

Devoir Maison de Mathématiques n°3 :
Espaces probabilisés - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Ecrire une fonction en Python qui, étant donnée une liste $U = (u_1, \dots, u_n)$ de réels de longueur $n > 0$ quelconque, construit et affiche la liste $V = (v_1, \dots, v_n)$ de réels telle que $v_k = \max\{u_1, \dots, u_k\}$ pour tout $k \geq 1$. Par exemple, si $U = (2, 1, 5, 6, 4)$, la fonction retournera le vecteur $V = (2, 2, 5, 6, 6)$.

Exercice 2. Ecrire une fonction en Python qui reçoit un entier k et un vecteur v de taille n quelconque, à coefficients entiers, puis qui donne le plus petit indice i tel que $v_i = k$ s'il en existe un, et la valeur $n + 1$ sinon.

Exercice 3. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 3$ et des réels a, b, c , construit et affiche la matrice carrée de taille n suivante :

$$M = \begin{pmatrix} c & b & \dots & \dots & b \\ a & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & \dots & a & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Dans tout l'exercice, on désigne par X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on admet le résultat suivant, connu sous le nom d'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* : Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

(1) Une première inégalité (*).

(a) Montrer que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

(b) En déduire l'inégalité (*) : $P(|X - \lambda| \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

(2) Première amélioration de l'inégalité (*).

(a) Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs positives et admettant une espérance, et posons $Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots\}$. Montrer, en minorant $E(Y)$, que, pour tout $a > 0$:

$$P([Y \geq a]) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

(b) Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance nulle et de variance σ^2 . Montrer que, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq P([(Z+x)^2 \geq (a+x)^2]).$$

(c) En appliquant l'inégalité obtenue en (2)(a) à la variable aléatoire $(Z+x)^2$, montrer que, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$

(d) Etudier la fonction f qui à tout $x \in \mathbb{R}_+$, associe $\frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$, et en déduire que, pour tout $a > 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

(e) Utiliser cette dernière inégalité pour montrer que : $P([X \geq 2\lambda]) \leq \frac{1}{\lambda + 1}$.

(3) Deuxième amélioration de l'inégalité (*). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k$.

(a) Justifier l'existence de $G_X(t)$ et montrer que : $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in [1, +\infty[$ et pour tout $a > 0$, on a : $P([X \geq a]) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$.

(c) Déterminer le minimum sur $[1, +\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}$.

(d) En déduire l'inégalité suivante : $P([X \geq 2\lambda]) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.

- (4) Montrer que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question (2)(e) dès que λ prend des valeurs assez grandes.

Problème 1. Dans tout le problème, on désigne par a, b des entiers naturels tous deux non nuls, et l'on pose $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au hasard et "avec remise" d'une boule selon les règles suivantes :

- lorsque la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne.
- lorsque la boule tirée est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on la remplace par une boule blanche.

- (1) Soit Y le nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

(a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y .

(b) Calculer $P([Y = k])$ pour tout $k \in \{1, \dots, b + 1\}$.

(c) Vérifier que $P([Y = b + 1]) = \frac{b!}{N^b}$, puis montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, b\}$, on a :

$$P([Y = k]) = \frac{b!}{(b - (k - 1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)!N^k}.$$

(d) Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_0, \dots, a_M$ des réels. Montrer que : $\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k\right) - Ma_M$.

(e) En déduire que $E(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b - k)!N^k}$.

- (2) Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par N_n l'événement : "la n -ème boule tirée est noire", et l'on pose $q_n = P(N_n)$. De plus, pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par X_n le nombre de boules noires obtenues lors des n premiers tirages. Par convention, on pose $X_0 = 0$. Enfin, pour tous entiers $n, k \geq 0$, on désigne par $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : "on a obtenu exactement k boules noires au cours des n tirages". On pourra remarquer que $p_{0,0} = 1$, et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.

(a) Calculer $p_{n,0}$ et $p_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^n p_{n,k}$?

(b) Démontrer que, pour tous entiers $n, k > 0$, on a la formule :

$$(A) : N.p_{n,k} = (a + k)p_{n-1,k} + (b + 1 - k)p_{n-1,k-1}.$$

(c) Dans cette question, on se propose de calculer l'espérance de X_n .

(i) A l'aide de la formule (A), montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$N.E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N - 1)]p_{n-1,k}.$$

(ii) En déduire que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

(iii) En déduire l'écriture d'une fonction récursive en Python qui, étant donnés des entiers $n, N, b > 0$, calcule et affiche la valeur de $E(X_n)$.

(iv) A l'aide de la question (2)(c)(ii), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $E(X_n) = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]$.

(d) Dans cette question, on se propose de calculer q_{n+1} .

(i) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N.q_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b - k)p_{n,k}.$$

(ii) Exprimer alors q_{n+1} en fonction de $E(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) En déduire l'expression de q_{n+1} en fonction de n, b, N .

(iv) En déduire l'écriture d'une fonction en Python qui, étant donnés un entier $n \geq 0$ et des entiers $N, b > 0$, calcule et affiche la valeur de q_{n+1} .

(e) Dans cette question, on se propose de calculer la variance de X_n . Pour ce faire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = E(X_n(X_n - 1))$.

(i) A l'aide de la formule (A), montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$N.u_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k - 1)(a + b - 2) + 2(b - 1)k]p_{n-1,k}.$$

(ii) En déduire que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].$$

(iii) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

(iv) En déduire la valeur de $V(X_n)$, puis préciser sa limite quand n tend vers $+\infty$.

(v) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés un entier $n \geq 0$ et des entiers $N, b > 0$, calcule et affiche le vecteur $(u_0, u_1, \dots, u_n)$.