

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques n°2

Corrigé de l'exercice 1. On considère la suite (u_k) de premier terme $u_0 = 1$, de deuxième terme $u_1 = 2$ et telle que, pour tout entier $k \geq 2$:

$$u_k = \frac{3u_{k-1}^2 + u_{k-2}^2}{4}.$$

Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche u_n . Pour ce faire, on va procéder de façon récursive, et ce comme suit :

```
import numpy as np

def suite(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 2
    else:
        return (3*(suite(n-1))**2+(suite(n-2))**2)/4
```

Corrigé de l'exercice 2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^3}$. A l'aide d'une boucle, écrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$ entré par l'utilisateur, calcule et affiche S_n . Pour ce faire, on va procéder comme suit :

```
import numpy as np

def somme2(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+((-1)**k/(k**3))
    return s
```

Corrigé de l'exercice 3. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$ entré par l'utilisateur, calcule et retourne la valeur de $T_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k \sin(l)$. Pour ce faire, on va procéder avec une double boucle **for** comme suit :

```
import numpy as np

def doublesomme(n):
    t=0
    for k in range(1,n+1):
        for l in range(1,k+1):
            t=t+np.sin(l)
    return t
```

1. SUJET TYPE EDHEC-EML

Corrigé de l'exercice 4. Dans tout l'exercice, on désigne par E un espace vectoriel de dimension n (avec $n \geq 2$), on note Id l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E . Pour tout endomorphisme f de E , on appelle trace de f le réel, noté $\text{Tr}(f)$, égal à la trace de n'importe laquelle des matrices représentant f . On admet que l'application trace ainsi définie est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Partie I : préliminaires

(1) On considère un projecteur p de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.

- (a) Montrons que : $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$. Tout d'abord, on commence par vérifier que $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ sont en somme directe. Pour ce faire considérons un vecteur $x \in \ker(p) \cap \mathfrak{Im}(p)$. Alors, on voit que $p(x) = 0$ et qu'il existe un vecteur z de E tel que $x = p(z)$. Comme $p \circ p = p$, ceci entraîne que :

$$0 = p(x) = p \circ p(z) = p(z) = x,$$

et donc $x = 0$. En particulier, on a $\ker(p) \cap \mathfrak{Im}(p) = \{0\}$ et $\ker(p)$ et $\mathfrak{Im}(p)$ sont en somme directe. Comme de plus $\dim E = \dim \ker(p) + \dim \mathfrak{Im}(p)$ d'après le théorème du rang, on en déduit que :

$$\boxed{E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)}.$$

- (b) Établissons que $\mathfrak{Im}(p) = \ker(\text{Id} - p)$. Tout d'abord, on va montrer que $\mathfrak{Im}(p) \subset \ker(\text{Id} - p)$. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $\mathfrak{Im}(p)$. Alors il existe un vecteur z de E tel que $x = p(z)$, ce qui entraîne que :

$$(\text{Id} - p)(x) = x - p(x) = p(z) - p \circ p(z) = 0,$$

car $p \circ p = p$ par hypothèse. En particulier, on a :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(p) \subset \ker(\text{Id} - p)}.$$

A présent, montrons que $\ker(\text{Id} - p) \subset \mathfrak{Im}(p)$. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $\ker(\text{Id} - p)$. Alors, on voit que $(\text{Id} - p)(x) = x - p(x) = 0$, ce qui entraîne que $x = p(x)$, et donc x appartient à $\mathfrak{Im}(p)$. En particulier, on a :

$$\boxed{\ker(\text{Id} - p) \subset \mathfrak{Im}(p)}.$$

Par conséquent, on en déduit par double inclusion que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(p) = \ker(\text{Id} - p)}.$$

- (c) Montrons que : $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$. Pour ce faire, considérons une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ de $\mathfrak{Im}(p)$ et une base $\mathcal{B}_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\ker(p)$. Comme $E = \ker(p) \oplus \mathfrak{Im}(p)$ d'après la question (1)(a), la concaténation $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ donne une base de E . Comme e_i appartient à $\mathfrak{Im}(p)$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et que $\mathfrak{Im}(p) = \ker(\text{Id} - p)$ d'après la question (1)(b), on voit que $p(e_i) - e_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, et donc $p(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. De plus, comme e_i appartient à $\ker(p)$ pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$, on voit que $p(e_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$. En particulier, la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, ceci entraîne avec les propriétés de la trace que :

$$\text{Tr}(p) = \text{Tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(p)) = 1 + \dots + 1 = r = \text{card}(\mathcal{B}_1) = \dim \mathfrak{Im}(p).$$

Mais par définition du rang, on en déduit que :

$$\boxed{\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)}.$$

- (2) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$\mathcal{P}(k)$: "si $E_1, \dots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E , alors $\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$ ".

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $\dim E_1 \leq \dim E_1$. A présent, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Soient $E_1, \dots, E_k, E_{k+1}$ des sous-espaces vectoriels de E . D'après la formule de Grassmann, on a :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k + E_{k+1}) = \dim(E_1 + \dots + E_k) + \dim E_{k+1} - \dim((E_1 + \dots + E_k) \cap E_{k+1}).$$

Comme $\dim((E_1 + \dots + E_k) \cap E_{k+1}) \geq 0$, ceci entraîne que :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1 + \dots + E_k) + \dim E_{k+1}.$$

Mais comme $\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k)$ par hypothèse de récurrence, il s'ensuit que :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k + E_{k+1}) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k) + \dim E_{k+1},$$

et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \geq 1$. Par conséquent, on vient de montrer que, pour tous sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_k$ de E , on a :

$$\dim(E_1 + \dots + E_k) \leq \dim(E_1) + \dots + \dim(E_k).$$

Partie II : CNS (condition nécessaire et suffisante) pour qu'une somme de projecteurs soit un projecteur

Soit k un entier ≥ 2 . On considère des projecteurs $p_1, \dots, p_k$ de E , et l'on pose $q_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

- (1) Montrons que si, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur de E . Remarquons tout d'abord que q_k est un endomorphisme de E car q_k est une somme finie d'endomorphismes de E et $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel. Si de plus on suppose que $p_i \circ p_j = \theta$ pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, alors on trouve par distributivité de la composition par rapport à l'addition que :

$$\begin{aligned} q_k^2 &= (p_1 + \dots + p_k) \circ (p_1 + \dots + p_k) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^k p_i \circ p_i + \sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} p_i \circ p_j \\ &= \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} \theta \\ &= \sum_{i=1}^k p_i = q_k. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que si, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors :

$$q_k \text{ est un projecteur de } E.$$

On suppose dans toute la suite que q_k est un projecteur et on souhaite montrer que, pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$.

- (2) (a) Montrons que $\mathfrak{Im}(q_k)$ est inclus dans $\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $\mathfrak{Im}(q_k)$. Alors il existe un vecteur z de E tel que $x = q_k(z)$. Comme $q_k = p_1 + \dots + p_k$, ceci entraîne que :

$$x = q_k(z) = (p_1 + \dots + p_k)(z) = p_1(z) + \dots + p_k(z).$$

Comme chaque vecteur $p_i(z)$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, il s'ensuit que x appartient à $\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathfrak{Im}(q_k)$, on en déduit que :

$$\mathfrak{Im}(q_k) \subset \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k).$$

- (b) Etablissons tout d'abord que $\text{rg}(q_k) = \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k))$. D'après la question précédente, on a $\mathfrak{Im}(q_k) \subset \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$, ce qui nous donne avec la question (2) de la partie I que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) \leq \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) \leq \dim \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \dim \mathfrak{Im}(p_k).$$

Par définition du rang, ceci entraîne que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) \leq \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) \leq \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k). \quad (*)$$

Par ailleurs, comme $q_k, p_1, \dots, p_k$ sont des projecteurs, on obtient avec la question (1)(b) et par linéarité de la trace que :

$$\text{rg}(q_k) = \text{Tr}(q_k) = \text{Tr}(p_1 + \dots + p_k) = \text{Tr}(p_1) + \dots + \text{Tr}(p_k) = \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k). \quad (**)$$

En associant les relations (*) et (**), il s'ensuit que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) = \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim(\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)).$$

A présent, montrons que $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. D'après la question (2)(a) de la partie II, on a l'inclusion de sous-espaces vectoriels $\mathfrak{Im}(q_k) \subset \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. De plus, comme on vient de montrer que $\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim (\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k))$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k).}$$

- (c) Etablissons l'égalité : $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$. D'après la question (2)(b) de la partie II, on sait que $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)$. Par ailleurs, on a montré à la même question que :

$$\text{rg}(q_k) = \dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim (\mathfrak{Im}(p_1) + \dots + \mathfrak{Im}(p_k)) = \text{rg}(p_1) + \dots + \text{rg}(p_k),$$

ce qui entraîne la relation suivante :

$$\dim \mathfrak{Im}(q_k) = \dim (\mathfrak{Im}(p_1)) + \dots + \dim (\mathfrak{Im}(p_k)).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k).}$$

- (3) (a) Montrons que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a : $q_k \circ p_j = p_j$. Pour ce faire, considérons un vecteur $x \in E$. Comme $p_j(x)$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_j)$ par définition et que $\mathfrak{Im}(q_k) = \mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$ d'après la question (2)(c) de la partie II, on voit que $p_j(x)$ appartient à $\mathfrak{Im}(q_k)$. Dès lors, comme q_k est un projecteur de E par hypothèse, on voit d'après la question (1)(b) de la partie I que $p_j(x)$ appartient à $\ker(\text{Id} - q_k)$, ce qui entraîne que $p_j(x) - q_k \circ p_j(x) = 0$, et donc $q_k \circ p_j(x) = p_j(x)$. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que :

$$\boxed{q_k \circ p_j = p_j.}$$

- (b) Montrons que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et pour tout $x \in E$, on a : $\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = 0$. Pour ce faire, fixons un vecteur $x \in E$. Comme $q_k \circ p_j = p_j$ d'après la question précédente et que $q_k = p_1 + \dots + p_k$ par hypothèse, ceci nous donne que :

$$q_k \circ p_j(x) = \left(\sum_{i=1}^k p_i \right) \circ p_j(x) = p_j(x).$$

Par distributivité de la composition par rapport à l'addition, on trouve que :

$$\sum_{i=1}^k p_i \circ p_j(x) = p_j(x).$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = p_j(x) - p_j^2(x).$$

Comme p_j est un projecteur, on sait que $p_j = p_j^2$, et donc :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = p_j(x) - p_j^2(x) = p_j(x) - p_j(x) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ et pour tout $x \in E$:

$$\boxed{\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = 0.}$$

- (c) Montrons alors que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$. Pour ce faire, fixons un vecteur $x \in E$. D'après la question précédente, on sait que :

$$\sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x)) = 0.$$

Comme $p_i(p_j(x))$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_i)$ par hypothèse, on voit que le vecteur $u = \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x))$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$. Comme cette somme est directe et que $u = \sum_{i=1, i \neq j}^k p_i(p_j(x))$, on voit que cette écriture de u est sa décomposition dans la somme directe $\mathfrak{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \mathfrak{Im}(p_k)$. Dès lors, il s'ensuit que, pour tout indice $i \neq j$:

$$p_i \circ p_j(x) = 0.$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a l'égalité :

$$p_i \circ p_j = \theta.$$

- (4) A la question (1) de la partie I, on a montré que, si pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, on a $p_i \circ p_j = \theta$, alors q_k est un projecteur de E . De plus, on a établi la réciproque de cette assertion à la question (3)(c) de la partie II. Par conséquent, on peut en conclure que :

$$q_k \text{ est un projecteur si et seulement si, pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2 \text{ tel que } i \neq j, \text{ on a } p_i \circ p_j = \theta.$$

Corrigé de l'exercice 5. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est involutive si $M^2 = I$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Dans ce qui suit, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

