Lycée Clemenceau **Jeudi 6 novembre 2025**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 2$

Remarques : *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits. Tous les étudiants devront traiter les exercices d'informatique suivants et auront le choix entre deux sujets, un de type EDHEC-EML et un autre de type ESSEC. Ils indiqueront lisiblement sur leur première copie le sujet qu'ils auront choisi, et ne pourront traiter que les questions de ce sujet. Si un(e) étudiant(e) traite une question du sujet qu'il/elle n'a pas indiqué en début de copie, cette question ne sera pas corrigée.*

Exercice 1. Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et telle que, pour tout entier $k \geq 2$, on ait :

$$u_k = \frac{3u_{k-1}^2 + u_{k-2}^2}{4}.$$

Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$ entré par l'utilisateur, calcule et affiche u_n.

Exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^3}$. A l'aide d'une boucle, écrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$ entré par l'utilisateur, calcule et affiche S_n.

Exercice 3. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$ entré par l'utilisateur, calcule et retourne la valeur de $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} \sin(l)$.

1. Sujet type EDHEC-EML

Exercice 4. Dans tout l'exercice, on désigne par E un espace vectoriel de dimension n (avec $n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E. Pour tout endomorphisme f de E, on appelle trace de f le réel, noté $\mathrm{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f. On admet que l'application trace ainsi définie est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie I : préliminaires

(1) On considère un projecteur p de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
  (a) Montrer que $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$.
  (b) Etablir que $\mathfrak{Im}(p) = \ker(\mathrm{Id} - p)$.
  (c) En déduire que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{Tr}(p)$.

(2) Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que, si $E_1, ..., E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$\dim(E_1 + ... + E_k) \leq \dim(E_1) + ... + \dim(E_k).$$

Partie II : CNS (condition nécessaire et suffisante) pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit k un entier ≥ 2. On considère des projecteurs $p_1, ..., p_k$ de E, et l'on pose $q_k = p_1 + p_2 + ... + p_k$.

(1) Montrer que si, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur de E.

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

(2) (a) Montrer que $\mathfrak{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathfrak{Im}(p_1) + ... + \mathfrak{Im}(p_k)$.
  (b) Etablir à l'aide des résultats de la partie I que $\mathrm{rg}(q_k) = \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + ... + \mathfrak{Im}(p_k))$, et en déduire que $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) + ... + \mathfrak{Im}(p_k)$.
  (c) Etablir finalement l'égalité : $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) \oplus ... \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$.

(3) (a) Montrer que, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on a : $q_k \circ p_j = p_j$.

(b) En déduire que, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ et pour tout $x \in E$, on a : $\sum_{i=1,\, i\neq j}^{k} p_i(p_j(x)) = 0$.
(c) Montrer alors que, pour tout $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

(4) Conclure quant à l'objectif de cette partie.

Exercice 5. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est involutive si $M^2 = I$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dans ce qui suit, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Montrer que $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I$.
(b) En déduire que M est inversible si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.
(c) Dans le cas où $ad - bc \neq 0$, écrire M^{-1} en fonction de a, b, c, d.

(2) (a) Montrer que la matrice αI, où $\alpha \in \mathbb{R}$, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.
(b) Dans cette question, on suppose que $M \neq I$ et $M \neq -I$. Montrer que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$.

(3) Dans cette question, on suppose que $a = 5$, $b = 2$, $c = -4$, $d = -1$.
(a) Trouver un réel α tel que $M = \alpha I + B$, où B est involutive.
(b) Calculer M^n en fonction de I, B, n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(c) Montrer que M est inversible et vérifier que la formule de $(3)(b)$ est encore valable pour $n = -1$.

Problème 1.

Préliminaires

(1) (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t^n e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$ converge.
(c) En déduire que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2}\,dt$ converge.

(2) On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt$.
(a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+2} = \left(\dfrac{n+1}{2}\right) I_n$.
(b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $I_{2p+1} = 0$.
(c) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}$.

I. Calculs d'intégrales dépendant d'un paramètre

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt$ convergent.

(2) On considère à présent les fonctions S et C définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)e^{-t^2}\,dt.$$

(a) A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout $(a,\lambda) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\sin(a+\lambda) - \sin(a) - \lambda\cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0.$$

(c) En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $S' = C$.

(3) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$

(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt.$$

(c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt \quad \text{et} \quad C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,dt$$

II. Obtention d'un développement limité

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}e^{-t^2}\,dt$ converge.

(2) (a) Montrer que, pour tout $u \geq 0$, on a :

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

(b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)e^{-t^2}\,dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6.$$

(3) Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et donner ce développement limité.

III. Nature d'une série

(1) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}e^{-t^2}\,dt$ converge.

(2) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_p \leq \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

(3) En déduire que la série $\sum u_p$ converge.

2. Sujet type ESSEC

Problème 2.

Notations et objectifs :

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles. Sous réserve d'existence, on note :

$$\varphi : x \longmapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \psi : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x}{n^2 - x^2}.$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ, des expressions des fonctions sin, $\frac{1}{\sin}$, $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (On parle de développements eulériens). Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On en déduit une expression de la fonction $\frac{\cos}{\sin}$ puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\frac{1}{\sin}$. Rappelons pour terminer les égalités suivantes pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} \cos(a+b) & = & \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \text{(formule d'addition pour } \cos) \\ \sin(a+b) & = & \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & \text{(formule d'addition pour } \sin) \\ \cos(2a) & = & 2\cos^2(a) - 1 & \text{(formule de duplication d'angle pour } \cos) \\ \sin(2a) & = & 2\sin(a)\cos(a) & \text{(formule de duplication d'angle pour } \sin) \end{array}\right. .$$

(1) **Partie I : Etude de la fonction φ**

(a) Montrer que, pour tout réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.

Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction φ est donc définie sur D.

(b) Imparité et périodicité de φ :

(i) Justifier que φ est impaire.

(ii) Vérifier que, pour tout $x \in D$, on a : $\dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$.

(iii) Montrer que, pour tout $x \in D$, on a : $\varphi(x+1) = \varphi(x)$.

La fonction φ est donc périodique de période 1.

(c) Continuité de φ :

(i) Justifier, pour tout $x \in D \cup \{0,1\}$, l'existence de :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

(ii) Vérifier que : $\forall x \in D$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} - g(x)$.

(iii) Soit $h \in \left]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$. Montrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad |g(x+h) - g(x)| \leq C|h|, \quad \text{avec : } C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)\left(n - \dfrac{3}{2}\right)}.$$

(iv) En déduire que g est continue sur $[0,1]$, puis que φ est continue sur $]0,1[$.

La fonction φ est donc continue sur D.

(d) Etude de φ en 0 et en 1 :

(i) Montrer que $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(\varphi(x) - \dfrac{1}{x}\right) = 0$.

(ii) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

(2) **Partie II : Etude de l'opérateur T**

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles. De plus, T est l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0,1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, e_k l'élément de E défini par : $\forall x \in [0,1]$, $e_k(x) = x^k$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $\mathcal{B}_n = (e_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

(a) Vérifier que T est un endomorphisme de E.

(b) Etude de T sur F_n :

(i) Vérifier que : $\forall f \in F_n$, $T(f) \in F_n$.

On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall f \in F_n$, $T_n(f) = T(f)$.

(ii) Déterminer la matrice de T_n dans la base $\mathcal{B}_n$.

(c) Etude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2\mathrm{Id}_E)$:

(i) Montrer que $\ker(T - 2\mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.

Soit f un élément de $\ker(T - 2\mathrm{Id}_E)$. On note $m = \min_{x\in[0,1]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[0,1]} f(x)$. On fixe x_0 dans $[0,1]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[0,1]$ tel que $M = f(x_1)$.

(ii) Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m$.

(iii) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$.

(iv) En déduire que : $m = f(0)$.

(v) Faire une étude similaire pour M.

(vi) Montrer alors que f est constante.

(d) Etude de la fonction cot :

Pour tout $x \in D$, on note : $\cot(x) = \pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

(i) Vérifier que cot est définie et continue sur D, impaire et périodique de période 1.

(ii) Montrer que $\cot(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et que $\cot(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\pi^2 x}{3}$.

(iii) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

(iv) Démontrer que, pour tout $x \in D$, on a :

$$\frac{x}{2} \in D, \quad \frac{x+1}{2} \in D \quad \text{et} \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x).$$

(e) Calcul de φ :

(i) Vérifier que : $\forall x \in D$, $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.

(ii) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$.

(iii) Démontrer alors que $\varphi = \cot$.

Autrement dit : $\forall x \in D$, $\pi\dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$.

(f) Première application :

(i) Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - x\cot(x)}{2x^2}$.

Pour tout $x \in]0,1[$, on pose : $\delta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(ii) Vérifier que : $\left|\delta(x) - \dfrac{x^2}{1-x^2}\right| \leq x^2 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)}$.

(iii) En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(iv) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(3) **Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ et $\beta_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \alpha_k(x)$ converge. On note alors $\beta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x)$.

(b) Explicitation de β : on fixe un réel $x \in]0,1[$.

(i) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2 - t^2}\right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$.

(ii) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

(iii) Montrer que : $\left|\displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-2t}{n^2 - t^2}\right) dt\right| \leq \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$.

(iv) En déduire que : $\beta(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t}\right) dt$.

(v) Montrer alors que : $\forall x \in]0,1[$, $\beta(x) = \ln\left(\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $P_n(x) = \pi x \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.

(i) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Dans la suite on pose $P(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$ et on note : $P(x) = \pi x \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

(ii) Vérifier que, pour tout $x \in [0,1[$, on a : $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$.

(iii) Montrer que la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est en fait convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note encore $P(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n(x)$.

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in]-n, n[$. Montrer que : $P_n(x+1) = -\left(\dfrac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x)$.

(v) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x+1) = -P(x)$. Vérifier alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

(vi) Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x) = \sin(\pi x)$.

Finalement, on obtient ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi x) = \pi x \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

(4) **Partie IV : Un autre développement du sinus**

Dans cette partie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D \cup \{0\}$, on pose $\lambda_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(xt)\cos(nt)dt$ et $\nu_n(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{x}{n^2 - x^2}$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in D \cup \{0\}$, la série de terme général $\nu_n(x)$ est convergente.

La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D \cup \{0\}$, on a :

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) \nu_n(x).$$

Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$.

(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$.

(i) Vérifier que, lorsque t n'est pas de la forme $2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, on a :

$$C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Pour cela, on pourra utiliser sans la démontrer la formule trigonométrique $\sin(b)\cos(a) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$.

(ii) Expliciter $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

(iii) Donner la valeur de $I_n = \int_0^\pi C_n(t)dt$.

(d) Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi F(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt = 0$$

(e) Pour tout $x \in D$, on définit la fonction Φ_x sur $[0, \pi]$ par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(xt) - 1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si} \quad t \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}.$$

On admet que la fonction Φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

(i) Vérifier que, pour tout $t \in [0, \pi]$, on a :

$$C_n(t)(\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2}(\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2}\Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

(ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt + I_n.$$

(f) Application :

(i) Démontrer à l'aide des questions précédentes que, pour tout $x \in D$:

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

(ii) En déduire que, pour tout $x \in D$, on a : $\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} = \dfrac{1}{x} + 2x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}$.