

Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques n°3

Corrigé de l'exercice 1. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donnée une liste $U = (u_1, \dots, u_n)$ de réels de longueur $n > 0$ quelconque, construit et affiche la liste $V = (v_1, \dots, v_n)$ de réels telle que $v_k = \max\{u_1, \dots, u_k\}$ pour tout $k \geq 1$. Par exemple, si $U = (2, 1, 5, 6, 4)$, la fonction retournera le vecteur $V = (2, 2, 5, 6, 6)$. Pour ce faire, on construit pas à pas la liste des maximums $v_1, \dots, v_n$ à l'aide de la commande `np.max`. Plus précisément, on procède comme suit :

```
def maxliste(u):
    n=np.shape(u)[0]
    v=np.zeros(n)
    for k in range(0,n):
        v[k]=np.max(u[0:k+1])
    return v
```

Corrigé de l'exercice 2. Ecrivons une fonction en Python qui reçoit un entier k et un vecteur v de taille n quelconque, à coefficients entiers, puis qui donne le plus petit indice i tel que $v_i = k$ s'il en existe un, et la valeur $n + 1$ sinon. L'idée essentielle est de passer en revue les différents éléments du vecteur v (du premier au dernier), et de s'arrêter au premier élément rencontré qui est égal à k (si jamais il en existe un). Pour ce faire, on va utiliser une boucle `while` (puisque l'on doit réitérer un procédé dont on ne sait pas quand il va s'arrêter). Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
def occur(k,v):
    n=np.shape(v)[0]
    i=0
    while i<n and v[i]!=k:
        i=i+1
    return i+1
```

Corrigé de l'exercice 3. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 3$ et des réels a, b, c , construit et affiche la matrice carrée de taille n suivante :

$$A = \begin{pmatrix} c & b & \dots & \dots & b \\ a & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & \dots & a & c \end{pmatrix}.$$

Pour ce faire, on procèdera comme suit :

```
def matrice(n,a,b,c):
    m=np.zeros([n,n])
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            if i==j:
                m[i,j]=c
            elif i<j:
                m[i,j]=b
            else:
                m[i,j]=a
    return m
```

Corrigé de l'exercice 4. Dans tout l'exercice, on désigne par X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on admet le résultat suivant, plus connu sous le nom d'*inégalité de Bienaymé-Tchebychev* : Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

(1) Une première inégalité (*).

- (a) Montrons que $P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$. Comme X est une variable de Poisson de paramètre λ , elle admet d'après le cours un moment d'ordre 2. En particulier, X admet une espérance et une variance toutes deux égales à λ . Dès lors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire X et au réel $\lambda > 0$, on trouve que :

$$P(|X - \lambda| \geq \lambda) = P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

- (b) Montrons l'inégalité (*) : $P([X \geq 2\lambda]) \leq \frac{1}{\lambda}$. Pour ce faire, supposons que l'événement $[X \geq 2\lambda]$ soit réalisé. Alors on voit que $X \geq 2\lambda$, ce qui entraîne que $X - \lambda \geq \lambda$, et donc $|X - \lambda| \geq \lambda$ vu que $\lambda > 0$. En particulier, l'événement $[|X - \lambda| \geq \lambda]$ est aussi réalisé, et donc :

$$[X \geq 2\lambda] \subset [|X - \lambda| \geq \lambda].$$

Par croissance des probabilités et d'après la question précédente, on trouve que :

$$P([X \geq 2\lambda]) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$P([X \geq 2\lambda]) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

(2) Première amélioration de l'inégalité (*).

- (a) Soit Y une variable aléatoire discrète, à valeurs positives et admettant une espérance, et posons $Y(\Omega) = \{y_0, y_1, \dots, y_n, \dots\}$. Montrons que, pour tout $a > 0$:

$$P([Y \geq a]) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

Pour ce faire, rappelons que l'espérance de Y est donnée par :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k P([Y = y_k]).$$