- (1) (a) Montrons que $M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I$. Pour ce faire, on pose $N = M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned} N &= M^2 - (a+d)M + (ad-bc)I \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ac+cd \\ ab+bd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ac+cd-ac-cd \\ ab+bd-ab-bd & bc+d^2-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I.$$

- (b) Montrons que M est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$. Supposons tout d'abord que M soit inversible et montrons que $ad-bc \neq 0$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que $ad-bc = 0$. Partant de la relation précédente, on voit que :

$$M^2 = (a+d)M.$$

Comme M est inversible, on obtient par produit avec M^{-1} que :

$$M = M^2 M^{-1} = (a+d)M M^{-1} = (a+d)I.$$

Dès lors, il s'ensuit par identification que $a = a+d = d$, $b = 0$ et $c = 0$, et donc $a = b = c = d = 0$. En particulier, la matrice M est nulle, ce qui contredit le fait qu'elle soit inversible. En d'autres termes, on vient de montrer que, si M est inversible, alors $ad-bc \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $ad-bc \neq 0$, et montrons que M est inversible. D'après la question précédente, on sait que :

$$M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I.$$

Comme $ad-bc \neq 0$ par hypothèse, on obtient par des calculs simples que :

$$M \left[\frac{M - (a+d)I}{-(ad-bc)} \right] = I.$$

En particulier, il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $MN = I$, et donc M est inversible. Par conséquent, on en déduit que :

$$M \text{ est inversible si et seulement si } ad-bc \neq 0.$$

- (c) Dans le cas où $ad-bc \neq 0$, écrivons M^{-1} en fonction de a, b, c, d . D'après les calculs de la question précédente, on voit que :

$$M^{-1} = \frac{M - (a+d)I}{-(ad-bc)} = \frac{1}{ad-bc} \left[- \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (a+d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

- (2) (a) Montrons que la matrice αI , où $\alpha \in \mathbb{R}$, est involutive si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$M^2 = I \iff \alpha^2 I^2 = I \iff \alpha^2 I = I \iff \alpha^2 = 1 \iff \alpha = \pm 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\alpha I \text{ est involutive si et seulement si } \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1.}$$

- (b) Dans cette question, on suppose que $M \neq I$ et $M \neq -I$. Montrons que M est involutive si et seulement si $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$. Supposons tout d'abord que M soit involutive et distincte de I et $-I$, et montrons que $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$. Comme $M^2 = I$, on voit avec la question (1)(a) que :

$$M^2 = I = (a + d)M - (ad - bc)I.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$(a + d)M - (ad - bc + 1)I = 0.$$

Si l'un des coefficients $a + d$ ou $ad - bc + 1$ était non nul, alors les matrices M et I seraient colinéaires. Comme $M^2 = I$, la matrice M est non nulle, et donc il existerait un réel α tel que $M = \alpha I$. Mais comme M est involutive, il s'ensuivrait d'après la question précédente que $M = \pm I$, ce qui est impossible par hypothèse. Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\text{si } M \text{ est involutive, alors } a + d = 0 \text{ et } ad - bc = -1.}$$

Réciproquement, supposons que $a + d = 0$ et $ad - bc = -1$, et montrons que M est involutive. D'après la question (1)(a), on trouve que :

$$M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I = 0 \times M - (-1) \times I = I.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{si } a + d = 0 \text{ et } ad - bc = -1, \text{ alors } M \text{ est involutive.}}$$

Par double implication, on en déduit que :

$$\boxed{M \text{ est involutive si et seulement si } a + d = 0 \text{ et } ad - bc = -1.}$$

- (3) Dans cette question, on suppose que $a = 5$, $b = 2$, $c = -4$, $d = -1$.

- (a) Trouvons un réel α tel que $M = \alpha I + B$, où B est involutive. Pour ce faire, supposons qu'un tel réel α existe. Comme la matrice M (et donc la matrice $M - \alpha I$) n'est pas un multiple de I , on voit avec la question (2)(b) que la trace de $M - \alpha I$ (c'est-à-dire la somme " $a + d$ ") doit être égale à 0, ce qui nous donne par linéarité de la trace que :

$$\text{Tr}(M - \alpha I) = \text{Tr}(M) - \alpha \text{Tr}(I) = 5 - 1 - 2\alpha = 4 - 2\alpha = 0,$$

d'où il s'ensuit que $\alpha = 2$. Vérifions à présent que $\alpha = 2$ convient bien. Par des calculs simples, on trouve que :

$$(M - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 5-2 & -4 \\ 2 & -1-2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 & -12+12 \\ 6-6 & -8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice $B = M - 2I$ est bien involutive, et donc :

$$\boxed{\alpha = 2.}$$

- (b) Calculons M^n en fonction de I, B, n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $M = 2I + B$ et que les matrices $2I$ et B commutent, la formule du binôme entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M^n = (2I + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k}.$$

Comme $B^2 = I$, on voit que $B^{2i} = (B^2)^i = I^i = I$ et $B^{2i+1} = (B^2)^i B = I^i B = B$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Dès lors, on obtient en développant la somme ci-dessus et en séparant les termes d'indice pair et impair que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M^n &= \binom{n}{0} B^0 (2I)^n + \binom{n}{1} B^1 (2I)^1 + \binom{n}{2} B^2 (2I)^2 + \dots + \binom{n}{n} B^n (2I)^0 \\ &= \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} B + \binom{n}{2} 2^{n-2} I + \dots + \binom{n}{n} 2^0 B^n \\ &= \left[\sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \right] I + \left[\sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \right] B. \end{aligned}$$

Toujours d'après la formule du binôme, on trouve que :

$$\begin{cases} (2+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} + \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \\ (2-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} - \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \end{cases}.$$

Par sommation et différence de ces égalités, on obtient que :

$$\sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ pair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}(3^n + 1) \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq k \leq n, k \text{ impair}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{1}{2}(3^n - 1).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{M^n = \frac{1}{2}(3^n + 1)I + \frac{1}{2}(3^n - 1)B.}$$

- (c) Montrons que M est inversible et vérifions que la formule de (3)(b) est encore valable pour $n = -1$. Pour ce faire, on désigne par N la matrice obtenue à l'aide de la formule ci-dessus pour $n = -1$, c'est-à-dire :

$$N = \frac{1}{2}(3^{-1} + 1)I + \frac{1}{2}(3^{-1} - 1)B = \frac{2}{3}I - \frac{1}{3}B.$$

D'après les propriétés du calcul matriciel, on trouve que :

$$\begin{aligned} MN &= (2I + B) \left(\frac{2}{3}I - \frac{1}{3}B \right) \\ &= \frac{4}{3}I \times I + \frac{2}{3}B \times I - \frac{2}{3}I \times B - \frac{1}{3}B \times B \\ &= \frac{4}{3}I + \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}B - \frac{1}{3}B^2 \\ &= \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}B^2. \end{aligned}$$

Mais comme $B^2 = I$, on trouve que :

$$MN = \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}B^2 = \frac{4}{3}I - \frac{1}{3}I = I.$$

Dès lors, il s'ensuit que M est inversible, d'inverse N . Mais comme N est la matrice obtenue à l'aide de la formule de la question (3)(c) pour $n = -1$, on en déduit que :

$$\boxed{M \text{ est inversible, d'inverse : } M^{-1} = \frac{1}{2}(3^{-1} + 1)I + \frac{1}{2}(3^{-1} - 1)B.}$$

Corrigé du problème 1.

Preliminaires :

- (1) (a) Justifions que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Pour ce faire, on pose $y = t^2$ et $\alpha = \frac{n+2}{2}$. Comme y tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, on obtient par croissances comparées et par composition des limites que :

$$t^{n+2} e^{-t^2} = \frac{y^\alpha}{e^y} \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que $t^2(t^n e^{-t^2})$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

- (b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge. Comme la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est paire (resp. impaire) si n est un entier pair (resp. impair), il suffit de vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge. De plus, comme la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale en question présente une impropreté en $+\infty$. Reste à étudier cette impropreté. Mais comme $t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge (en tant qu'intégrale de Riemann), on voit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge aussi d'après le critère de négligeabilité. En particulier, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge, et donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt \text{ converge.}}$$

- (c) Montrons que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge. Etant donné un polynôme $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ quelconque de $\mathbb{R}[x]$, on obtient par un calcul évident que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) e^{-t^2} = \sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t^2}.$$

Mais comme chaque intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ converge d'après la question précédente, il s'ensuit par linéarité de l'intégrale que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt \text{ converge.}}$$

- (2) On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, et l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right) I_n$. Pour ce faire, soient a, b des réels tels que $a < b$, et posons $u(t) = \frac{t^{n+1}}{2}$ et $v(t) = -e^{-t^2}$ pour tout $t \in [a, b]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, et de plus $u'(t) = \frac{n+1}{2} t^n$ et $v'(t) = 2te^{-t^2}$ pour tout $t \in [a, b]$. Dès lors, par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{n+2} e^{-t^2} dt &= \int_a^b u(t) v'(t) dt \\ &= [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt \\ &= \left[-\frac{t^{n+1} e^{-t^2}}{2} \right]_a^b - \int_a^b \frac{n+1}{2} t^n \times (-e^{-t^2}) dt \\ &= -\frac{b^{n+1} e^{-b^2}}{2} + \frac{a^{n+1} e^{-a^2}}{2} + \left(\frac{n+1}{2}\right) \int_a^b t^n e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Comme $b^{n+1} e^{-b^2}$ tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$ et que $a^{n+1} e^{-a^2}$ tend vers 0 quand a tend vers $-\infty$ d'après la question (1)(a), il s'ensuit par passage à la limite quand b tend vers $+\infty$, puis quand a tend vers $-\infty$ que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+2} e^{-t^2} dt = \left(\frac{n+1}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2} \right) I_n.$$

(b) Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $I_{2p+1} = 0$. Par définition, on sait que :

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} e^{-t^2} dt.$$

Notons que la fonction $f : t \mapsto t^{2p+1} e^{-t^2}$ est impaire sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-t) = (-t)^{2p+1} e^{-(-t)^2} = (-1)^{2p+1} t^{2p+1} e^{-t^2} = -t^{2p+1} e^{-t^2} = -f(t).$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p+1} = 0.$$

(c) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(p) : "I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}."$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car :

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^0 e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} = \frac{(0)!}{2^0 0!} \sqrt{\pi}.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(p+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

D'après la question (2)(a), on trouve alors que :

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \left(\frac{2p+1}{2} \right) I_{2p} \\ &= \left(\frac{2p+1}{2} \right) \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} \\ &= \left(\frac{(2p+1)(2p+2)}{2(2p+2)} \right) \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} \\ &= \left(\frac{(2p+1)(2p+2)}{2^2(p+1)} \right) \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2^2 \times 2^{2p}(p+1)p!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}(p+1)!} \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $p \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

I. Calculs d'intégrales dépendant d'un paramètre :

- (1) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent. Pour ce faire, considérons la première intégrale. Comme la fonction $t \mapsto \sin(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ présente une impropreté en $+\infty$. De plus, comme $|\sin(xt)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on obtient que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}.$$

Dès lors, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge d'après l'énoncé, et que les fonctions $t \mapsto |\sin(xt)e^{-t^2}|$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont positives sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin(xt)e^{-t^2}| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. En particulier, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ converge absolument, et donc :

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ converge.

A présent, considérons la deuxième intégrale. Comme la fonction $t \mapsto t \cos(xt)e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ présente une impropreté en $+\infty$. De plus, comme $|\cos(xt)| \leq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on obtient que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|t \cos(xt)e^{-t^2}| \leq te^{-t^2}.$$

Dès lors, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ converge d'après la question (1)(b), et que les fonctions $t \mapsto |t \cos(xt)e^{-t^2}|$ et $t \mapsto te^{-t^2}$ sont positives sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |t \cos(xt)e^{-t^2}| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. En d'autres termes, on voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ converge absolument, et donc :

l'intégrale $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ converge.

