Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 8 : 17 novembre 2025)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les variables aléatoires discrètes, ainsi que sur l'espérance et le conditionnement, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Variables aléatoires discrètes (révisions):**
Définition d'une variable aléatoire et d'une variable aléatoire discrète.
"Toute combinaison linéaire, tout produit, tout minimum et tout maximum d'un nombre fini de variables aléatoires est une variable aléatoire".
Définition du support d'une variable aléatoire discrète.
Système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète.
Définition et propriétés de la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète.
Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
Loi de la composée à gauche d'une variable aléatoire discrète avec une fonction.
Définition de l'espérance pour les variables aléatoires discrètes - Propriétés de l'espérance (transfert, linéarité, positivité, croissance, existence par domination).
Définition et propriétés des moments d'ordre r d'une variable aléatoire discrète.
Définition et propriétés de la variance et de l'écart-type d'une variable aléatoire discrète.
Formule de Koenig-Huygens et formule "$V(aX+b) = a^2V(X)$".
Notion de variable aléatoire certaine, espérance et variance.
Lois uniforme, de Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson : Cadre d'application, espérance **(*)** et variance **(*)** à connaître et à savoir calculer pour chacune de ces lois.

(2) **Espérance et conditionnement:**
Définition d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble au plus dénombrable.
Définition et propriétés des familles de réels indexées sur un ensemble dénombrable.
Définition des séries absolument convergentes indexées sur un ensemble dénombrable.
Critère de comparaison - Théorème de sommation par paquets - Linéarité - Produit de familles sommables - Théorème de Fubini pour les séries doubles absolument convergentes.
Loi d'une variable aléatoire discrète sachant un événement A de probabilité non nulle.
Espérance d'une variable aléatoire discrète sachant A - Formule de l'espérance totale.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$. Justifier que $Y = \dfrac{1}{X+1}$ admet une espérance et la calculer.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([X=n+1]) = \frac{4}{n}P([X=n]).$$

(1) Déterminer la loi de X.
(2) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 3. Montrer que la série double $\displaystyle\sum_{i,j\geq 2} \frac{1}{i^j}$ est absolument convergente et calculer sa somme.

Exercice 4. Soit $(\lambda, p) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ et soit N le nombre de voitures passant devant une station essence. On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre λ et que chaque voiture s'arrête à la station essence avec probabilité p, et ce indépendamment les unes des autres. Soit S le nombre de véhicules s'arrêtant à la station.
(1) Déterminer la loi de S sachant $[N=n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) Montrer que S admet une espérance et la calculer.