Lycée Clemenceau **Jeudi 27 novembre 2025**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Devoir Surveillé de Mathématiques n^o3

Remarques : *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits. Tous les étudiants devront traiter les exercices d'informatique suivants et auront le choix entre deux sujets, un de type EDHEC/ECRICOME et un autre de type parisienne. Ils indiqueront lisiblement sur leur première copie le sujet qu'ils auront choisi, et ne pourront traiter que les questions de ce sujet. Si un(e) étudiant(e) traite une question du sujet qu'il/elle n'a pas indiqué en début de copie, cette question ne sera pas corrigée.*

Exercice 1. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un vecteur $u = (u_1, ..., u_n)$ de réels de taille $n > 0$ quelconque, calcule l'écart absolu moyen de $u_1, ..., u_n$, c'est-à-dire le réel $s(u)$ donné par :

$$s(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - m(u)|, \quad \text{où :} \quad m(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Exercice 2. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $r \in \left]0, \frac{1}{5}\right[$, détermine le plus petit entier $n > 0$ tel que : $u_n = \dfrac{1}{n^5}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^4 \geq r$.

Exercice 3. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, crée la matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de taille n telle que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ i + j - 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.$$

1. <u>Sujet type EDHEC-ECRICOME</u>

Exercice 4. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison 2025, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation. Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros. Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain. On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison 2025 est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison 2025. De plus, on désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leq n$ et qui vaut 0 si $X > n$. Enfin, on admet que toutes ces variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) En distinguant deux cas selon la valeur de U, montrer que : $Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U)$.

(2) (a) Vérifier que la variable aléatoire XU est à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$.
   (b) Exprimer sous forme de somme l'espérance de XU à l'aide de la loi de X.
   (c) Montrer enfin que : $E(Y_n) = (x + y)\sum_{k=0}^{n}(k - n)P([X = k]) + nx$.

Par la suite, on suppose que $P([X = 0]) < \dfrac{x}{x + y}$.

(3) (a) Exprimer $E(Y_{n+1}) - E(Y_n)$ en fonction de $x, y, \sum_{k=0}^{n} P([X = k])$.
   (b) On admet le résultat suivant : "toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément". Montrer qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que :

$$\sum_{k=0}^{n_0} P([X = k]) < \frac{x}{x + y} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n_0+1} P([X = k]) \geq \frac{x}{x + y}.$$

   (c) En déduire que ce commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.

(4) Une étude statistique faite au cours des saisons précédentes permet d'affirmer que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(l)$.
   (a) Exprimer $P([X = k + 1])$ en fonction de $P([X = k])$.

(b) Utiliser ce résultat pour écrire une fonction en Python, de paramètres d'entrée x, y, l, permettant de calculer et d'afficher l'entier n_1.

Exercice 5. Soit n un entier ≥ 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules tirées simultanément portent le même numéro, on ne les remet pas dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée, et sinon on les remet dans l'urne. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement sont nécessaires pour constituer i paires. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

(1) (a) Déterminer la loi de T_1.
(b) Donner sans calcul la valeur de $E(T_1)$.
(2) On pose $X_1 = T_1$ et pour tout $i \in \{2, ..., n\}$: $X_i = T_i - T_{i-1}$.
(a) Que représente la variable X_i?
(b) Déterminer pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ la loi et l'espérance de X_i.
(c) En déduire que T_n admet une espérance et que : $E(T_n) = n^2$.
(3) Soit S_n le nombre de paires constituées lors des n premiers tirages.
(a) Calculer la valeur de $P([S_n = 0])$.
(b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P([S_n = 0])$.
(c) Montrer que $P([S_n = n]) = \frac{n!2^n}{(2n)!}$.

Problème 1. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$. Dans ce problème, on s'intéresse aux successions de lancers amenant un même côté. On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)$-ème l'autre côté. De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. De la même façon, on définit les séries suivantes. On désigne par Ω l'ensemble des successions infinies de pile ou face. Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par P_i l'événement "le i-ème lancer amène un pile" et par F_i l'événement contraire.

(1) **Partie I : étude des longueurs de séries.**

Soit L_1 la longueur de la première série, et soit L_2 la longueur de la deuxième série.

(a) Exprimer l'événement $[L_1 = n]$ à l'aide des P_i et F_i.
(b) En déduire que $P([L_1 = n]) = p^n q + q^n p$.
(c) Vérifier que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n]) = 1$.
(d) Exprimer l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ à l'aide des P_i et F_i.
(e) Calculer la probabilité de l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$.
(f) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $P([L_2 = k]) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$.
(g) On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} P([L_2 = k]) = 1$. Montrer que L_2 admet une espérance égale à 2.

