques révisions en Python.* Le programme portera sur les applications linéaires et matrices, ainsi que sur les espaces probabilisés et sur des révisions de base en Python, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Applications linéaires et matrices (révisions et compléments):**
Définition et propriétés d'une application linéaire $f : E \longrightarrow F$.
Définition et propriétés du noyau et et de l'image d'une application linéaire.
Définition et propriétés du rang d'une application linéaire.
Méthode pratique de calcul du rang - Théorème du rang.
Opérations sur les applications linéaires (somme, produit par un scalaire, composition).
Savoir montrer que : $f \circ g = 0$ si et seulement si $\mathfrak{Im}(g) \subset \ker(f)$ (*).
Endomorphismes commutants - Formule du binôme.
Applications linéaires bijectives, isomorphismes.
"La bijection réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire ".
"Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire bijective, alors $\dim E = \dim F$ ".
"Si $\dim E = \dim F$, alors f est injective ssi elle est bijective ssi elle est surjective ".
Définition et propriétés de base des projecteurs et des symétries.
Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.
Définition de l'application linéaire canoniquement associée à une matrice.
Correspondance entre opérations sur les applications linéaires et sur les matrices.
Correspondance entre isomorphismes et matrices inversibles.
Définition et propriétés du rang d'une matrice.
"Le rang d'une application linéaire est égal à celui de sa matrice dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ".
"Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si son rang est égal à n ".
Définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base $\mathcal{B}$.
Définition de la matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$.
Formules de changement de base pour les vecteurs et pour les endomorphismes.
Définition et propriétés de base des matrices semblables.
Définition de la trace d'une matrice carrée - Linéarité de la trace (*).
Formules "$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ " (*) et "$\mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(A)$ " (*).
"Deux matrices semblables ont même trace ".

(2) **Espaces probabilisés (révisions):**
Définitions et propriétés d'un univers et d'un ensemble d'événements.
Définition d'un espace probabilisable - Notion de système complet d'événements.
Définitions et propriétés de base des probabilités et des espaces probabilisés.
Formule du crible de Poincaré pour $n = 2$ et $n = 3$.
Probabilité uniforme/équiprobabilité - Propriété de limite monotone et conséquences.
Définition et propriétés des probabilités conditionnelles.
Formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.
Indépendance de deux événements - Indépendance (mutuelle) d'événements.

(3) **Programmation de base en Python (révisions):**
Utilisation des commandes de base de la bibliothèque `numpy`.
Savoir écrire une boucle `for`, une boucle `while` et un test `if`.
Savoir écrire une fonction avec la commande `def` (pas de tracé de courbe pour l'instant).
Savoir écrire une fonction récursive pour calculer le terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Donner la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$, et ce dans l'un des cas suivants :

(1) $E = \mathbb{R}^2$, $f : (x, y) \longmapsto (x + 3y, 2x + y)$, $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2))$.
(2) $E = \mathbb{R}_n[x]$, $f : P \longmapsto P - P'$, $\mathcal{B} =$base canonique.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par H_n l'ensemble des matrices carrées de taille n et de trace nulle. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

Exercice 4. On dispose de 10 pièces de monnaie numérotées de 1 à 10, telles que la k-ème pièce amène "pile" avec la probabilité $\frac{k}{10}$. On prend une pièce au hasard, on la lance et on obtient "face". Quelle est la probabilité d'avoir choisi la 5-ème pièce?

Exercice 5. On considère une infinité d'urnes. On suppose que, pour tout $k \geq 1$, l'urne $n^o k$ contient 2^k boules dont une seule blanche et les autres noires, et que la probabilité de choisir la k-ème urne est égale à $\frac{1}{2^k}$. On choisit au hasard une urne, puis on en tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

Exercice 6. A l'aide d'une boucle `for`, écrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, calcule la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 7. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par les conditions $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{4} u_n$. Ecrire une fonction récursive en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule la valeur de u_n.