Partant de là, on peut scinder cette somme en deux parties suivant les valeurs de Y :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k P([Y = y_k]) = \sum_{y_k \geq a} y_k P([Y = y_k]) + \sum_{y_k < a} y_k P([Y = y_k]).$$

Comme Y ne prend que des valeurs ≥ 0 , on voit que $y_k \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne que $\sum_{y_k < a} y_k P([Y = y_k]) \geq 0$, et donc :

$$E(Y) \geq \sum_{y_k \geq a} y_k P([Y = y_k]).$$

Posons alors $I = \{k \in \mathbb{N}, y_k \geq a\}$. Alors l'inégalité ci-dessus se réécrit sous la forme :

$$E(Y) \geq \sum_{k \in I} y_k P([Y = y_k]).$$

Comme de plus $y_k \geq a$ pour tout $k \in I$ et qu'une probabilité ne prend que des valeurs positives, on obtient par linéarité de la somme que :

$$E(Y) \geq \sum_{k \in I} y_k P([Y = y_k]) \geq \sum_{k \in I} a P([Y = y_k]) = a \sum_{k \in I} P([Y = y_k]). \quad (*)$$

En outre, on voit que l'événement $[Y \geq a]$ est réalisé si et seulement s'il existe un indice $k \in \mathbb{N}$ tel que $Y = y_k$ et $y_k \geq a$, c'est-à-dire si l'un des $[Y = y_k]$ avec $k \in I$ est réalisé, et donc :

$$[Y \geq a] = \bigcup_{k \in I} [Y = y_k].$$

Comme la famille $([Y = y_k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on obtient que :

$$P([Y \geq a]) = P\left(\bigcup_{k \in I} [Y = y_k]\right) = \sum_{k \in I} P([Y = y_k]). \quad (**)$$

Dès lors, on trouve avec les relations (*) et (**) que, pour tout $a > 0$:

$$E(Y) \geq a \sum_{k \in I} P([Y = y_k]) = aP([Y \geq a]).$$

Par conséquent, on en déduit après division que, pour tout $a > 0$:

$$P([Y \geq a]) \leq \frac{E(Y)}{a}.$$

- (b) Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance nulle et de variance σ^2 . Montrons que, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq P([(Z+x)^2 \geq (a+x)^2]).$$

Pour ce faire, supposons que l'événement $[Z \geq a]$ soit réalisé. Alors on voit que $Z \geq a$, ce qui entraîne que $Z+x \geq a+x$. Comme a et x sont tous deux ≥ 0 , on obtient que $a+x \geq 0$, et donc $(Z+x)^2 \geq (a+x)^2$. En particulier, l'événement $[(Z+x)^2 \geq (a+x)^2]$ est aussi réalisé, et donc :

$$[Z \geq a] \subset [(Z+x)^2 \geq (a+x)^2].$$

Par croissance des probabilités, on en déduit que :

$$P([Z \geq a]) \leq P([(Z+x)^2 \geq (a+x)^2]).$$

- (c) Montrons que, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$

Pour ce faire, on commence par remarquer que $(Z+x)^2 = Z^2 + 2xZ + x^2$ pour tout $x \geq 0$. Comme la variable aléatoire Z admet une variance, elle admet aussi un moment d'ordre 2, et donc une espérance. En particulier, les variables aléatoires Z^2 et Z admettent une espérance, et donc la variable aléatoire $(Z+x)^2 = Z^2 + 2xZ + x^2$ admet aussi une espérance par linéarité. De plus, d'après la formule de Koenig-Huygens et par linéarité de l'espérance, on trouve que :

$$\begin{aligned} E((Z+x)^2) &= E(Z^2 + 2xZ + x^2) \\ &= E(Z^2) + 2xE(Z) + x^2 \\ &= E(Z^2) - (E(Z))^2 + (E(Z))^2 + 2xE(Z) + x^2 \\ &= V(Z) + (E(Z))^2 + 2xE(Z) + x^2 \\ &= \sigma^2 + 0^2 + 2x \times 0 + x^2 \\ &= \sigma^2 + x^2. \end{aligned}$$

D'après les questions (2)(a) et (2)(b), on obtient que, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq P([(Z+x)^2 \geq (a+x)^2]) \leq \frac{E((Z+x)^2)}{(a+x)^2} = \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$

A noter que ceci fait sens vu que $a+x > 0$ car $a > 0$ et $x \geq 0$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}.$$

- (d) Etudions tout d'abord la fonction f qui à tout $x \in \mathbb{R}_+$, associe $\frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$. Par définition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ (vu que ce sont des polynômes réels), dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ (car $a > 0$). De plus, pour tout

$x \in \mathbb{R}_+$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2} \right)' \\
 &= \frac{(\sigma^2 + x^2)'(a+x)^2 - ((a+x)^2)'(\sigma^2 + x^2)}{(a+x)^4} \\
 &= \frac{2x(a+x)^2 - 2(a+x)(\sigma^2 + x^2)}{(a+x)^4} \\
 &= \frac{2x(a+x) - 2(\sigma^2 + x^2)}{(a+x)^3} \\
 &= \frac{2ax + 2x^2 - 2\sigma^2 - 2x^2}{(a+x)^3} \\
 &= \frac{2(ax - \sigma^2)}{(a+x)^3}.