(2) **Partie II : étude du nombre de séries lors des n premiers lancers.**

Dans cette partie, on considère que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}$. On désigne par N_n le nombre de séries lors des n premiers lancers. Ainsi, la première série est de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k + 1)$-ème l'autre côté, et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce. De plus, la dernière série se termine nécessairement au n-ème lancer. Par exemple, si les lancers successifs donnent $FFPPPPFFPPP...$, où F désigne face et P pile, alors on a pour une telle succession ω que :

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1, \quad N_3(\omega) = ... = N_6(\omega) = 2,$$
$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3, \quad N_9(\omega) = ... = N_{11}(\omega) = 4,$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de calculer $N_{12}(\omega)$. Par la suite, on admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction génératrice G_n de N_n comme suit. Pour tout $s \in [0, 1]$, on pose :

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P([N_n = k])s^k.$$

(a) Déterminer les lois de N_1, N_2, N_3 et donner leurs espérances.
(b) Déterminer l'ensemble $N_n(\Omega)$ des valeurs prises par N_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Calculer les valeurs de $P([N_n = 1])$ et $P([N_n = n])$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
(d) Pour tout $s \in [0,1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
(e) Que représente $G_n'(1)$? Justifier.
(f) Montrer que, pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P([N_n = k] \cap P_n) & = & \dfrac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \dfrac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) \\ & & \\ P([N_n = k] \cap F_n) & = & \dfrac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \dfrac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) \end{array} \right. .$$

(g) En déduire que, pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$P([N_n = k]) = \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k]) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1]).$$

(h) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right) G_{n-1}(s)$.
(i) Calculer l'expression de $G_1(s)$, et en déduire que, pour tout $n \geq 2$, on a :

$$G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.$$

(j) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

(3) **<u>Partie III : probabilité d'avoir une infinité de fois deux piles consécutifs.</u>**

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 - x \leq e^{-x}$.
(b) Dans cette question, on considère une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série $\sum_i P(A_i)$ diverge. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Pour tout $n \geq k$, on pose :

$$C_n = \bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup ... \cup A_n.$$

(i) Justifier que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$.
(ii) Montrer que, pour tout $n \geq k$, on a :

$$P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P\left(\overline{A_i}\right).$$

(iii) A l'aide de la question $(3)(a)$, en déduire que, pour tout $n \geq k$:

$$P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P\left(A_i\right)\right).$$

(iv) En déduire que $\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 1$.
(v) Comparer les événements C_n et C_{n+1} pour l'inclusion.
(vi) Que peut-on en déduire pour $P(\cup_{i=k}^{+\infty} C_i)$?
(vii) Justifier que $\cup_{i=k}^{+\infty} A_i = \cup_{n=k}^{+\infty} C_n$, et en déduire que : $P(\cup_{i=k}^{+\infty} A_i) = 1$.

(c) En considérant les événements A_n : "on obtient pile au $(2n)$-ème et au $(2n+1)$-ème lancers", montrer que la probabilité d'avoir deux piles consécutifs, après n'importe quel lancer, vaut 1.

2. Sujet type HEC-ESSEC

Problème 2. Lorsque r est un réel > 0, on note :

$$A(r) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum n^k |a_n| r^n \text{ converge}\right\},$$

$$B(r) = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\right\}.$$

A toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(r)$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction $f_a : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles $A(r)$ et $B(r)$.

Dans la seconde, on étudie les propriétés de régularité des fonctions f_a.

Dans la troisième partie, on obtient, dans le cas où $r > 1$, sous certaines hypothèses, une formule de réciprocité donnant la suite a en fonction de la suite $\left(f_a^{(n)}(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

Partie I : Premières propriétés et premiers exemples.

(1) Soit r un réel > 0 et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A(r)$. Montrer que, pour tout $x \in [-r, r]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum n^k |a_n||x|^n$ converge. En déduire que, pour tout réel r' tel que $r \le r'$, on a : $A(r') \subset A(r)$.

(2) Vérifier également que : $0 < r \le r' \Longrightarrow B(r') \subset B(r)$ et $A(r) \subset B(r)$.

(3) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, $A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

(4) Exemples :

(a) On souhaite montrer que, pour tout réel $r > 0$, la suite $\alpha = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_n(k) = \frac{n^{k+2} r^n}{n!}.$$

En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}$, montrer que la suite $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Conclure alors que : $\alpha = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A(r)$.

(b) Pour tout réel $\lambda > 0$, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer l'ensemble des réels $r > 0$ pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$. Déterminer ensuite l'ensemble des réels $r > 0$ pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$.

(5) Soit ρ un réel > 0 et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$. Montrer que, pour tout $r \in]0, \rho[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour ce faire, on pourra penser à écrire :

$$n^k |a_n| r^n = |a_n| \rho^n n^k \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Partie II : Régularité de la fonction f_a.

Dans cette partie, R désigne un réel > 0 et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$.

(1) A l'aide de la question précédente, vérifier que $f_a : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R, R[$.

(2) Continuité de f_a :

(a) Soient $r \in]0, R[$, $x \in [-r, r]$ et h un réel tel que : $x + h \in [-r, r]$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|(x+h)^n - x^n| \le n r^{n-1} |h|.$$

(b) Justifier alors soigneusement que : $|f_a(x+h) - f_a(x)| \le \dfrac{1}{r}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n| r^n\right)|h|$.

(c) Montrer alors que f_a est continue sur $[-r, r]$, puis sur $]-R, R[$.