- (2) On considère à présent les fonctions S et C définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt.$$

- (a) Montrons que, pour tout $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

Pour ce faire, on peut remarquer que la fonction $f = \sin$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et que de plus $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\sin''(x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dès lors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f sur l'intervalle I d'extrémités a et $a + \lambda$, on a :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \sup_{x \in I} |f''(x)| \frac{\lambda^2}{2}.$$

Mais comme $|f''(x)| = |\sin(x)| \leq 1$ pour tout $x \in I$, on voit que $\sup_{x \in I} |f''(x)| \leq 1$, et donc :

$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$

- (b) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0.$$

Pour ce faire, partant de la question précédente où l'on remplace a par xt et λ par th , on obtient que, pour tout $(x, h, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\sin((x+h)t) - \sin(xt) - th \cos(xt)| \leq \frac{t^2 h^2}{2}.$$

Si l'on multiplie cette inégalité par e^{-t^2} , alors on trouve que, pour tout $(x, h, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$|\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2} - th \cos(xt)e^{-t^2}| \leq \frac{t^2 h^2 e^{-t^2}}{2}.$$

Si l'on intègre cette inégalité entre 0 et un réel α avec $\alpha > 0$, alors on obtient avec l'inégalité triangulaire et par linéarité de l'intégrale que, pour tout $(x, h, t) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\alpha \sin((x+h)t)e^{-t^2} dt - \int_0^\alpha \sin(xt)e^{-t^2} dt - \int_0^\alpha th \cos(xt)e^{-t^2} dt \right| \\ & \leq \int_0^\alpha |\sin((x+h)t)e^{-t^2} - \sin(xt)e^{-t^2} - th \cos(xt)e^{-t^2}| dt \\ & \leq \int_0^\alpha \frac{t^2 h^2 e^{-t^2}}{2} dt. \end{aligned}$$

Comme les intégrales $S(x+h), S(x), C(x), \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ convergent d'après les questions précédentes, il s'ensuit par passage à la limite quand α tend vers $+\infty$ que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$:

$$\left| \int_0^{+\infty} \sin((x+h)t)e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt - \int_0^{+\infty} th \cos(xt)e^{-t^2} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 h^2 e^{-t^2}}{2} dt,$$

ce qui se retraduit à l'aide des fonctions S, C et de l'intégrale I_2 sous la forme :

$$|S(x+h) - S(x) - hC(x)| \leq \frac{I_2}{2} h^2.$$

En divisant par $|h|$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$:

$$0 \leq \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{I_2}{2} |h|.$$

Mais comme $\frac{I_2}{2} |h|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, le théorème des gendarmes entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

d'où l'on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = 0.}$$

- (c) Montrons que S est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $S' = C$. D'après la question précédente, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x).$$

Mais ceci signifie exactement que S est dérivable en x pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que de plus $S'(x) = C(x)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et de plus : } S' = C.}$$

- (3) (a) Établissons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

Pour ce faire, fixons un réel $\alpha > 0$, puis posons $u(t) = \frac{1}{2} \cos(xt)$ et $v(t) = -e^{-t^2}$ pour tout $t \in [0, \alpha]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$, et de plus $u'(t) = -\frac{1}{2}x \sin(xt)$ et $v'(t) = 2te^{-t^2}$ pour tout $t \in [0, \alpha]$. Dès lors, par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha t \cos(xt) e^{-t^2} dt &= \int_0^\alpha u(t) v'(t) dt \\ &= [u(t) v(t)]_0^\alpha - \int_0^\alpha u'(t) v(t) dt \\ &= \left[-\frac{\cos(xt) e^{-t^2}}{2} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha \left(-\frac{1}{2} x \sin(xt) \right) \times \left(-e^{-t^2} \right) dt \\ &= -\frac{\cos(x\alpha) e^{-\alpha^2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \int_0^\alpha \sin(xt) e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Comme $|\cos(x\alpha)| \leq 1$ pour tout $\alpha > 0$, on voit que $\cos(x\alpha)e^{-\alpha^2}$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$. Dès lors, il s'ensuit par passage à la limite quand α tend vers $+\infty$ que :

$$\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$

(b) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Pour ce faire, on pose $f(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables (vu que S est dérivable d'après la question (2)(c)). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve avec les questions (2)(c) et (3)(a) que :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) \right)' \\ &= 2 \left(\frac{x}{2} \right) e^{\frac{x^2}{4}}S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}}S'(x) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}}C(x) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) + 2e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x) \right) \\ &= xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) + e^{\frac{x^2}{4}} - xe^{\frac{x^2}{4}}S(x) = e^{\frac{x^2}{4}}. \end{aligned}$$

Dès lors, comme les fonctions f' et $x \mapsto e^{\frac{x^2}{4}}$ sont égales sur $\mathbb{R}$, leurs primitives sont aussi égales sur $\mathbb{R}$ à une constante additive près. En particulier, il existe un réel C_0 tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt + C_0.$$

Mais comme $\sin(0) = 0$, on obtient par définition de S que :

$$S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(x \cdot 0) e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} 0 \cdot dt = 0.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$f(0) = 2e^{\frac{0^2}{4}}S(0) = 0 = \int_0^0 e^{\frac{t^2}{4}} dt + C_0 = C_0,$$

d'où l'on déduit que $C_0 = 0$. Par conséquent, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2e^{\frac{x^2}{4}}S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

(c) D'après la question précédente, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2e^{\frac{x^2}{4}}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Comme de plus $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et ce d'après la question (3)(a)), on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt \text{ et } C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

II. Obtention d'un développement limité

- (1) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ converge. Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, et donc il suffit d'établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$. De plus, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ présente juste une impropreté en $+\infty$. Enfin, comme $1 + x^2t^2 \geq 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on trouve que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} \leq e^{-t^2}.$$

D'après la question (1)(b) des préliminaires, on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$, et donc $\int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge aussi pour tout $p \in \mathbb{N}$. En particulier, on voit en prenant $p = 0$ que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge. Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Par conséquent, comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{l'intégrale } g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

- (2) (a) Montrons que, pour tout $u \geq 0$, on a :

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} &= \frac{(1+u)(1-u+u^2) - 1}{1+u} \\ &= \frac{1 - u + u^2 + u - u^2 + u^3 - 1}{1+u} \\ &= \frac{u^3}{1+u}. \end{aligned}$$

Comme $u \geq 0$, on voit que $1+u \geq 1$, et donc $0 \leq \frac{u^3}{1+u} \leq u^3$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $u \geq 0$:

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

- (b) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $u \geq 0$:

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

En remplaçant u par x^2t^2 , on obtient que, pour tous $x, t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq 1 - x^2t^2 + x^4t^4 - \frac{1}{1+x^2t^2} \leq x^6t^6.$$

En multipliant le tout par e^{-t^2} , on trouve que, pour tous $x, t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (1 - x^2t^2 + x^4t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} \leq x^6t^6 e^{-t^2}.$$

D'après la question (1)(b) des préliminaires, on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt$ converge, et donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6t^6 e^{-t^2} dt$ converge par linéarité. D'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, on obtient que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} [(1 - x^2t^2 + x^4t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2}] dt$ converge. Dès lors, il s'ensuit par croissance de l'intégrale que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(1 - x^2t^2 + x^4t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} \right] dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6t^6 e^{-t^2} dt.$$

Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt$ converge d'après la question (1)(c) des préliminaires et que l'intégrale $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$ converge d'après la question (1) de la partie III, on obtient par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt.$$

Toujours par linéarité de l'intégrale, ceci entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq x^6 \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt.$$

Comme $I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt$, on voit avec la question (2)(c) des préliminaires que :

$$I_6 = \frac{(2 \times 3)!}{2^2 \times 3!} \sqrt{\pi} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2^6 \times 3 \times 2} \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}.$$

En reportant ceci dans l'encadrement ci-dessus, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

Mais par définition de g , on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

- (3) Montrons que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 et donnons ce développement limité. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

D'après la question (1)(b) des préliminaires, on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt - x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt + x^4 \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6.$$

Par définition de I_n , ceci entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq I_0 - I_2 x^2 + I_4 x^4 - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6. \quad (*)$$

A noter que $I_0 = \sqrt{\pi}$ d'après la question (2)(c) des préliminaires. De plus, on voit d'après la même question que :

$$I_2 = \frac{(2 \times 1)!}{2^2 \times 1!} \sqrt{\pi} = \frac{2}{4} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

Par ailleurs, on trouve avec la même question que :

$$I_4 = \frac{(2 \times 2)!}{2^2 \times 2!} \sqrt{\pi} = \frac{4 \times 3 \times 2}{32} \sqrt{\pi} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

En particulier, l'inégalité (*) se réécrit sous la forme suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} x^4 - g(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x^6. \quad (**)$$

Considérons alors la fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varepsilon(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par :

$$\varepsilon(x) = \frac{\sqrt{\pi} - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} x^2 + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} x^4 - g(x)}{x^5}.$$

D'après l'encadrement (**), on voit que, pour tout $x > 0$:

$$0 \leq \varepsilon(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} x.$$

De même, toujours d'après (**), on constate que, pour tout $x < 0$:

$$\frac{15}{8} \sqrt{\pi} x \leq \varepsilon(x) \leq 0.$$

Dans tous les cas, ceci nous donne que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$-\frac{15}{8} \sqrt{\pi} |x| \leq \varepsilon(x) \leq \frac{15}{8} \sqrt{\pi} |x|.$$

D'après le théorème des gendarmes, il s'ensuit que $\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par ailleurs, on sait par construction de la fonction ε que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}x^2 + \frac{3}{4}\sqrt{\pi}x^4 - x^5\varepsilon(x).$$

Par conséquent, on en déduit que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 donné par :

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}x^2 + \frac{3}{4}\sqrt{\pi}x^4 + o(x^5).$$

III. Nature d'une série :

- (1) Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge. Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ est paire sur $\mathbb{R}$, et donc il suffit d'établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$. De plus, comme la fonction $t \mapsto \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ présente juste une impropreté en $+\infty$. Enfin, comme $t^2 + (2p)! \geq (2p)!$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, on trouve que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2}.$$

D'après la question (1)(b), on sait que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt$ converge aussi. Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2} dt$ converge par linéarité, ce qui entraîne que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\text{l'intégrale } u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

- (2) Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$. Comme à la question précédente, on voit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, ceci entraîne que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 0 \cdot dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2} dt,$$

vu que toutes les intégrales en question convergent d'après les questions précédentes. Dès lors, par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt.$$

Par définition de u_p et I_{2p} , on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

- (3) Montrons que la série $\sum u_p$ converge. Tout d'abord, on voit que $\sum u_p$ est une série à termes positifs d'après la question précédente. De plus, d'après la question ci-dessus et la question (2)(c) de la première partie, on trouve que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi} \times \frac{1}{(2p)!} = \frac{1}{2^{2p}p!} \sqrt{\pi} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!} \sqrt{\pi}.$$

D'après le cours, on sait que la série exponentielle $\sum \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}$ converge, et donc la série $\sum \sqrt{\pi} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^p}{p!}$ converge aussi par linéarité. Dès lors, la série $\sum u_p$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, et donc :

$$\text{la série } \sum u_p \text{ converge.}$$

2. Sujet type ESSEC

Corrigé du problème 2.