 \end{aligned}$$

Comme $(a+x)^3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on voit que le signe de $f'(x)$ est donné par celui de $(ax - \sigma^2)$. Dès lors, on obtient que $f'(x) < 0$ si $x < \frac{\sigma^2}{a}$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \geq \frac{\sigma^2}{a}$. En particulier, la fonction f est décroissante sur $[0, \frac{\sigma^2}{a}]$ et croissante sur $[\frac{\sigma^2}{a}, +\infty[$, et de plus :

$$f\left(\frac{\sigma^2}{a}\right) = \frac{\sigma^2 + (\frac{\sigma^2}{a})^2}{(a + \frac{\sigma^2}{a})^2} = \frac{a^2\sigma^2 + \sigma^4}{(a^2 + \sigma^2)^2} = \frac{(a^2 + \sigma^2)\sigma^2}{(a^2 + \sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.$$

En outre, comme tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré, on trouve que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit le tableau de variations suivant pour f :

x	0	$\frac{\sigma^2}{a}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$\frac{\sigma^2}{a^2}$	$\searrow$	$\nearrow$	1
		$\frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$		

A présent, montrons que, pour tout $a > 0$:

$$P([Z \geq a]) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

D'après la question précédente, on sait que $P([Z \geq a]) \leq f(x)$ pour tout $x \geq 0$. En particulier, ceci est vrai si $x = \frac{\sigma^2}{a}$, ce qui entraîne que :

$$P([Z \geq a]) \leq f\left(\frac{\sigma^2}{a}\right) = \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $a > 0$:

$$\boxed{P([Z \geq a]) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}.$$

(e) Montrons l'inégalité suivante :

$$P([X \geq 2\lambda]) \leq \frac{1}{\lambda + 1}.$$

Pour ce faire, on pose $Z = X - \lambda$. Comme X est une variable de Poisson, X admet un moment d'ordre 2 et en particulier X et X^2 admettent une espérance. Dès lors, comme $Z^2 = (X - \lambda)^2 = X^2 - 2\lambda X + \lambda^2$, on voit par linéarité de l'espérance que Z^2 admet une espérance, et donc Z admet un moment d'ordre 2. De plus, par linéarité de l'espérance, on trouve que :

$$E(Z) = E(X - \lambda) = E(X) - \lambda = \lambda - \lambda = 0.$$

D'après les propriétés de la variance, on obtient que :

$$V(Z) = V(X - \lambda) = V(X) = \lambda.$$

Si l'on pose à présent $a = \lambda$, alors on trouve avec la question précédente que :

$$P([X \geq 2\lambda]) = P([X - \lambda \geq \lambda]) = P([Z \geq \lambda]) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} = \frac{\lambda}{\lambda + \lambda^2}$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$\boxed{P([X \geq 2\lambda]) \leq \frac{1}{\lambda + 1}.}$$

(3) Deuxième amélioration de l'inégalité (*). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k.$$

(a) Justifions l'existence de $G_X(t)$ et montrons que : $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$. Par définition, ceci revient à établir que la série $\sum_{k \geq 0} P([X = k])t^k$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que sa somme est égale à $e^{\lambda(t-1)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme X suit la loi de Poisson de paramètre λ , on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P([X = k])t^k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Comme la série exponentielle $\sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ converge d'après le cours, la série $\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ converge par linéarité, et donc la série $\sum_{k \geq 0} P([X = k])t^k$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus, par linéarité de la somme, on trouve que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G_X(t) \text{ existe et de plus : } G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}.$$

(b) Montrons que, pour tout $t \in [1, +\infty[$ et pour tout $a > 0$, on a :

$$P([X \geq a]) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

Pour ce faire, on se fixe un réel $t \in [1, +\infty[$ et l'on pose $Y = t^X$. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} P([X = k])t^k$ converge absolument, ce qui revient à dire qu'elle converge vu qu'elle est à termes positifs. Mais comme cette série converge d'après la question (3)(a), il s'ensuit d'après le théorème de transfert que Y admet une espérance donnée par :

$$E(Y) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([X = k])t^k = G_X(t).$$

De plus, on voit que $X \geq a$ si et seulement si $Y = t^X \geq t^a$, et donc $[X \geq a] = [Y \geq t^a]$. Mais comme $t^a > 0$, l'inégalité de la question (2)(a) entraîne que :

$$P([X \geq a]) = P([Y \geq t^a]) \leq \frac{E(Y)}{t^a} = \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in [1, +\infty[$ et pour tout $a > 0$:

$$\boxed{P([X \geq a]) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

(c) Déterminons le minimum sur $[1, +\infty[$ de la fonction $g : t \mapsto \frac{e^{t-1}}{t^2}$. Par construction, la fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a :

$$g'(t) = \left(\frac{e^{t-1}}{t^2} \right)' = \frac{(e^{t-1})'t^2 - 2te^{t-1}}{t^4} = \frac{e^{t-1}t^2 - 2te^{t-1}}{t^4} = \frac{e^{t-1}(t-2)}{t^3}.$$

Dès lors, on voit que le signe de $g'(t)$ est donné par celui de $(t-2)$, et donc la fonction g' est négative sur $[1, 2]$ et positive sur $[2, +\infty[$. En particulier, la fonction g est croissante sur $[1, 2]$ et décroissante sur $[2, +\infty[$, et donc elle admet un minimum en $t = 2$. Par des calculs simples, on trouve alors que :

$$g(2) = \frac{e^{2-1}}{2^2} = \frac{e}{4}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le minimum de la fonction } g \text{ sur } [1, +\infty[\text{ est égal à } \frac{e}{4}.}$$

(d) Montrons l'inégalité suivante :

$$P([X \geq 2\lambda]) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

D'après la question (3)(b), on trouve que, pour tout $t \in [1, +\infty[$:

$$P([X \geq 2\lambda]) \leq \frac{G_X(t)}{t^{2\lambda}} = \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} = \left(\frac{e^{(t-1)}}{t^2}\right)^\lambda = (g(t))^\lambda$$

Comme ceci est vrai pour tout $t \in [1, +\infty[$, ceci est vrai a fortiori pour $t = 2$, ce qui entraîne avec la question (3)(c) que :

$$P([X \geq 2\lambda]) \leq (g(2))^\lambda = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P([X \geq 2\lambda]) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.}$$

(4) Montrons que cette dernière amélioration est meilleure que celle obtenue à la question (2)(e) dès que λ prend des valeurs assez grandes. Pour ce faire, on peut remarquer que :

$$\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda}{\frac{1}{\lambda+1}} = (\lambda+1) \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Comme $0 < \frac{e}{4} < 1$, on obtient par croissance comparée que :

$$\lambda \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

Dès lors, il s'ensuit d'après les propriétés des équivalents que :

$$\frac{\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda}{\frac{1}{\lambda+1}} = (\lambda+1) \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

ce que l'on peut retraduire sous la forme suivante :

$$\left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\lambda+1}\right).$$

En d'autres termes, la dernière amélioration est négligeable devant celle de la question (2)(e) quand λ tend vers $+\infty$, ce qui entraîne que :

$$\boxed{\text{la dernière amélioration est meilleure que celle de la question (2)(e) pour } \lambda \text{ assez grand.}}$$

Corrigé du problème 1. Dans tout le problème, on désigne par a, b des entiers naturels tous deux non nuls, et l'on pose $N = a + b$. On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires, dans laquelle on effectue des tirages successifs, au hasard et "avec remise" d'une boule selon les règles suivantes :

- lorsque la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne.