(3) Caractère $\mathcal{C}^1$ de f_a :

On considère ici un réel $r \in]0, R[$ et un réel $x \in [-r, r]$. Pour tout $n \in N$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et, sous réserve d'existence : $g_a : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

(a) Soit $\rho \in [r, R[$. Justifier que la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$. En déduire que g_a est définie et continue sur $]-R, R[$.

(b) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n(x) = a_0 + \int_0^x S_n'(t)dt$.

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k$.

(d) En déduire que : $f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt$.

(e) Montrer alors que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et que : $f_a' = g_a$.

(4) Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f_a :

(a) Soit $r \in]0, R[$. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in N}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$ converge.

(b) Montrer que f_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et que, pour tout $x \in]-R, R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}\right).$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$.

(5) Exemples :

(a) On pose $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f_\alpha : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Donner une expression de $f_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f_\alpha^{(k)}(1)$.

(b) Soit λ un réel > 0, soit β la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $f_\beta : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$. Donner une expression de $f_\beta(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$, la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}$ converge et : $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$.

Partie III : Une formule de réciprocité.

Dans cette partie, R **désigne un réel** > 1 et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$ et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel $\rho > 1$ tel que la suite $(b_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(1) Expression de a_0 :

(a) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}$, $f_a(0) = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt$.

(b) Démontrer que : $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt = 0$.

(c) En déduire que la série $\sum_{p\geq 0} (-1)^p b_p$ converge et que : $a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p b_p$.

(2) Généralisation : On considère ici un entier naturel s fixé.

(a) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}$, $f_a^{(s)}(0) = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} (-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt.$

(b) Vérifier que : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\left| \displaystyle\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt \right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!} \rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}.$

(c) Déterminer $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt.$

(d) Montrer alors que la série $\displaystyle\sum_{p \geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et que : $a_s = \displaystyle\sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$

(3) Cas particulier : On suppose dans cette question que $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq d+1 \Longrightarrow a_n = 0$.

(a) Que peut-on dire de la fonction f_a?

(b) Montrer que la condition (H) est vérifiée.

(c) En déduire que, pour tout $s \in [\![0, d]\!]$, on a : $a_s = \displaystyle\sum_{n=s}^{d} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$

Partie IV : Applications aux variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie, les variables aléatoires seront discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X, on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ a_n = P(X = n) \quad \text{et} \quad G_X : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{autrement dit :} \quad G_X = f_a.$$

(1) Premiers résultats :

(a) Justifier que la suite a appartient à $B(1)$.

(b) En déduire qu'il existe un réel $R \geq 1$ tel que G_X soit définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

(2) Premier exemple :

(a) On suppose tout d'abord que X suit la loi de Poisson de paramètre 1. Déterminer la fonction G_X, vérifier qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $G_X^{(s)}(1)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

(b) On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant la conditions suivantes : $G_X = f_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f_a^{(s)}(1) = 1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Justifier que l'hypothèse (H) de la partie III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de X?

(3) Deuxième exemple : On considère ici un réel $p \in]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

(a) On suppose que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la fonction G_X. Vérifier que G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, puis calculer $G_X^{(s)}(1)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

(b) On suppose maintenant que : $p > \frac{1}{2}$. Vérifier que : $\frac{q}{p} < 1$.
On considère une variable aléatoire discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose de plus que $G_X = f_a$ est définie sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$ et que $\dfrac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\dfrac{q}{p}\right)^s$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Justifier que l'hypothèse (H) de la partie III est réalisée et déterminer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de $X + 1$?

(4) Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs :
On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est inclus dans $[\![0, d]\!]$, où $d \in \mathbb{N}^*$. On note Pol_d le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq d$. Pour tout $s \in [\![0, d]\!]$, on note e_s la fonction $x \longmapsto x^s$ et on rappelle que $(e_s)_{s \in [\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d. Enfin, on définit les fonctions de Pol_d :

$$H_0 : x \longmapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall s \in [\![1, d]\!], \ \ H_s : x \longmapsto \frac{x(x-1)...(x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!} \prod_{k=0}^{s-1} (x - k).$$

Enfin, on considère l'application Δ définie pour tout $P \in \mathrm{Pol}_d$ par : $\Delta(P) : x \longmapsto P(x+1) - P(x)$.

(a) Montrer que la famille $(H_s)_{s \in [\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d.

(b) Vérifier que Δ est un endomorphisme de Pol_d.

(c) Montrer que $\Delta(H_0) = 0$, puis que : $\forall s \in [\![1, d]\!]$, $\Delta(H_s) = H_{s-1}$ et $H_s(0) = 0$.

(d) Montrer que : $\forall P \in \mathrm{Pol}_d$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(P))(0)]\, H_s(x)$.

(e) En déduire que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^k = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, H_s(n).$$

(f) Montrer alors que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, l'espérance de X^k est donnée par :

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, b_s, \quad \text{où :} \quad b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

(g) Exemple : on suppose ici que $d = 2$, $E(X) = 1$ et $E(X^2) = \dfrac{3}{2}$. Déterminer b_0, b_1, b_2, puis a_0, a_1, a_2. Reconnaître la loi de X.