Notations et objectifs :

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles. Sous réserve d'existence, on note :

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \quad \text{et} \quad \psi : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x}{n^2 - x^2}.$$

Le but du problème est d'obtenir, à l'aide des fonctions φ et ψ , des expressions des fonctions $\sin$, $\frac{1}{\sin}$, $\frac{\cos}{\sin}$ comme somme de séries ou produit infini (On parle de développements eulériens). Plus précisément, dans la partie I, on étudie les premières propriétés de la fonction φ ; dans la seconde partie, on introduit et on étudie l'opérateur T défini sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On en déduit une expression de la fonction $\frac{\cos}{\sin}$ puis, dans la partie III, de la fonction sinus. Enfin, dans la partie IV, l'étude de la fonction ψ permet d'obtenir une expression de $\frac{1}{\sin}$. Rappelons pour terminer les égalités suivantes pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & (\text{formule d'addition pour } \cos) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & (\text{formule d'addition pour } \sin) \\ \cos(2a) &= 2\cos^2(a) - 1 & (\text{formule de duplication d'angle pour } \cos) \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) & (\text{formule de duplication d'angle pour } \sin) \end{cases}.$$

(1) **Partie I : Etude de la fonction φ**

- (a) Montrer que, pour tout réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente. Comme x n'est pas un entier relatif, on voit que $x \neq 0$, et donc :

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}.$$

En particulier, la série $\sum \frac{2x}{n^2}$ converge comme multiple d'une série de Riemann convergente. Comme de plus $\frac{2x}{n^2}$ est du signe de x (et donc de signe constant) pour tout $n \geq 1$, on en déduit par équivalence de séries à termes positifs que :

la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout réel x qui n'est pas un entier relatif.

Dans la suite, on notera D l'ensemble des nombres réels qui ne sont pas des entiers relatifs. La fonction φ est donc définie sur D .

- (b) Imparité et périodicité de φ :

- (i) Justifions que la fonction φ est impaire. Pour tout $x \in D$, on voit que $-x$ appartient aussi à D (car $-x$ n'est pas un entier relatif vu que x ne l'est pas) et de plus, on a par linéarité de la somme que :

$$\varphi(-x) = \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{n^2 - (-x)^2} = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = -\varphi(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

la fonction φ est impaire.

- (ii) Vérifions que, pour tout $x \in D$, on a : $\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in D$:

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{2x}{(n-x)(n+x)} = \frac{n+x - (n-x)}{(n-x)(n+x)} = \frac{n+x}{(n-x)(n+x)} - \frac{n-x}{(n-x)(n+x)} = \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}.$$

Par conséquent, on en déduit que pour tout $x \in D$:

$$\boxed{\frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x}}.$$

- (iii) Montrons que, pour tout $x \in D$, on a : $\varphi(x+1) = \varphi(x)$. Pour ce faire, fixons un entier $p \geq 2$. Pour tout $x \in D$, on voit avec la question précédente et par linéarité de la somme que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p \frac{2(x+1)}{n^2 - (x+1)^2} &= \sum_{n=1}^p \frac{1}{n - (x+1)} - \frac{1}{n + x + 1} \\ &= \sum_{n=1}^p \frac{1}{n - 1 - x} - \frac{1}{n + 1 + x} \\ &= \sum_{n=1}^p \frac{1}{n - 1 - x} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n + 1 + x}. \end{aligned}$$

En effectuant les changements d'indices $k = n - 1$ dans la première somme de droite et $k = n + 1$ dans la deuxième, puis en utilisant la linéarité de la somme, on trouve que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^p \frac{2(x+1)}{n^2 - (x+1)^2} &= \sum_{n=1}^p \frac{1}{n - 1 - x} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n + 1 + x} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k - x} - \sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{k + x} \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{p - x} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k - x} + \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{p + 1 + x} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k + x} \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{p - x} + \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{p + 1 + x} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k - x} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k + x} \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{p - x} + \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{p + 1 + x} + \sum_{k=1}^p \frac{2x}{k^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on obtient que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(x+1)}{n^2 - (x+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{k^2 - x^2},$$

ce qui redonne après réarrangement que :

$$\frac{1}{1+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(x+1)}{n^2 - (x+1)^2} = \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{k^2 - x^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in D$:

$$\boxed{\varphi(x+1) = \varphi(x)}.$$

La fonction φ est donc périodique de période 1.

(c) Continuité de φ :

- (i) Justifions, pour tout $x \in D \cup \{0, 1\}$, l'existence de :

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x} - \frac{1}{n + x} \right).$$

Pour ce faire, on distingue deux cas. Si $x = 0$, alors on voit que $u_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 2$, et donc la série $\sum_{n \geq 2} u_n(0)$ converge. Si maintenant $x \in D \cup \{1\}$, alors on constate que $u_n(x)$ est

bien définie pour tout $n \geq 2$, et de plus :

$$u_n(x) = \frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{n^2}.$$

En particulier, la série $\sum \frac{2x}{n^2}$ converge comme multiple d'une série de Riemann convergente. Comme de plus $\frac{2x}{n^2}$ est du signe de x (et donc de signe constant) pour tout $n \geq 2$, la série $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ converge par équivalence de séries à termes positifs. Par conséquent, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 2} u_n(x)$ converge pour tout $x \in D \cup \{0, 1\}$, et donc :

$$\text{l'expression } g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \text{ est bien définie pour tout } x \in D \cup \{0, 1\}.$$

- (ii) Vérifions que, pour tout $x \in D$, on a : $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x)$. Pour tout $x \in D$, on trouve par définition de φ et g , et d'après la question (1)(b)(ii) que :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2x}{1^2 - x^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in D$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).$$

- (iii) Soit $h \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Montrons que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad |g(x+h) - g(x)| \leq C|h|, \quad \text{avec : } C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)\left(n - \frac{3}{2}\right)}.$$

Pour ce faire, fixons tout d'abord un entier $n \geq 2$. D'après la question (1)(b)(ii), on trouve que :

$$\begin{aligned} u_n(x+h) - u_n(x) &= \frac{2(x+h)}{n^2 - (x+h)^2} - \frac{2x}{n^2 - x^2} \\ &= \frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n+x-h} - \frac{1}{n-x} + \frac{1}{n+x} \\ &= \left(\frac{1}{n-x-h} - \frac{1}{n-x} \right) - \left(\frac{1}{n+x-h} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= \frac{h}{(n-x-h)(n-x)} - \frac{h}{(n+x-h)(n+x)}. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, ceci nous donne que :

$$|u_n(x+h) - u_n(x)| \leq \left| \frac{h}{(n-x-h)(n-x)} \right| + \left| \frac{h}{(n+x-h)(n+x)} \right|. \quad (*)$$

Comme x appartient à $[0, 1]$ et que h appartient à $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on voit que :

$$n - \frac{3}{2} \leq n - x - h, \quad n - 1 \leq n - x, \quad n - \frac{1}{2} \leq n + x - h, \quad n \leq n + x.$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\left(n - \frac{3}{2}\right)(n-1) \leq (n-x-h)(n-x) \quad \text{et} \quad \left(n - \frac{3}{2}\right)(n-1) \leq \left(n - \frac{1}{2}\right)n \leq (n+x-h)(n+x).$$

Dès lors, il s'ensuit à partir de la relation (*) que :

$$|u_n(x+h) - u_n(x)| \leq \frac{|h|}{(n-3/2)(n-1)} + \frac{|h|}{(n-3/2)(n-1)} = \frac{2|h|}{(n-3/2)(n-1)}. \quad (**)$$

A noter que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-3/2)(n-1)}$ converge par équivalence de séries à termes positifs, car son terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann convergente. D'après l'inégalité triangulaire, par linéarité de la somme et avec l'inégalité (**), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x+h) - \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x) \right| \\ &= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} (u_n(x+h) - u_n(x)) \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |u_n(x+h) - u_n(x)| \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2|h|}{(n-3/2)(n-1)} \\ &\leq |h| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-3/2)(n-1)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit en posant $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-3/2)(n-1)}$ que, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $h \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$:

$$\boxed{|g(x+h) - g(x)| \leq C|h|}.$$

- (iv) Montrons tout d'abord que g est continue sur $[0, 1]$. D'après la question précédente, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $h \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, on ait :

$$0 \leq |g(x+h) - g(x)| \leq C|h|.$$

Fixons alors un réel $x \in [0, 1]$. Par encadrement, on voit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} |g(x+h) - g(x)| = 0,$$

ce qui entraîne que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x).$$

En particulier, la fonction g est continue en x . Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in [0, 1]$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } g \text{ est continue sur } [0, 1]}.$$

Montrons à présent que φ est continue sur $]0, 1[$. D'après la question (1)(c)(ii), on sait que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).$$

Comme φ est une combinaison linéaire de fonctions continues sur $]0, 1[$ (dont certaines sont continues sur $]0, 1[$ en tant qu'inverses de fonctions continues sur $]0, 1[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1[$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]0, 1[}.$$

La fonction φ est donc continue sur D .

- (d) Etude de φ en 0 et en 1 :

- (i) Montrons tout d'abord que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$. D'après la question (1)(c)(ii), on a pour tout $x \in D$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x \in D$:

$$x\varphi(x) = 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x} - xg(x). \quad (*)$$

Comme la fonction g est continue sur $[0, 1]$ d'après la question précédente, on voit que les fonctions $x \mapsto \frac{x}{1-x}$, $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et $x \mapsto xg(x)$ sont continues à droite en 0. Dès lors, on trouve par passage à la limite dans la relation (*) que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x}{1+x} - xg(x) = 1 - 0 - 0 - 0 = 1.$$

De plus, comme la fonction φ est impaire d'après la question (1)(b)(i), on obtient que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)\varphi(-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x)(-\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x\varphi(x) = 1.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x\varphi(x) = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

A présent, montrons que $\lim_{x \rightarrow 0} (\varphi(x) - \frac{1}{x}) = 0$. Toujours d'après la question (1)(c)(ii), on voit que, pour tout $x \in D$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x \in D$:

$$\varphi(x) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x). \quad (**)$$

Comme la fonction g est continue sur $[0, 1]$ d'après la question précédente, et que les fonctions $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sont continues en 0, on obtient par passage à la limite dans la relation (**) que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x) = -1 + 1 - g(0) = -g(0).$$

En particulier, on voit par définition de g que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) - \frac{1}{x} = -g(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2.0}{n^2 - 0^2} = 0.$$

De plus, comme la fonction φ est impaire d'après la question (1)(b)(i), on trouve que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) - \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(-x) - \frac{1}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\left(\varphi(x) - \frac{1}{x}\right) = -0 = 0.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) - \frac{1}{x} = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) - \frac{1}{x} = 0.}$$

- (ii) Obtenons des résultats similaires lorsque x tend vers 1. Montrons tout d'abord que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$. Comme φ est 1-périodique sur D d'après la question (1)(b)(iii), on sait que $\varphi(x) = \varphi(x-1)$ pour tout $x \in D$. Dès lors, comme $x-1$ tend vers 0 quand x tend vers 1 et que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$, on obtient par substitution que :

$$\varphi(x) = \varphi(x-1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$$

A présent, montrons que $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-1} \right) = 0$. Toujours d'après la question (1)(b)(iii), on sait que $\varphi(x) = \varphi(x-1)$ pour tout $x \in D$. Dès lors, comme $x-1$ tend vers 0 quand x tend vers 1 et que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) - \frac{1}{x} = 0$, on obtient par composition des limites que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) - \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x-1) - \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) - \frac{1}{x} = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) - \frac{1}{x-1} = 0.}$$

(2) Partie II : Etude de l'opérateur T

On rappelle que E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles. De plus, T est l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, e_k l'élément de E défini par : $\forall x \in [0, 1], e_k(x) = x^k$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $\mathcal{B}_n = (e_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

- (a) Vérifions que T est un endomorphisme de E . Tout d'abord, considérons un élément f de E . Alors f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Dès lors, comme :

$$T(f) : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

on voit que $T(f)$ est continue sur $[0, 1]$ comme somme de composées de fonctions continues sur $[0, 1]$. En particulier, l'application T va de E dans E . Reste à vérifier que T est linéaire. Pour ce faire, considérons deux éléments f et g de E , et soient λ, μ des réels. Pour tout $x \in [0, 1]$, on voit que :

$$\begin{aligned} T(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)\left(\frac{x}{2}\right) + (\lambda f + \mu g)\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \lambda f\left(\frac{x}{2}\right) + \mu g\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \mu g\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \lambda \left[f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] + \mu \left[g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right) \right] \\ &= \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x). \end{aligned}$$

En particulier, ceci signifie que $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$, et donc T est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

- (b) Etude de T sur F_n :

- (i) Vérifions que, pour tout $f \in F_n$, la fonction $T(f)$ appartient à F_n . Pour tout $f \in F_n$, on sait que $\deg(f) \leq n$. D'après les propriétés des polynômes, on sait que la somme et la composée de deux polynômes est toujours un polynôme, et donc $T(f) : x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$ est un polynôme. De plus, d'après les propriétés du degré, on voit que :

$$\deg\left(x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \deg\left(x \mapsto \frac{x}{2}\right) \deg(f) \leq 1 \times n = n.$$

De même, on voit que :

$$\deg\left(x \mapsto f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \deg\left(x \mapsto \frac{x+1}{2}\right) \deg(f) \leq 1 \times n = n.$$

Par somme, ceci nous donne que :

$$\deg(T(f)) \leq \max \left\{ \deg\left(x \mapsto f\left(\frac{x}{2}\right)\right), \deg\left(x \mapsto f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) \right\} \leq \max\{n, n\} = n.$$

En particulier, il s'ensuit que $T(f)$ appartient à F_n . Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall f \in F_n, T(f) \in F_n.}$$

On note T_n l'endomorphisme de F_n défini par : $\forall f \in F_n, T_n(f) = T(f)$.