- lorsque la boule tirée est noire, on ne la remet pas dans l'urne et on la remplace par une boule blanche.

(1) Soit Y le nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

- (a) Déterminons l'ensemble des valeurs prises par Y . Par définition, chaque fois que l'on tire une boule noire, on ne la remet pas dans l'urne. Dès lors, au cours des b premiers tirages, soit on a tiré une boule blanche, soit on a éliminé toutes les boules noires de l'urne, et une boule blanche apparaîtra au $(b+1)$ -ème tirage. En particulier, on voit que $Y(\Omega) \subset \{1, \dots, b+1\}$. De plus, Y peut prendre toutes les valeurs entières comprises en 1 et $b+1$. En effet, pour tout $k \in \{1, \dots, b+1\}$, on voit que l'événement " $Y = k$ " sera réalisé si l'on obtient une boule noire au cours des tirages $n^\circ 1, 2, \dots, k-1$, puis si l'on sort une boule blanche au tirage $n^\circ k$. Par conséquent :

$$\boxed{Y(\Omega) = \{1, \dots, b+1\}.}$$

- (b) Calculons $P([Y = k])$ pour tout $k \in \{1, \dots, b+1\}$. Pour ce faire, pour tout $i \in \{1, \dots, b+1\}$, on désigne par N_i l'événement "on tire une boule noire au i -ème tirage" et par B_i l'événement "on tire une boule blanche au i -ème tirage". Par définition, on voit que l'événement " $[Y = k]$ " est réalisé si l'on obtient une boule noire au cours des tirages $n^o 1, 2, \dots, k-1$, puis si l'on sort une boule blanche au tirage $n^o k$, et donc :

$$[Y = k] = N_1 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k.$$

D'après la formule des probabilités composées, on obtient que :

$$P([Y = k]) = P(N_1)P_{N_1}(N_2) \dots P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k).$$

Comme l'urne contient N boules dont b noires, on peut remarquer que $P(N_1) = \frac{b}{N}$. A présent, supposons que l'événement $N_1 \cap \dots \cap N_{i-1}$ soit réalisé, où $2 \leq i \leq k-1$. Alors cela signifie que l'on n'a obtenu que des boules noires lors des $(i-1)$ premiers tirages. Donc l'événement N_i sera réalisé si l'on obtient une nouvelle boule noire lors du i -ème tirage. Mais comme il reste N boules dans l'urne, dont $b - (i-1)$ boules noires, il s'ensuit que :

$$P_{N_1 \cap \dots \cap N_{i-1}}(N_i) = \frac{(b - (i-1))}{N} = \frac{b - i + 1}{N}.$$

Enfin, supposons que l'événement $N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}$ soit réalisé. Alors cela signifie que l'on n'a obtenu que des boules noires lors des $(k-1)$ premiers tirages. Donc l'événement B_k sera réalisé si l'on obtient une boule blanche lors du k -ème tirage. Mais comme il reste N boules dans l'urne, dont $a + (k-1)$ boules blanches, il s'ensuit que :

$$P_{N_1 \cap \dots \cap N_{k-1}}(B_k) = \frac{a + k - 1}{N}.$$

Dès lors, on trouve que :

$$P([Y = k]) = \frac{b}{N} \left(\prod_{i=2}^{k-1} \frac{b - i + 1}{N} \right) \times \frac{a + k - 1}{N}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \{1, \dots, b+1\}$:

$$P([Y = k]) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{b - i + 1}{N} \right) \frac{a + k - 1}{N}.$$

- (c) Vérifions d'abord que $P([Y = b+1]) = \frac{b!}{N^b}$. D'après la question précédente, on voit que :

$$\begin{aligned} P([Y = b+1]) &= \left(\prod_{i=1}^b \frac{b - i + 1}{N} \right) \frac{a + b + 1 - 1}{N} \\ &= \left(\prod_{i=1}^b \frac{b - i + 1}{N} \right) \frac{N}{N} \\ &= \frac{b \times (b-1) \times \dots \times 1}{N \times \dots \times N}, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$P([Y = b+1]) = \frac{b!}{N^b}.$$

A présent, montrons que, pour tout $k \in \{1, \dots, b\}$, on a :

