Lycée Clemenceau **Jeudi 27 novembre 2025**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 3$

Corrigé de l'exercice 1. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un vecteur $u = (u_1, ..., u_n)$ de réels de taille $n > 0$ quelconque, calcule l'écart absolu moyen de $u_1, ..., u_n$, c'est-à-dire le réel $s(u)$ donné par :

$$s(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - m(u)|, \quad \text{où :} \quad m(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Pour ce faire, on commencera par déterminer la taille du vecteur u à l'aide de la commande `np.shape`, puis on calculera la moyenne de ses éléments à l'aide de la commande `np.sum` et enfin, on terminera par le calcul de l'écart absolu moyen de u. Plus précisément, on va procéder comme suit :

```
import numpy as np

def ecart(u):
    n=np.shape(u)[0]
    m=np.sum(u)/n
    v=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        v[i]=np.abs(u[i]-m)
    s=np.sum(v)/n
    return s
```

Corrigé de l'exercice 2. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un réel $r \in]0, 1/5[$, détermine le plus petit entier $n > 0$ tel que :

$$u_n = \frac{1}{n^5}\sum_{k=0}^{n-1} k^4 \geq r.$$

Pour ce faire, on va commencer par calculer les différentes valeurs de u_n lorsque n croît, en vérifiant à chaque fois si $u_n \geq r$ ou non. Comme $n^5 u_n$ s'obtient par additions successives de termes de la forme k^4, et qu'on ne sait pas a priori combien de fois il va falloir réitérer le procédé, on utilisera une boucle `while`. Pour des raisons de simplicité, au lieu de comparer u_n et r, on va plutôt comparer $S_n = n^5 u_n$ et $n^5 r$. Ceci reviendra au même, sauf qu'ici S_n est une somme, et qu'elle est donc plus facile à calculer à l'aide d'une boucle. Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np

def pluspetitentier(r):
    s=0
    n=1
    while s<(r*(n**5)):
        s=s+(n**4)
        n=n+1
    return n
```

Corrigé de l'exercice 3. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, crée la matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de taille n telle que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i = j \\ i + j - 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Pour ce faire, on procèdera à l'aide de deux boucles `for` (en tenant compte du décalage sur les indices) et d'un test `if` comme suit :