- (ii) Déterminons la matrice de T_n dans la base $\mathcal{B}_n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on trouve avec la formule du binôme que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_n(e_k)(x) &= e_k\left(\frac{x}{2}\right) + e_k\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^k + \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \\ &= \frac{x^k}{2^k} + \frac{(x+1)^k}{2^k} \\ &= \frac{x^k}{2^k} + \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i \cdot 1^{k-i} \\ &= \frac{x^k}{2^k} + \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i. \end{aligned}$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(e_0)(x) = 2 \quad \text{et} \quad : \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, T_n(e_k)(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^i + \frac{2x^k}{2^k}.$$

A noter que ceci se retraduit sous la forme suivante :

$$T_n(e_0) = 2e_0 \quad \text{et} \quad : \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, T(e_k) = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} e_i + \frac{2}{2^k} e_k.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}_n}(T_n) = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 1/4 & \cdots & \cdots & \binom{n}{0}(1/2^n) \\ 0 & 1 & 1/2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1/2 & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-3}(1/2^n) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-2}(1/2^n) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1}(1/2^n) \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1/2^{n-1} \end{pmatrix}.}$$

- (c) Etude du noyau de l'endomorphisme $(T - 2\text{Id}_E)$:

- (i) Montrons que $\ker(T - 2\text{Id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$. D'après la question précédente, on sait que $T_n(e_0) = 2e_0$. En particulier, si f_0 est la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, constante égale à 1, alors on voit que $T(f_0) = 2f_0$, ce qui entraîne que $T(f_0) - 2f_0 = 0$, et donc f_0 appartient à $\ker(T - 2\text{Id}_E)$. Mais comme f_0 n'est pas la fonction nulle, on en déduit que :

$$\boxed{\ker(T - 2\text{Id}_E) \neq \{0_E\}.}$$

Soit f un élément de $\ker(T - 2\text{Id}_E)$. On note $m = \min_{x \in [0, 1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$. On fixe x_0 dans $[0, 1]$ tel que $m = f(x_0)$ et x_1 dans $[0, 1]$ tel que $M = f(x_1)$.

- (ii) Montrons que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$. Comme f appartient à $\ker(T - 2\text{Id}_E)$, on voit que $T(f) - 2f = 0$, et donc $T(f) = 2f$. Dès lors, ceci signifie que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x).$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0),$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\left[f\left(\frac{x_0}{2}\right) - f(x_0)\right] + \left[f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) - f(x_0)\right] = 0. \quad (*)$$

Comme $f(x_0) = m$ est le minimum de f sur $[0, 1]$, on voit que :

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) \geq f(x_0) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \geq f(x_0).$$

En particulier, les deux crochets dans l'égalité (*) sont positifs. Comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des réels est nul, il s'ensuit que :

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) - f(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) - f(x_0) = 0.$$

Mais comme $f(x_0) = m$, on en déduit que :

$$\boxed{f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m.}$$

(iii) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car on sait par définition que :

$$f\left(\frac{x_0}{2^0}\right) = f(x_0) = m.$$

A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$. Dès lors, comme $\frac{x_0}{2^n}$ est un élément de $[0, 1]$ en lequel le minimum de f est atteint, on sait d'après la question précédente (et en remplaçant x_0 par $\frac{x_0}{2^n}$) que :

$$f\left(\frac{\frac{x_0}{2^n}}{2}\right) = m.$$

En particulier, ceci entraîne que $f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = m$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m.}$$

(iv) Montrons que $m = f(0)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m.$$

Comme la suite géométrique $\left(\frac{x_0}{2^n}\right)_{n \geq 0}$ a une raison < 1 en valeur absolue, elle converge vers 0. Dès lors, comme la fonction f est continue en 0, on obtient par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus que :

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f(0) = m.}$$

(v) Effectuons une étude similaire pour M . Pour ce faire, on commence par montrer que $f\left(\frac{x_1}{2}\right) = M$. Comme f appartient à $\ker(T - 2\text{Id}_E)$, on voit que $T(f) - 2f = 0$, et donc $T(f) = 2f$. Dès lors, ceci signifie que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x).$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+1}{2}\right) = 2f(x_1),$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\left[f\left(\frac{x_1}{2}\right) - f(x_1) \right] + \left[f\left(\frac{x_1+1}{2}\right) - f(x_1) \right] = 0. \quad (*)$$

Comme $f(x_1) = M$ est le maximum de f sur $[0, 1]$, on voit que :

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) \leq f(x_1) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x_1+1}{2}\right) \leq f(x_1).$$

En particulier, les deux crochets dans l'égalité (*) sont négatifs. Comme une somme de réels négatifs est nulle si et seulement si chacun des réels est nul, il s'ensuit que :

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) - f(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x_1+1}{2}\right) - f(x_1) = 0.$$

Mais comme $f(x_1) = M$, on en déduit que :

$$\boxed{f\left(\frac{x_1}{2}\right) = M.}$$

Par une récurrence analogue à celle de la question (2)(c)(iii), on montre alors que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M.}$$

Comme la suite géométrique $\left(\frac{x_1}{2^n}\right)_{n \geq 0}$ a une raison < 1 en valeur absolue, elle converge vers 0. Dès lors, comme la fonction f est continue en 0, on obtient par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité encadrée ci-dessus que :

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x_1}{2^n}\right) = M.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f(0) = M.}$$

- (vi) Montrons que f est constante. Comme $m = \min_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0,1]} f(x)$, on voit que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [0, 1]$. Mais comme $f(0) = m = M$ d'après les questions précédentes, il s'ensuit que $f(x) = f(0)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est constante.}}$$

(d) Etude de la fonction cot :

Pour tout $x \in D$, on note : $\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

- (i) Vérifions que cot est définie et continue sur D , impaire et périodique de période 1. Tout d'abord, on voit que l'expression $\cot(x)$ est définie si et seulement si $\sin(\pi x) \neq 0$, c'est-à-dire si πx n'est pas un multiple entier de π , ou en d'autres termes si x n'est pas un entier, et donc D est bien le domaine de définition de cot. De plus, la fonction cot est continue sur D comme quotient de fonctions continues sur D , dont le dénominateur ne s'annule pas sur D . En outre, pour tout $x \in D$, on voit que $-x$ appartient à D (car $-x$ n'est pas un entier si et seulement si x n'en est pas un). Dès lors, comme la fonction cos est paire et que la fonction sin est impaire, on a :

$$\cot(-x) = \pi \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = -\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = -\cot(x).$$

Dès lors, il s'ensuit que la fonction cot est impaire. Par ailleurs, pour tout $x \in D$, on voit que $x+1$ appartient à D (car $x+1$ n'est pas un entier si et seulement si x n'en est pas un). En particulier, d'après les propriétés des fonctions cos et sin, on a :

$$\cot(x+1) = \pi \frac{\cos(\pi(x+1))}{\sin(\pi(x+1))} = \pi \frac{\cos(\pi x + \pi)}{\sin(\pi x + \pi)} = \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \cot(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction cot est définie, continue, impaire et périodique de période 1 sur } D.}$$

- (ii) Montrons tout d'abord que $\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$. Comme la fonction $\cos$ est continue et que πx tend vers 0 quand x tend vers 0, on obtient par composition des limites que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi x) = \cos(0) = 1.$$

En particulier, ceci nous donne que $\cos(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$. En outre, comme $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et que πx tend vers 0 quand x tend vers 0, on obtient par substitution que :

$$\sin(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \pi x.$$

D'après les règles de calcul des équivalents, il s'ensuit que :

$$\cot(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi \cdot 1}{\pi x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

A présent, montrons que $\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}$. D'après le cours, on sait que :

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Comme πx tend vers 0 quand x tend vers 0, on obtient par substitution que :

$$\cos(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \sin(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3).$$

Dès lors, ceci entraîne que :

$$\begin{aligned} \pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \pi x \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \right) - \pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{2} + o(x^3) - \pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{\pi^3 x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

En particulier, on voit que :

$$\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^3 x^3}{3}. \quad (*)$$

Par ailleurs, comme $\sin(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \pi x$ d'après ce qui précède, on obtient que :

$$x \sin(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \pi x^2. \quad (**)$$

Dès lors, ceci entraîne par définition de la fonction $\cot$ que :

$$\cot(x) - \frac{1}{x} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} = \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x \sin(\pi x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{\pi^3 x^3}{3}}{\pi x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}.}$$

- (iii) Obtenons des résultats similaires lorsque x tend vers 1. Comme la fonction $\cot$ est périodique de période 1 d'après la question (2)(d)(i), on sait que $\cot(x-1) = \cot(x)$ pour tout $x \in D$. Dès lors, comme $\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$ d'après la question précédente et que $x-1$ tend vers 0 quand x tend vers 1, on obtient par substitution que :

$$\cot(x) = \cot(x-1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\cot(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}.}$$

De plus, comme $\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}$ d'après la question précédente et que $x - 1$ tend vers 0 quand x tend vers 1, on obtient par substitution que :

$$\cot(x-1) - \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\pi^2(x-1)}{3}.$$

Mais comme la fonction $\cot$ est périodique de période 1 d'après la question (2)(d)(i), on sait que $\cot(x-1) = \cot(x)$ pour tout $x \in D$, et donc :

$$\cot(x) - \frac{1}{x-1} = \cot(x-1) - \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\pi^2(x-1)}{3}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\cot(x) - \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\pi^2(x-1)}{3}.}$$

(iv) Démontrons que, pour tout $x \in D$, on a :

$$\frac{x}{2} \in D, \quad \frac{x+1}{2} \in D \quad \text{et} \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x).$$