$$P([Y = k]) = \frac{b!}{(b - (k-1))! N^{k-1}} - \frac{b!}{(b - k)! N^k}.$$

Toujours d'après la question précédente, on voit que :

$$\begin{aligned}
P([Y = k]) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{b-i+1}{N} \right) \frac{a+k-1}{N} \\
&= \frac{b \times (b-1) \times \dots \times (b-k+2) \times (a+k-1)}{N \times \dots \times N} \\
&= \frac{b \times (b-1) \times \dots \times (b-k+2) \times (N-b+k-1)}{N^k} \\
&= \frac{b \times (b-1) \times \dots \times (b-(k-1)+1) \times (N-(b-k+1))}{N^k} \\
&= \frac{b \times (b-1) \times \dots \times (b-(k-1)+1) \times N}{N^k} - \\
&\quad \frac{b \times (b-1) \times \dots \times (b-(k-1)+1) \times (b-(k-1))}{N^k} \\
&= \frac{b \times (b-1) \times \dots \times 1}{(b-(k-1)) \times \dots \times 1 \times N^{k-1}} - \frac{b \times \dots \times 1}{(b-k) \times \dots \times 1 \times N^k} \\
&= \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on vient de montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, b\}$:

$$P([Y = k]) = \frac{b!}{(b-(k-1))!N^{k-1}} - \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$

(d) Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_0, \dots, a_M$ des réels. Montrons que :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M.$$

Par linéarité de la somme, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=1}^M ka_{k-1} - \sum_{k=1}^M ka_k = \sum_{k=1}^M ka_{k-1} - \sum_{k=1}^M ka_k.$$

En effectuant le changement d'indice $l = k - 1$ dans la première somme de droite, puis en réutilisant la linéarité de la somme, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) &= \sum_{l=0}^{M-1} (l+1)a_l - \sum_{k=1}^M ka_k \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} (k+1)a_k - \sum_{k=1}^M ka_k \\
&= (0+1)a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} (k+1)a_k - \sum_{k=1}^{M-1} ka_k - Ma_M \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} [(k+1)a_k - ka_k] - Ma_M \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k - Ma_M,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\sum_{k=1}^M k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{M-1} a_k \right) - Ma_M.$$

- (e) Montrons que $E(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b-k)!N^k}$. Pour ce faire, on pose $M = b$ et $a_k = \frac{b!}{(b-k)!N^k}$ pour tout $k \in \{0, \dots, b\}$. D'après les questions précédentes, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \sum_{k=1}^{b+1} kP([Y = k]) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^b kP([Y = k]) \right) + (b+1)P([Y = b+1]) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^b k(a_{k-1} - a_k) \right) + (b+1)a_b \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{b-1} a_k \right) - ba_b + (b+1)a_b \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{b-1} a_k \right) + a_b = \left(\sum_{k=0}^b a_k \right).
 \end{aligned}$$

Mais par définition des a_k , on en déduit que :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^b \frac{b!}{(b-k)!N^k}.$$

- (2) Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par N_n l'événement : "la n -ème boule tirée est noire", et l'on pose $q_n = P(N_n)$. De plus, pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par X_n le nombre de boules noires obtenues lors des n premiers tirages. Par convention, on pose $X_0 = 0$. Enfin, pour tous entiers $n, k \geq 0$, on désigne par $p_{n,k}$ la probabilité de l'événement : "on a obtenu exactement k boules noires au cours des n tirages". On pourra remarquer que $p_{0,0} = 1$, et que $p_{n,k} = 0$ si $k > n$ ou si $k > b$.
- (a) Calculons $p_{n,0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, pour tout $i \in \{1, \dots, b+1\}$, on désigne par B_i l'événement "on tire une boule blanche au i -ème tirage". Par définition, on voit que l'événement "on a obtenu exactement 0 boule noire au cours des n tirages" est réalisé si et seulement si les événements $B_1, \dots, B_n$ sont simultanément réalisés, et donc :

$$p_{n,0} = P(B_1 \cap \dots \cap B_n).$$

D'après la formule des probabilités composées, on obtient que :

$$P_{n,0} = P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(B_n).$$

Comme l'urne contient N boules dont a blanches, on peut remarquer que $P(B_1) = \frac{a}{N}$. A présent, supposons que l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}$ soit réalisé, où $2 \leq i \leq n$. Alors cela signifie que l'on n'a obtenu que des boules blanches lors des $(i-1)$ premiers tirages. Donc l'événement B_i sera réalisé si l'on obtient une nouvelle boule blanche lors du i -ème tirage. Mais comme il reste N boules dans l'urne, dont a boules blanches, il s'ensuit que :

$$P_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{a}{N}.$$

Dès lors, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n,0} = \frac{a}{N} \times \dots \times \frac{a}{N} = \left(\frac{a}{N} \right)^n.$$

Comme $p_{0,0} = 1$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n,0} = \left(\frac{a}{N} \right)^n.$$

A présent, calculons $p_{n,n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, on commence par traiter le cas où $n \leq b$. Par définition, on voit que l'événement "on a obtenu exactement n boules noires au cours des n tirages" est réalisé si et seulement si l'événement $[Y > n]$ l'est, et donc :

$$p_{n,n} = P([Y > n]) = \sum_{k=n+1}^{b+1} P([Y = k]).$$

D'après la question (1)(c) et avec les notations de la question (1)(e), on a par télescopage que :

$$p_{n,n} = \left(\sum_{k=n+1}^b (a_{k-1} - a_k) \right) + a_b = a_n - a_b + a_b = a_n = \frac{b!}{(b-n)!N^n}.$$

Si l'on suppose à présent que $n > b$, alors l'événement "on a obtenu n boules noires lors des n premiers tirages" ne peut être réalisé, puisque toutes les boules noires ont été éliminées de l'urne lors des b premiers tirages, et donc $p_{n,n} = 0$. Par conséquent :

$$p_{n,n} = \frac{b!}{(b-n)!N^n} \quad \text{si } n \leq b \quad \text{et} \quad p_{n,n} = 0 \quad \text{sinon.}$$

Enfin, comme X_n désigne le nombre de boules noires obtenues lors des n premiers tirages, on voit que X_n peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 0 et n . Dès lors, comme $([X_n = k])_{0 \leq k \leq n}$ forme un système complet d'événements et que $p_{n,k} = P([X_n = k])$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k} = 1.$$

(b) Démontrons que, pour tous entiers $n, k > 0$, on a la formule :

$$(A) : N.p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}.$$

D'après la question précédente, on sait que $([X_{n-1} = i])_{0 \leq i \leq n-1}$ forme un système complet d'événements. Dès lors, d'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[X_n = k]$ et au système complet d'événements $([X_{n-1} = i])_{0 \leq i \leq n-1}$, on trouve que :

$$p_{n,k} = P([X_n = k]) = \sum_{i=0}^{n-1} P_{[X_{n-1}=i]}([X_n = k])P([X_{n-1} = i]).$$

Si l'on suppose que l'événement $[X_{n-1} = i]$ est réalisé, alors cela signifie que l'on a déjà tiré i boules noires au cours des i premiers tirages. Dès lors, X_n ne peut prendre que les valeurs i et $i+1$, et donc $P_{[X_{n-1}=i]}([X_n = k]) = 0$ si $i \neq k-1, k$. En particulier, on trouve que :

$$p_{n,k} = P_{[X_{n-1}=k-1]}([X_n = k])P([X_{n-1} = k-1]) + P_{[X_{n-1}=k]}([X_n = k])P([X_{n-1} = k]).$$

Si l'on suppose que l'événement $[X_{n-1} = k-1]$ est réalisé, alors cela signifie que l'on a déjà tiré $(k-1)$ boules noires au cours des $(n-1)$ premiers tirages. Dès lors, $[X_n = k]$ sera réalisé si l'on tire une boule noire au n -ème tirage. Mais comme l'urne contient N boules dont $b - (k-1)$ noires après le $(n-1)$ -ème tirage, on a :

$$P_{[X_{n-1}=k-1]}([X_n = k]) = \frac{b - (k-1)}{N} = \frac{b+1-k}{N}.$$

Si l'on suppose à présent que l'événement $[X_{n-1} = k]$ est réalisé, alors cela signifie que l'on a déjà tiré k boules noires au cours des $(n-1)$ premiers tirages. Dès lors, $[X_n = k]$ sera réalisé si l'on tire une boule blanche au n -ème tirage. Mais comme l'urne contient N boules dont $a+k$ blanches après le $(n-1)$ -ème tirage, on a :

$$P_{[X_{n-1}=k]}([X_n = k]) = \frac{a+k}{N}.$$

Dès lors, on obtient que :

$$p_{n,k} = \frac{b+1-k}{N}P([X_{n-1} = k-1]) + \frac{a+k}{N}P([X_{n-1} = k]).$$

Mais par définition des $p_{n,k}$, il s'ensuit que :

$$p_{n,k} = \frac{b+1-k}{N}p_{n-1,k-1} + \frac{a+k}{N}p_{n-1,k}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$N.p_{n,k} = (a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}.$$

(c) Dans cette question, on se propose de calculer l'espérance de X_n .