Pour ce faire, considérons un élément x de D . Si $\frac{x}{2}$ n'appartenait pas à D , alors $\frac{x}{2}$ serait un entier, et donc $x = 2\frac{x}{2}$ le serait aussi, ce qui est impossible car x appartient à D , et donc $\frac{x}{2}$ appartient à D . De même, si $\frac{x+1}{2}$ n'appartenait pas à D , alors $\frac{x+1}{2}$ serait un entier, et donc $x = 2\frac{x+1}{2} - 1$ le serait aussi, ce qui est impossible car x appartient à D , et donc $\frac{x+1}{2}$ appartient à D . De plus, d'après les formules d'addition et de duplication d'angle pour $\cos$ et $\sin$, on a :

$$\begin{aligned} \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \frac{\cos(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)} + \pi \frac{\cos(\pi x/2 + \pi/2)}{\sin(\pi x/2 + \pi/2)} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)} + \pi \frac{\cos(\pi x/2) \cos(\pi/2) - \sin(\pi x/2) \sin(\pi/2)}{\sin(\pi x/2) \cos(\pi/2) + \cos(\pi x/2) \sin(\pi/2)} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)} + \pi \frac{\cos(\pi x/2) \cdot 0 - \sin(\pi x/2) \cdot 1}{\sin(\pi x/2) \cdot 0 + \cos(\pi x/2) \cdot 1} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2)} + \pi \frac{-\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)} \\ &= \pi \left(\frac{\cos(\pi x/2) \cos(\pi x/2) - \sin(\pi x/2) \sin(\pi x/2)}{\sin(\pi x/2) \cos(\pi x/2)} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\cos(\pi x/2) \cos(\pi x/2) - \sin(\pi x/2) \sin(\pi x/2)}{2 \sin(\pi x/2) \cos(\pi x/2)} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{\cos(\pi x/2 + \pi x/2)}{\sin(2\pi x/2)} \right) \\ &= 2\pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in D$, on a :

$$\boxed{\frac{x}{2} \in D, \quad \frac{x+1}{2} \in D \quad \text{et} \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x).}$$

(e) Calcul de φ :

(i) Vérifions que, pour tout $x \in D$, on a $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$. Pour ce faire, fixons un entier $p \geq 2$ et un élément x de D , et posons :

$$S_p(x) = \sum_{n=1}^p \frac{2(x/2)}{n^2 - (x/2)^2} + \sum_{n=1}^p \frac{2((x+1)/2)}{n^2 - ((x+1)/2)^2}.$$

Alors, on trouve par linéarité de la somme et d'après la question (1)(b)(ii) que :

$$\begin{aligned}
S_p(x) &= \sum_{n=1}^p \frac{2(x/2)}{n^2 - (x/2)^2} + \sum_{n=1}^p \frac{2((x+1)/2)}{n^2 - ((x+1)/2)^2} \\
&= \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{n - (x/2)} - \frac{1}{n + (x/2)} \right) + \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{n - ((x+1)/2)} - \frac{1}{n + ((x+1)/2)} \right) \\
&= \sum_{n=1}^p \left(\frac{2}{2n - x} - \frac{2}{2n + x} \right) + \sum_{n=1}^p \left(\frac{2}{2n - 1 - x} - \frac{2}{2n + 1 + x} \right) \\
&= 2 \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2n - x} - \frac{1}{2n + x} \right) + 2 \sum_{n=1}^p \frac{1}{2n - 1 - x} - 2 \sum_{n=1}^p \frac{1}{2n + 1 + x}.
\end{aligned}$$

En effectuant les changements d'indices $k = n$ dans la troisième somme de droite et $k = n + 1$ dans la quatrième, puis en utilisant la linéarité de la somme, on trouve que :

$$\begin{aligned}
S_p(x) &= 2 \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2n - x} - \frac{1}{2n + x} \right) + 2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k - 1 - x} - 2 \sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{2(k-1) + 1 + x} \\
&= 2 \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2n - x} - \frac{1}{2n + x} \right) + 2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k - 1 - x} - 2 \sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{2k - 1 + x} \\
&= 2 \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2n - x} - \frac{1}{2n + x} \right) + 2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k - 1 - x} - 2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k - 1 + x} + \frac{2}{1 + x} - \frac{2}{2p + 1 + x} \\
&= 2 \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2n - x} - \frac{1}{2n + x} \right) + 2 \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{2k - 1 - x} - \frac{1}{2k - 1 + x} \right) + \frac{2}{1 + x} - \frac{2}{2p + 1 + x}.
\end{aligned}$$

En particulier, l'égalité précédente peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
S_p(x) &= 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq 2p \\ m \text{ pair}}} \left(\frac{1}{m - x} - \frac{1}{m + x} \right) + 2 \sum_{\substack{1 \leq m \leq 2p \\ m \text{ impair}}} \left(\frac{1}{m - x} - \frac{1}{m + x} \right) + \frac{2}{1 + x} - \frac{2}{2p + 1 + x} \\
&= 2 \sum_{m=1}^{2p} \left(\frac{1}{m - x} - \frac{1}{m + x} \right) + \frac{2}{1 + x} - \frac{2}{2p + 1 + x} \\
&= 2 \sum_{m=1}^{2p} \frac{2x}{m^2 - x^2} + \frac{2}{1 + x} - \frac{2}{2p + 1 + x}.
\end{aligned}$$

En d'autres termes, on vient de trouver que :

$$\sum_{n=1}^p \frac{2(x/2)}{n^2 - (x/2)^2} + \sum_{n=1}^p \frac{2((x+1)/2)}{n^2 - ((x+1)/2)^2} = 2 \sum_{m=1}^{2p} \frac{2x}{m^2 - x^2} + \frac{2}{1 + x} - \frac{2}{2p + 1 + x}. \quad (*)$$

Par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), on trouve que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(x/2)}{n^2 - (x/2)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((x+1)/2)}{n^2 - ((x+1)/2)^2} = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2x}{m^2 - x^2} + \frac{2}{1 + x}. \quad (**)$$

Par définition de la fonction φ , ceci nous donne avec l'égalité (**) que, pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned}
 \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{1}{x/2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(x/2)}{n^2 - (x/2)^2} + \frac{1}{(x+1)/2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((x+1)/2)}{n^2 - ((x+1)/2)^2} \\
 &= \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(x/2)}{n^2 - (x/2)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2((x+1)/2)}{n^2 - ((x+1)/2)^2} \right] \\
 &= \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} - \left[2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2x}{m^2 - x^2} + \frac{2}{1+x} \right] \\
 &= 2 \left(\frac{1}{x} - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2x}{m^2 - x^2} \right) \\
 &= 2\varphi(x).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in D$:

$$\boxed{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).}$$

- (ii) Montrons que la fonction $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0, 1]$. D'après les questions (1)(c)(iv) et (2)(d)(i), on sait déjà que les fonctions φ et $\cot$ sont continues sur $]0, 1[$, et donc la fonction $\varphi - \cot$ est continue sur $]0, 1[$ comme différence de fonctions continues. De plus, d'après les questions (1)(d)(i) et (2)(d)(ii), on sait aussi que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}.$$

En particulier, la deuxième relation ci-dessus entraîne que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cot(x) - \frac{1}{x} = 0.$$

Dès lors, il s'ensuit par différence que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) - \cot(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) - \left(\cot(x) - \frac{1}{x} \right) = 0 - 0 = 0.$$

En particulier, la fonction $\varphi - \cot$ est prolongeable par continuité en 0. En outre, d'après les questions (1)(d)(ii) et (2)(d)(iii), on sait aussi que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) - \frac{1}{x-1} = 0 \quad \text{et} \quad \cot(x) - \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -\frac{\pi^2(x-1)}{3}.$$

En particulier, la deuxième relation ci-dessus entraîne que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \cot(x) - \frac{1}{x-1} = 0.$$

Dès lors, il s'ensuit par différence que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) - \cot(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-1} \right) - \left(\cot(x) - \frac{1}{x-1} \right) = 0 - 0 = 0.$$

En particulier, la fonction $\varphi - \cot$ est prolongeable par continuité en 1. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi - \cot \text{ est prolongeable par continuité sur } [0, 1].}$$

- (iii) Démontrons que $\varphi = \cot$. Pour ce faire, on désigne par f le prolongement par continuité de la fonction $\varphi - \cot$ à l'intervalle $[0, 1]$ (lequel prolongement existe d'après la question précédente). Par construction, la fonction f est continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et donc elle appartient à E . De plus, d'après les questions (2)(d)(iv) et (2)(e)(i), on sait que, pour tout $x \in D$:

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x) \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$$

Par différence, ceci entraîne que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned}
 T(f)(x) &= f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
 &= (\varphi - \cot)\left(\frac{x}{2}\right) + (\varphi - \cot)\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
 &= \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \cot\left(\frac{x}{2}\right) - \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
 &= 2\varphi(x) - 2\cot(x) \\
 &= 2f(x). \quad (*)
 \end{aligned}$$

Comme les fonctions $T(f)$ et $2f$ sont continues sur $[0, 1]$, il vient avec la relation $(*)$ que :

$$T(f)(0) = \lim_{x \rightarrow 0} T(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) = 2f(0) \quad \text{et} \quad T(f)(1) = \lim_{x \rightarrow 1} T(f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2f(x) = 2f(1).$$

Dès lors, ceci entraîne que $T(f)(x) = 2f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, et donc $T(f) = 2f$. D'après la question (2)(c)(vi), il s'ensuit que la fonction f est constante sur $[0, 1]$. Mais comme $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 d'après les calculs de la question (2)(e)(ii), on en déduit que f est la fonction nulle sur $[0, 1]$, et donc $\varphi(x) = \cot(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$. A noter enfin que, d'après les questions (1)(b)(iii) et (2)(d)(i), les fonctions φ et $\cot$ sont 1-périodiques sur D , et donc leur différence $\varphi - \cot$ l'est aussi sur D . Mais comme $\varphi - \cot$ est nulle sur $]0, 1[$, on en déduit que $\varphi - \cot$ est la fonction nulle sur D , et donc :

$$\boxed{\varphi = \cot.}$$

Autrement dit : $\forall x \in D, \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$

(f) Première application :

(i) Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2}$. D'après la question (2)(d)(ii), on sait que :

$$\cot(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^2 x}{3}.$$

ce qui signifie que $\cot(x) - \frac{1}{x} = -\frac{\pi^2 x}{3} + o(x)$, et donc :

$$\cot(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} - \frac{\pi^2 x}{3} + o(x).$$

Dès lors, ceci nous donne après calculs que :

$$\frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - x \left(\frac{1}{x} - \frac{\pi^2 x}{3} + o(x) \right)}{2x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^2)}{2x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi^2}{6} + o(1).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose : $\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$

(ii) Vérifions que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1 - x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}.$$

Par linéarité de la somme, on trouve que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned}
\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{1^2 - x^2} - \frac{1}{1^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{1-x^2} - \frac{1-x^2}{1-x^2} - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1-1+x^2-x^2}{1-x^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2 - x^2} - \frac{1}{n^2} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 - (n^2 - x^2)}{(n^2 - x^2)n^2} \right| \\
&= \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^2}{(n^2 - x^2)n^2} \right| \\
&= \left| x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - x^2)n^2} \right|.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on obtient que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{1}{(n^2 - x^2)n^2} \right|.$$

Comme x appartient à $]0, 1[$, on voit que $n^2(n^2 - x^2) \geq n^2(n^2 - 1) > 0$ pour tout $n \geq 2$, et donc :

$$\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)n^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\boxed{\left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}}.$$

- (iii) Montrons que : $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$0 \leq \left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 1)}.$$

Par encadrement, ceci entraîne que $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} \right| = 0$, et donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2} = 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-x^2} = 0$, il s'ensuit par somme des limites que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \delta(x) = 0 + 0 = 0,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} .}$$

- (iv) Déterminons $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'après la question (2)(e)(iii), on sait que $\varphi(x) = \cot(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$, et donc :

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

Dès lors, ceci nous donne par linéarité de la somme et après simplification que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = \frac{1 - x\varphi(x)}{2x^2} = \frac{1 - x \left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right)}{2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2}.$$

D'après les questions (2)(f)(i) et (2)(f)(iii), il s'ensuit par unicité de la limite que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x \cot(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} .}$$

(3) Partie III : Développement eulérien de la fonction sinus

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1[$, on pose $\alpha_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)$ et $\beta_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)$.