(i) A l'aide de la formule (A), montrons que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$N.E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b+k(N-1)]p_{n-1,k}.$$

Comme X_n ne peut prendre que des valeurs entières comprises entre 0 et n , on voit que, par définition de l'espérance :

$$N.E(X_n) = \sum_{k=0}^n NkP([X_n = k]) = \sum_{k=0}^n kNp_{n,k}.$$

D'après la formule (A), par linéarité de la somme et vu que $p_{n-1,n} = 0$, on trouve que :

$$\begin{aligned} N.E(X_n) &= \sum_{k=0}^n k((a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^n k(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^n k(b+1-k)p_{n-1,k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n k(b+1-k)p_{n-1,k-1} \end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $l = k - 1$ dans la deuxième somme de droite, on obtient par linéarité de la somme que :

$$\begin{aligned} N.E(X_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} k(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)(b-l)p_{n-1,l} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(b-k)p_{n-1,k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [k(a+k) + (k+1)(b-k)]p_{n-1,k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [k(a+k) + k(b-k) + (b-k)]p_{n-1,k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [k(a+k+b-k) + (b-k)]p_{n-1,k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [kN + (b-k)]p_{n-1,k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} [b + kN - k]p_{n-1,k} \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$N.E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N-1)]p_{n-1,k}.$$

(ii) Montrons que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$N.E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [b + k(N-1)]p_{n-1,k}.$$

Par linéarité de la somme, on obtient que :

$$N.E(X_n) = (N-1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} kp_{n-1,k} \right) + b \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k} \right).$$

Par définition de l'espérance de X_{n-1} et sachant que $\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k} = 1$ d'après la question (2)(a), on trouve que :

$$N.E(X_n) = (N-1).E(X_{n-1}) + b.1,$$

d'où l'on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}.$$

- (iii) Pour écrire une fonction récursive en Python qui, étant donnés des entiers $n, N, b > 0$, calcule et affiche la valeur de $E(X_n)$, on part du fait que $E(X_0) = 0$ (vu que $X_0 = 0$) et du résultat de la question précédente, et on procède comme suit :

```
def esperancexn(n,N,b):
    if n==0:
        return 0
    else:
        return (1-(1/N))*esperancexn(n-1,N,b)+(b/N)
```

- (iv) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "E(X_n) = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car $b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^0\right] = 0$ et $X_0 = 0$ par définition. A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$E(X_n) = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

D'après la relation de la question (2)(c)(ii), on trouve que :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_n) + \frac{b}{N} \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] + \frac{b}{N} \\ &= b \left(1 - \frac{1}{N}\right) - b \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1} + \frac{b}{N} \\ &= b \left(1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right) - b \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1} \\ &= b - b \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1} \\ &= b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right], \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, E(X_n) = b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

- (d) Dans cette question, on se propose de calculer q_{n+1} .

- (i) En utilisant la formule des probabilités totales, montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N.q_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b-k)p_{n,k}.$$

D'après les questions précédentes, on sait que $([X_n = k])_{0 \leq k \leq n}$ forme un système complet d'événements. Dès lors, d'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement

N_{n+1} et au système complet d'événements $([X_n = k])_{0 \leq k \leq n}$, on trouve que :

$$q_{n+1} = P(N_{n+1}) = \sum_{k=0}^n P_{[X_n=k]}(N_{n+1})P([X_n = k]).$$

Supposons que l'événement $[X_n = k]$ soit réalisé. Alors cela signifie que l'on a déjà tiré k boules noires au cours des n premiers tirages. Dès lors, l'événement N_{n+1} sera réalisé si l'on tire une boule noire au cours du $(n+1)$ -ème tirage. Mais comme l'urne contient N boules dont $(b-k)$ noires, on trouve que :

$$P_{[X_n=k]}(N_{n+1}) = \frac{b-k}{N}.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{b-k}{N} P([X_n = k]).$$

Mais par définition des $p_{n,k}$, il s'ensuit que :

$$q_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{b-k}{N} p_{n,k}.$$

Par conséquent, on en déduit par linéarité de la somme que :

$$N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b-k) p_{n,k}.$$

- (ii) Exprimons q_{n+1} en fonction de $E(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente et par linéarité de la somme, on voit que :

$$N \cdot q_{n+1} = \sum_{k=0}^n (b-k) p_{n,k} = b \left(\sum_{k=0}^n p_{n,k} \right) - \left(\sum_{k=0}^n k p_{n,k} \right).$$

Par définition de l'espérance de X_n et sachant que $\sum_{k=0}^n p_{n,k} = 1$ d'après la question (2)(a), on trouve que :

$$N \cdot q_{n+1} = b \cdot 1 - E(X_n).$$

Dès lors, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{E(X_n)}{N}.$$

- (iii) D'après les questions (2)(d)(ii) et (2)(d)(iv), il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$q_{n+1} = \frac{b}{N} - \frac{1}{N} b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n \right],$$

d'où l'on déduit après simplification que :

$$q_{n+1} = \frac{b}{N} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^n.$$

- (iv) Pour écrire une fonction en Python qui, étant donnés un entier $n \geq 0$ et des entiers $N, b > 0$, calcule et affiche la valeur de q_{n+1} , on procèdera comme suit :

```
def valq(n,N,b):
    q=(b/N)*((1-(1/N))**n)
    return q
```

- (e) Dans cette question, on se propose de calculer la variance de X_n . Pour ce faire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = E(X_n(X_n - 1))$.

- (i) A l'aide de la formule (A), montrons que, pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$N \cdot u_n = \sum_{k=1}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)k] p_{n-1,k}.$$

Par définition de u_n et d'après le théorème de transfert, on voit que :

$$u_n = E(X_n(X_n - 1)) = \sum_{k=0}^n k(k-1)P([X_n = k]) = \sum_{k=0}^n k(k-1)p_{n,k}.$$

D'après la question (2)(b) et par linéarité de la somme et vu que $p_{n-1,n} = 0$, on a :

$$\begin{aligned}
N.u_n &= \sum_{k=0}^n k(k-1)Np_{n,k} \\
&= \sum_{k=0}^n k(k-1)[(a+k)p_{n-1,k} + (b+1-k)p_{n-1,k-1}] \\
&= \sum_{k=0}^n k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^n k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1}.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $l = k - 1$ dans la deuxième somme de droite, on obtient par linéarité de la somme que :

$$\begin{aligned}
N.u_n &= \sum_{k=0}^n k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=1}^n k(k-1)(b+1-k)p_{n-1,k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)l(b-l+1)p_{n-1,l} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)(a+k)p_{n-1,k} + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)k(b-k+1)p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k-1)(a+k) + (k+1)(b-k)]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k-1)(a+k) + (k-1)(b-k) + 2(b-k)]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k-1)(a+k+b-k) + 2(b-k)]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k-1)(a+b) + 2(b-k)]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k-1)(a+b-2) + 2(k-1) + 2(b-k)]p_{n-1,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k[(k-1)(a+b-2) + 2(b-1)]p_{n-1,k}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{N.u_n = \sum_{k=0}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2k(b-1)]p_{n-1,k}.}$$

(ii) D'après la question précédente, on sait que :

$$N.u_n = \sum_{k=0}^{n-1} [k(k-1)(a+b-2) + 2k(b-1)]p_{n-1,k}.$$

Par linéarité de la somme, on obtient que :

$$N.u_n = (a+b-2) \left(\sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)p_{n-1,k} \right) + 2(b-1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} kp_{n-1,k} \right).$$

Par définition de la suite (u_n) et de l'espérance, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} N.u_n &= (a+b-2)u_{n-1} + 2(b-1)E(X_{n-1}) \\ &= (N-2)u_{n-1} + 2(b-1)b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Dès lors, on en déduit que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n = \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_{n-1} + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}\right].}$$

(iii) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right]".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, comme $X_0 = 0$, on voit que $u_0 = E(X_0(X_0 - 1)) = 0$, et de plus :

$$b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^0 - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^0\right] = b(b-1) [1 + 1 - 2] = 0.$$

A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

D'après la relation de la question précédente, on trouve que :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(1 - \frac{2}{N}\right) u_n + \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\ &= \left(1 - \frac{2}{N}\right) b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] + \\ &\quad \frac{2b(b-1)}{N} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\ &= b(b-1) \left(1 - \frac{2}{N}\right) + b(b-1) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - \\ &\quad 2b(b-1) \left(1 - \frac{2}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n + \frac{2b(b-1)}{N} - \frac{2b(b-1)}{N} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \\ &= b(b-1) \left(1 - \frac{2}{N} + \frac{2}{N}\right) + b(b-1) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - \\ &\quad \left[2b(b-1) \left(1 - \frac{2}{N} + \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \\ &= b(b-1) + b(b-1) \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - 2b(b-1) \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \\ &= b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{n+1} - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right], \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].}$$

(iv) Déterminons la valeur de $V(X_n)$. D'après la question précédente, on sait que :

$$u_n = E(X_n^2 - X_n) = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right].$$

Par linéarité de l'espérance, on trouve que :

$$E(X_n^2) = E(X_n^2 - X_n + X_n) = E(X_n^2 - X_n) + E(X_n) = u_n + E(X_n).$$

D'après les résultats des questions précédentes, il s'ensuit que :

$$E(X_n^2) = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right] + b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right].$$

Mais comme $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$ d'après la formule de Koenig-Huygens, on a :

$$\boxed{V(X_n) = b(b-1) \left[1 + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - 2 \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right] + b \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right] - b^2 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \right]^2.}$$

Précisons la limite de $V(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Comme $|1 - \frac{1}{N}|, |1 - \frac{2}{N}| < 1$, on obtient que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{N}\right)^n = 0.$$

D'après les règles de calcul sur les limites, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = b(b-1)(1+0-0) + b(1-0) - b^2(1-0)^2,$$

d'où il s'ensuit après simplification que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0.}$$

- (v) Pour écrire une fonction en Python qui, étant donnés un entier $n \geq 0$ et des entiers $N, b > 0$, calcule et affiche le vecteur $(u_0, u_1, \dots, u_n)$, on se sert des résultats des questions précédentes et d'une boucle `for` comme suit :

```
def vecteur(n,N,b):
    u=np.zeros(n+1)
    for k in range(0,n+1):
        u[k]=(b*(b-1))*(1+((1-(2/N))**k)-2*((1-(1/N))**k))
    return u
```