- (a) Montrons que, pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{k \geq 1} \alpha_k(x)$ converge. Pour ce faire, fixons $x \in [0, 1[$. Si $x = 0$, alors on voit que $\alpha_n(0) = \ln(1) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc la série $\sum_{k \geq 1} \alpha_k(0)$ converge. Supposons maintenant que $x \neq 0$. Comme $\ln(1 + y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$ et que $-\frac{x^2}{n^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on obtient par substitution que :

$$\alpha_n(x) = \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{n^2}.$$

La série $\sum -\frac{x^2}{k^2}$ converge comme multiple d'une série de Riemann convergente, et elle est à termes négatifs. D'après le critère d'équivalence, il s'ensuit que la série $\sum_{k \geq 1} \alpha_k(x)$ converge. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\boxed{\text{la série } \sum_{k \geq 1} \alpha_k(x) \text{ converge.}}$$

On note alors $\beta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x)$.

- (b) Explicitation de β : on fixe un réel $x \in]0, 1[$.

- (i) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, calculons $\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt$ en fonction de $\beta_N(x)$. Par linéarité de l'intégrale, on obtient que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt &= \sum_{n=1}^N \int_0^x \frac{-2t}{n^2 - t^2} dt \\
 &= \sum_{n=1}^N [\ln(n^2 - t^2)]_0^x \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln(n^2 - x^2) - \ln(n^2) \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n^2 - x^2}{n^2} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^N \alpha_n(x).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit par définition de $\beta_N(x)$ que :

$$\boxed{\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt = \beta_N(x).}$$

- (ii) Justifions l'existence de $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$. Comme la fonction φ est continue sur $]0, 1[$ d'après la question (1)(c)(iv), et que $x \in [0, 1[$, on voit que l'intégrale $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$ est impropre en 0. De plus, on sait d'après la question (1)(d)(i) que la fonction $t \mapsto \varphi(t) - \frac{1}{t}$ tend vers 0 quand t tend vers 0. En particulier, l'intégrale $\int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$ est faussement impropre en 0, et donc :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt \text{ converge.}}$$

- (iii) Montrons que : $\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$. Par définition de φ et par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt &= \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^N \frac{2t}{n^2 - t^2} \right) dt \\
 &= \int_0^x \left(\frac{1}{t} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} - \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^N \frac{2t}{n^2 - t^2} \right) dt \\
 &= \int_0^x \left(- \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Comme t appartient à $[0, x]$ et que x appartient à $[0, 1[$, on voit que $n^2 - t^2 \geq n^2 - 1 > 0$ pour tout $n \geq N + 1$, et donc on a pour tout $t \in [0, x]$:

$$0 \leq \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq \frac{2t}{n^2 - 1}.$$

Par sommation, puis par linéarité de la somme, on obtient que, pour tout $t \in [0, x]$:

$$0 \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - 1} = 2t \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, puis par croissance et linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| &= \left| \int_0^x \left(- \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \\
&\leq \int_0^x \left| - \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} \right| dt \\
&\leq \int_0^x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2t}{n^2 - t^2} dt \\
&\leq \int_0^x 2t \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} dt \\
&\leq \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \right) \int_0^x 2t dt \\
&\leq \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \right) [t^2]_0^x \\
&\leq \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \right) x^2.
\end{aligned}$$

Mais comme x appartient à $[0, 1[$, on voit que $x^2 \leq 1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

(iv) Montrons que : $\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt$. D'après la question (3)(b)(i), on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\beta_N(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^N \frac{-2t}{n^2 - t^2} \right) dt.$$

Dès lors, l'inégalité de la question précédente se réécrit sous la forme :

$$0 \leq \left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \beta_N(x) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2 - 1}$ converge (ce que l'on peut voir par équivalence avec une série de Riemann convergente à termes positifs), son reste tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. Par encadrement, ceci entraîne que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \beta_N(x) \right| = 0,$$

ce qui signifie aussi que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt - \beta_N(x) = 0.$$

Mais comme $\beta(x)$ est la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \alpha_k(x)$, $\beta(x)$ est la limite de la suite $(\beta_N(x))$ de ses sommes partielles, et donc :

$$\beta(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \beta_N(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\beta(x) = \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt.}$$

- (v) Montrons que, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $\beta(x) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$. D'après la question (2)(e)(iii), on sait que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\varphi(x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

Dès lors, une primitive de φ est donnée par la fonction $\Phi : x \mapsto \ln(\sin(\pi x))$. D'après la question précédente, ceci nous donne que :

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \int_0^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} [\ln(\sin(\pi t)) - \ln(t)]_a^x \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\ln\left(\frac{\sin(\pi t)}{t}\right) \right]_a^x \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) - \ln\left(\frac{\sin(\pi a)}{a}\right). \quad (*) \end{aligned}$$

Comme $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et que πa tend vers 0 quand a tend vers 0, on a par substitution que :

$$\sin(\pi a) \underset{a \rightarrow 0}{\sim} \pi a.$$

En particulier, ceci entraîne que $\frac{\sin(\pi a)}{a} \underset{a \rightarrow 0}{\sim} \pi$, et donc :

$$\frac{\sin(\pi a)}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \pi.$$

Comme la fonction $\ln$ est continue en π , on obtient par composition des limites que :

$$\ln\left(\frac{\sin(\pi a)}{a}\right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \ln(\pi).$$

Dès lors, il s'ensuit avec la relation (*) que :

$$\beta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) - \ln\left(\frac{\sin(\pi a)}{a}\right) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{x}\right) - \ln(\pi).$$

Par conséquent, on en déduit avec les propriétés du logarithme que :

$$\boxed{\beta(x) = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)}.$$

- (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$.

- (i) Montrons que, pour tout $x \in [0, 1[$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On distingue alors deux cas. Si $x = 0$, alors on voit que $P_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et donc la suite $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Supposons maintenant que $0 < x < 1$. Par passage au logarithme et par définition de la suite $(\beta_n(x))_{n \geq 1}$, on voit que, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \ln(P_n(x)) &= \ln\left(\pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) \\ &= \ln(\pi x) + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \\ &= \ln(\pi x) + \beta_n(x). \quad (*) \end{aligned}$$

Comme $\beta(x)$ est la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \alpha_k(x)$, $\beta(x)$ est la limite de la suite $(\beta_n(x))_{n \geq 1}$ de ses sommes partielles, et en particulier la suite $(\beta_n(x))_{n \geq 1}$ converge. D'après la relation (*), on obtient que la suite $(\ln(P_n(x)))_{n \geq 1}$ converge. Mais comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on

obtient par composition que la suite $(\exp(\ln(P_n(x))))_{n \geq 1}$ converge, et donc la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ converge. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [0, 1[$:

la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Dans la suite on pose $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$ et on note : $P(x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

- (ii) Vérifions que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a : $P(x) = \pi x \exp(\beta(x)) = \sin(\pi x)$. D'après la question (3)(c)(i), on sait que, pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\ln(P_n(x)) = \ln(\pi x) + \beta_n(x).$$

Comme la fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus et d'après la question (3)(b)(v) que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\ln(P(x)) = \ln(\pi x) + \beta(x) = \ln(\pi x \beta(x)) = \ln(\pi x) + \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \ln(\sin(\pi x)).$$

Par composition avec l'exponentielle, ceci entraîne que, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$P(x) = \pi x \beta(x) = \sin(\pi x).$$

A noter que cette égalité est encore vraie pour $x = 0$, car $P(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(0) = 0$ par définition de la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$, et de plus on a $\sin(\pi \cdot 0) = 0$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$P(x) = \pi x \beta(x) = \sin(\pi x).$$

- (iii) Montrons que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est en fait convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour ce faire, fixons un réel x quelconque, ainsi qu'un entier $n_0 > |x| + 1$. Par la suite, on supposera que $x \neq 0$, le cas " $x = 0$ " ayant déjà été traité dans la question (3)(c)(i). On pose alors pour tout $n \geq n_0$:

$$Q_n(x) = \prod_{k=n_0}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Par passage au logarithme, on voit que, pour tout $n \geq 1$:

$$\ln(Q_n(x)) = \ln\left(\prod_{k=n_0}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right) = \sum_{k=n_0}^n \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2})$ converge d'après la question (3)(a), la série $\sum_{n \geq n_0} \ln(1 - \frac{x^2}{n^2})$ converge aussi, et donc sa suite des sommes partielles (qui apparaît à droite de l'égalité ci-dessus) converge également. En particulier, la suite $(\ln(Q_n(x)))_{n \geq n_0}$ converge. Comme l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient par composition que la suite $(Q_n(x))_{n \geq n_0}$ converge. Or, on constate par construction que, pour tout $n \geq n_0$:

$$P_n(x) = \pi x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \pi x \prod_{k=1}^{n_0-1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \prod_{k=n_0}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \pi x \prod_{k=1}^{n_0-1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) Q_n(x).$$

Comme la suite $(Q_n(x))_{n \geq n_0}$ converge et que le produit $\pi x \prod_{k=1}^{n_0-1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$ est bien défini et indépendant de n , il s'ensuit par produit que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On note encore $P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x)$.

- (iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in]-n, n[$. Montrons que : $P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x)$. Par des calculs simples, on trouve que ;

$$\begin{aligned}
 P_n(x+1) &= \pi(x+1) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{(x+1)^2}{k^2}\right) \\
 &= \pi(x+1) \prod_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \prod_{k=1}^n (k^2 - (x+1)^2) \\
 &= \pi(x+1) \prod_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \prod_{k=1}^n (k + (x+1)) \prod_{k=1}^n (k - (x+1)) \\
 &= \pi(x+1) \prod_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \prod_{k=1}^n (k+1+x) \prod_{k=1}^n (k-1-x).
 \end{aligned}$$

En effectuant les changements d'indices $l = k$ dans le premier produit de droite, $l = k+1$ dans le deuxième et $l = k-1$ dans le troisième, on obtient que :

$$\begin{aligned}
 P_n(x+1) &= \pi(x+1) \prod_{l=1}^n \frac{1}{l^2} \prod_{l=2}^{n+1} (l+x) \prod_{l=0}^{n-1} (l-x) \\
 &= \pi(x+1) \prod_{l=1}^n \frac{1}{l^2} \left(\prod_{l=1}^n (l+x) \right) \cdot \frac{n+1+x}{1+x} \cdot \left(\prod_{l=1}^n (l-x) \right) \cdot \frac{-x}{n-x} \\
 &= \pi(x+1) \prod_{l=1}^n \frac{1}{l^2} \left(\prod_{l=1}^n (l+x) \right) \left(\prod_{l=1}^n (l-x) \right) \cdot \frac{n+1+x}{1+x} \cdot \frac{-x}{n-x} \\
 &= \pi(x+1) \left(\prod_{l=1}^n \frac{1}{l^2} (l+x)(l-x) \right) \cdot \frac{n+1+x}{1+x} \cdot \frac{-x}{n-x} \\
 &= \pi(x+1) \prod_{l=1}^n \left(\frac{l^2 - x^2}{l^2} \right) \cdot \frac{n+1+x}{1+x} \cdot \frac{-x}{n-x} \\
 &= \pi(x+1) \prod_{l=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \cdot \frac{n+1+x}{1+x} \cdot \frac{-x}{n-x} \\
 &= (x+1)\pi x \prod_{l=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{l^2} \right) \cdot \frac{n+1+x}{1+x} \cdot \frac{-1}{n-x} \\
 &= (x+1)P_n(x) \cdot \frac{n+1+x}{1+x} \cdot \frac{-1}{n-x} \\
 &= -P_n(x) \frac{n+1+x}{n-x}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-n, n[$:

$$\boxed{P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x).}$$

- (v) Montrons tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x+1) = -P(x)$. Pour ce faire, fixons un réel x quelconque. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n > |x|$:

$$P_n(x+1) = -\left(\frac{n+1+x}{n-x}\right) P_n(x). \quad (*)$$

Comme $\frac{n+1+x}{n-x}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, il s'ensuit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*) que :

$$P(x+1) = -P(x).$$

Vérifions alors que P est 2-périodique sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve avec la relation précédente que :

$$P(x+2) = -P(x+1) = -(-P(x)) = P(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } P \text{ est 2-périodique sur } \mathbb{R}.$$

- (vi) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $P(x) = \sin(\pi x)$. D'après la question (3)(c)(ii), on sait déjà que $P(x) = \sin(\pi x)$ pour tout $x \in [0, 1[$. Fixons alors un réel $x \in [1, 2[$. Comme $x-1 \in [0, 1[$, on voit d'après la question précédente et la question (3)(c)(ii) que :

$$P(x) = -P(x-1) = -\sin(\pi(x-1)) = -\sin(\pi x - \pi) = -(-\sin(\pi x)) = \sin(\pi x).$$

En particulier, ceci nous donne que $P(x) = \sin(\pi x)$ pour tout $x \in [0, 2[$. Mais comme les fonctions P et $x \mapsto \sin(\pi x)$ sont 2-périodiques, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(x) = \sin(\pi x).$$

Finalement, on obtient ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x) = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

(4) Partie IV : Un autre développement du sinus

Dans cette partie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D \cup \{0\}$, on pose $\lambda_n(x) = \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt$ et $\nu_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{n^2 - x^2}$.

- (a) Montrons que, pour tout $x \in D \cup \{0\}$, la série de terme général $\nu_n(x)$ est convergente. Pour ce faire, on distingue deux cas. Si $x = 0$, alors on voit que $\nu_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et donc la série $\sum_{n \geq 1} \nu_n(0)$ converge. Si maintenant $x \in D$, alors on constate que :

$$|\nu_n(x)| = \frac{|x|}{|n^2 - x^2|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|x|}{n^2}.$$

En particulier, la série $\sum \frac{|x|}{n^2}$ converge comme multiple d'une série de Riemann convergente. Comme de plus $\frac{|x|}{n^2}$ est positif pour tout $n \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} |\nu_n(x)|$ converge par équivalence. En particulier, la série $\sum_{n \geq 1} \nu_n(x)$ converge absolument, et donc elle converge pour tout $x \in D$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \nu_n(x) \text{ converge pour tout } x \in D \cup \{0\}.$$

La fonction ψ est donc définie sur $D \cup \{0\}$.

- (b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D \cup \{0\}$, on a :

$$\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) \nu_n(x).$$

Partant de la formule trigonométrique " $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$ " valable pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que :

$$\begin{aligned} \lambda_n(x) &= \int_0^\pi \cos(xt) \cos(nt) dt \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} (\cos(xt + nt) + \cos(xt - nt)) dt. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, ceci entraîne que :

$$\begin{aligned}
 \lambda_n(x) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos((x+n)t) dt + \int_0^\pi \cos((x-n)t) dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{\sin((x+n)t)}{x+n} \right]_0^\pi + \left[\frac{\sin((x-n)t)}{x-n} \right]_0^\pi \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} - 0 + \frac{\sin((x-n)\pi)}{x-n} - 0 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} + \frac{\sin((x-n)\pi)}{x-n} \right).
 \end{aligned}$$

D'après les formules d'addition pour sin, on obtient que :

$$\begin{aligned}
 \lambda_n(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((x+n)\pi)}{x+n} + \frac{\sin((x-n)\pi)}{x-n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\pi x) \cos(n\pi) + \sin(n\pi) \cos(\pi x)}{x+n} + \frac{\sin(\pi x) \cos(-n\pi) + \sin(-n\pi) \cos(\pi x)}{x-n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\pi x)(-1)^n + 0 \cdot \cos(\pi x)}{x+n} + \frac{\sin(\pi x)(-1)^n + 0 \cdot \cos(\pi x)}{x-n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\pi x)(-1)^n}{x+n} + \frac{\sin(\pi x)(-1)^n}{x-n} \right) \\
 &= \frac{\sin(\pi x)(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \\
 &= \frac{\sin(\pi x)(-1)^n}{2} \left(\frac{x-n+x+n}{(x+n)(x-n)} \right) \\
 &= \frac{\sin(\pi x)(-1)^n}{2} \left(\frac{2x}{(x+n)(x-n)} \right) \\
 &= \sin(\pi x)(-1)^n \left(\frac{x}{x^2-n^2} \right) \\
 &= -\sin(\pi x)(-1)^n \left(\frac{x}{n^2-x^2} \right).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D \cup \{0\}$:

$$\boxed{\lambda_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x \sin(\pi x)}{n^2 - x^2} = \sin(\pi x) \nu_n(x).}$$

(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $C_n(t) = \sum_{k=1}^n \cos(kt)$.

(i) Soit t un réel qui n'est pas de la forme $2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, car $C_1(t) = \cos(t)$ par définition et de plus, on a d'après les formules d'addition pour cos et de duplication d'angle pour cos et sin :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2} \cos(t) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{2} \cos(t) \\
&= -\frac{1}{2} + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos(t) \\
&= -\frac{1}{2} + \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1\right) \\
&= 2 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \\
&= \cos(t).
\end{aligned}$$

A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence et d'après la formule trigonométrique " $\sin(b) \cos(a) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$ ", on obtient que :

$$\begin{aligned}
C_{n+1}(t) &= \sum_{k=1}^{n+1} \cos(kt) \\
&= \sum_{k=1}^n \cos(kt) + \cos((n+1)t) \\
&= C_n(t) + \cos((n+1)t) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \cos((n+1)t) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{t}{2} + (n+1)t\right) - \sin\left((n+1)t - \frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) + \sin\left((2n+3)\frac{t}{2}\right) - \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+3)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},
\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$, et donc on vient de montrer que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C_n(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.}$$

(ii) Explicitons $C_n(t)$ lorsque t s'écrit $2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, on constate que :

$$C_n(t) = C_n(2p\pi) = \sum_{k=1}^n \cos(2pk\pi) = \sum_{k=1}^n 1 = n.$$

Par conséquent, on en déduit que, si t est de la forme $2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{C_n(t) = n.}$$

(iii) Donnons la valeur de $I_n = \int_0^\pi C_n(t)dt$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$I_n = \int_0^\pi C_n(t)dt = \int_0^\pi \sum_{k=1}^n \cos(kt)dt = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi.$$

Après simplification, on obtient que :

$$I_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sin(k\pi)}{k} - \frac{\sin(0)}{k} \right) = \sum_{k=1}^n (0 - 0) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{I_n = 0.}$$

(d) Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. Montrons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi F(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt = 0$$

Pour ce faire, on pose $u(t) = F(t)$ et $v(t) = -\frac{2}{2n+1} \cos \left((2n+1) \frac{t}{2} \right)$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ et de plus, on a $u'(t) = F'(t)$ et $v'(t) = \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right)$ pour tout $t \in [0, \pi]$. Par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi F(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt &= \int_0^\pi u(t)v'(t)dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)v(t)dt \\ &= \left[-\frac{2F(t)}{2n+1} \cos \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{2F'(t)}{2n+1} \cos \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, ceci nous donne que :

$$\int_0^\pi F(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt = -\frac{2F(\pi)}{2n+1} \cos \left(\frac{2n+1\pi}{2} \right) + \frac{2F(0)}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi F'(t) \cos \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on trouve que :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi F(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt \right| &= \left| -\frac{2F(\pi)}{2n+1} \cos \left(\frac{2n+1\pi}{2} \right) + \frac{2F(0)}{2n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi F'(t) \cos \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt \right| \\ &\leq \left| -\frac{2F(\pi)}{2n+1} \cos \left(\frac{2n+1\pi}{2} \right) \right| + \left| \frac{2F(0)}{2n+1} \right| + \frac{2}{2n+1} \left| \int_0^\pi F'(t) \cos \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt \right| \\ &\leq \left| \frac{2F(\pi)}{2n+1} \cos \left(\frac{2n+1\pi}{2} \right) \right| + \left| \frac{2F(0)}{2n+1} \right| + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |F'(t) \cos \left((2n+1) \frac{t}{2} \right)| dt. \end{aligned}$$

Comme $|\cos(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient par croissance de l'intégrale que :

$$0 \leq \left| \int_0^\pi F(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt \right| \leq \left| \frac{2F(\pi)}{2n+1} \right| + \left| \frac{2F(0)}{2n+1} \right| + \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |F'(t)| dt.$$

Par encadrement, il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^\pi F(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt \right| = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi F(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt = 0.}$$

(e) Pour tout $x \in D$, on définit la fonction Φ_x sur $[0, \pi]$ par :

$$\Phi_x(t) = \begin{cases} \frac{\cos(xt) - 1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

On admet que la fonction Φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

(i) Vérifions que, pour tout $t \in [0, \pi]$, on a :

$$C_n(t) (\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2} (\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2} \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).$$

Pour $t = 0$, on constate que :

$$C_n(0) (\cos(0) - 1) = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} (\cos(0) - 1) + \frac{1}{2} \Phi_x(0) \sin(0) = 0,$$

d'où l'égalité recherchée pour $t = 0$. Si maintenant $t \in]0, \pi]$, on obtient d'après la question (4)(c)(i) et par définition de la fonction Φ_x que :

$$\begin{aligned} C_n(t) (\cos(xt) - 1) &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) (\cos(xt) - 1) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2} \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) \frac{(\cos(xt) - 1)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= -\frac{1}{2} (\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2} \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in [0, \pi]$:

$$\boxed{C_n(t) (\cos(xt) - 1) = -\frac{1}{2} (\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2} \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right).}$$

(ii) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) dt + I_n.$$

Par définition des λ_k et par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(xt) \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \cos(xt) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \cos(xt) C_n(t) dt \\ &= \int_0^\pi (\cos(xt) - 1) C_n(t) dt + \int_0^\pi C_n(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la question (4)(c)(iii), on sait que $I_n = \int_0^\pi C_n(t) dt = 0$. Dès lors, ceci nous donne avec la question précédente que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = \int_0^\pi (\cos(xt) - 1) C_n(t) dt + I_n = \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} (\cos(xt) - 1) + \frac{1}{2} \Phi_x(t) \sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right) \right) dt + I_n.$$

Toujours par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) &= \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} (\cos(xt) - 1) \right) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt + I_n \\
&= \left[-\frac{\sin(xt)}{2x} + \frac{t}{2} \right]_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt + I_n \\
&= -\frac{\sin(\pi x)}{2x} + 0 + \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt + I_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt + I_n.}$$

(f) Application :

(i) Démontrons que, pour tout $x \in D$:

$$\psi(x) \sin(\pi x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in D$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt + I_n.$$

D'après la question (4)(c)(iii), on sait aussi que $I_n = 0$, et donc :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \Phi_x(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt.$$

Comme Φ_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ par hypothèse, on voit avec la question (4)(d) que :

$$\int_0^\pi \Phi_x(t) \sin \left((2n+1) \frac{t}{2} \right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier, ceci implique que :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

D'après la question (4)(b), on sait que $\lambda_k(x) = \sin(\pi x) \nu_k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in D \cup \{0\}$. Dès lors, la limite ci-dessus peut se réécrire sous la forme :

$$\sum_{k=1}^n \sin(\pi x) \nu_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

Par linéarité de la somme, on obtient que, pour tout $x \in D$:

$$\sin(\pi x) \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

Mais comme la série $\sum \nu_k(x)$ converge d'après la question (4)(a), et que sa somme est égale à $\psi(x)$ par définition, on en déduit que, pour tout $x \in D$:

$$\boxed{\sin(\pi x) \psi(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.}$$

(ii) Montrons que, pour tout $x \in D$, on a :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2}.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in D$:

$$\sin(\pi x) \psi(x) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

Par définition de la fonction $\psi(x)$, ceci signifie que, pour tout $x \in D$:

$$\sin(\pi x) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x}{n^2 - x^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\pi}{2}.$$

Après division par $\sin(\pi x)$ et multiplication par 2, ceci entraîne que, pour tout $x \in D$:

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x}{n^2 - x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Par conséquent, on en déduit par linéarité de la somme que, pour tout $x \in D$:

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - x^2} .}$$