```
import numpy as np

def matrice(n):
    a=np.zeros([n,n])
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i!=j:
                a[i,j]=i+j+1
    return a
```

1. Sujet type EDHEC-ECRICOME

Corrigé de l'exercice 4. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Un commerçant se fournit auprès d'un grossiste pour constituer son stock au début de la saison 2023, lequel consiste en un certain nombre d'unités d'un produit de consommation. Chaque unité vendue par ce commerçant lui rapporte un bénéfice net de x euros alors que chaque unité invendue à la fin de la saison engendre une perte nette de y euros. Ce commerçant doit constituer son stock au début de la saison et désire déterminer la taille n de ce stock afin de maximiser son espérance de gain. On admet que le nombre d'unités qui seront commandées à ce commerçant pendant la saison 2023 est une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note Y_n la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce commerçant à la fin de la saison 2023. De plus, on désigne par U la variable aléatoire qui vaut 1 si $X \leq n$ et qui vaut 0 si $X > n$. Enfin, on admet que toutes ces variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) Montrons que : $Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U)$. Pour ce faire, on distingue deux cas suivant la valeur de U. Tout d'abord, si l'événement $[U = 0]$ est réalisé, alors cela signifie que $X > n$. Dès lors, le commerçant reçoit des commandes pour X unités. Comme il dispose de n unités en stock et que $X > n$, il vendra n unités pendant la saison 2021, ce qui lui rapportera en tout nx euros, et donc :

$$\begin{aligned} Y_n &= nx \\ &= (xX - (n - X)y) \times 0 + nx(1 - 0) \\ &= (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U). \end{aligned}$$

A présent, si l'événement $[U = 1]$ est réalisé, alors cela signifie que $X \leq n$. Dès lors, le commerçant reçoit des commandes pour X unités. Comme il dispose de n unités en stock et que $X \leq n$, il vendra X unités et se retrouvera avec $n - X$ unités invendues pendant la saison 2021, ce qui lui rapportera d'un côte xX euros et lui fera perdre de l'autre $y(n - X)$ euros, et donc :

$$\begin{aligned} Y_n &= xX - y(n - X) \\ &= (xX - (n - X)y) \times 1 + nx(1 - 1) \\ &= (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on obtient la même expression pour Y_n. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{Y_n = (xX - (n - X)y)U + nx(1 - U).}$$

(2) (a) Vérifions que la variable aléatoire XU est à valeurs dans $\{0, 1, ..., n\}$. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et que U est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on voit déjà que XU est à valeurs dans $\mathbb{N}$. De plus, si l'événement $[U = 0]$ est réalisé, alors $XU = 0$. En outre, si l'événement $[U = 1]$ est réalisé, alors cela signifie que $X \leq n$, et donc $XU = X \leq n$. Dans tous les cas, on constate que XU ne prend que des valeurs entières positives et $\leq n$, et donc :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } XU \text{ est à valeurs dans } \{0, 1, ..., n\}.}$$

(b) Exprimons sous forme de somme l'espérance de XU à l'aide de la loi de X. A noter que, comme $XU(\Omega) \subset \{0, 1, ..., n\}$ d'après la question précédente, la variable aléatoire XU admet une espérance.

De plus, on obtient d'après le théorème de transfert que :

$$\begin{aligned} E(XU) &= \sum_{k=0}^{n} kP([XU=k]) \\ &= 0\times P([XU=0]) + \sum_{k=1}^{n} kP([XU=k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} kP([XU=k]). \end{aligned}$$

A noter que, si $k \in \{1, ..., n\}$, alors l'événement $[XU = k]$ est réalisé si et seulement si $U = 1$ et $X = k$, ce qui entraine que $[XU = k] = [X = k] \cap [U = 1] = [X = k]$. En effet, si l'événement $[X = k]$ est réalisé avec $k \leq n$, alors ceci entraine que l'événement $[U = 1]$ l'est aussi par définition de U, et donc $[X = k] \cap [U = 1] = [X = k]$. Dès lors, on trouve que :

$$E(XU) = \sum_{k=1}^{n} kP([X=k]).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E(XU) = \sum_{k=0}^{n} kP([X=k]).}$$

(c) Montrons enfin que : $E(Y_n) = (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)P([X=k])+nx$. A noter que, comme U ne prend que les valeurs 0 et 1, U est une variable de Bernoulli de paramètre $p = P([U = 1]) = P([X \leq n])$. En particulier, U admet une espérance égale à $P([X \leq n])$. Dès lors, on obtient d'après les questions (1) et (2)(b), par linéarité de l'espérance et par linéarité de la somme que :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E\left((xX-(n-X)y)U + nx(1-U)\right) \\ &= E\left(xXU - nyU + yXU + nx - nxU\right) \\ &= xE(XU) - nyE(U) + yE(XU) + nx - nxE(U) \\ &= (x+y)E(XU) - n(x+y)E(U) + nx \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n} kP([X=k]) - n(x+y)P([X\leq n]) + nx \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n} kP([X=k]) - n(x+y)\sum_{k=0}^{n} P([X=k]) + nx \\ &= (x+y)\left[\sum_{k=0}^{n} kP([X=k]) - \sum_{k=0}^{n} nP([X=k])\right] + nx \\ &= (x+y)\left[\sum_{k=0}^{n} (k-n)P([X=k])\right] + nx. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E(Y_n) = (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)P([X=k]) + nx.}$$

Par la suite, on suppose que $P([X=0]) < \dfrac{x}{x+y}$.

(3) (a) Exprimons $E(Y_{n+1}) - E(Y_n)$ en fonction de $x, y, \sum_{k=0}^{n} P([X = k])$. D'après la question précédente et comme $k - n - 1 = 0$ si $k = n + 1$, on trouve que :

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) - E(Y_n) &= (x+y)\sum_{k=0}^{n+1}(k-n-1)P([X=k]) + (n+1)x \\ &\quad -(x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)P([X=k]) - nx \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n-1)P([X=k]) + (n+1)x \\ &\quad -(x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)P([X=k]) - nx. \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par linéarité de la somme que :

$$\begin{aligned} E(Y_{n+1}) - E(Y_n) &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n-1)P([X=k]) + (n+1)x \\ &\quad -(x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n)P([X=k]) - nx \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n}(k-n-1-k+n)P([X=k]) + (n+1-n)x \\ &= (x+y)\sum_{k=0}^{n} -P([X=k]) + x \\ &= -(x+y)\sum_{k=0}^{n} P([X=k]) + x \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = (x+y)\left[\frac{x}{x+y} - \sum_{k=0}^{n} P([X=k])\right].}$$

(b) On admet que "toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément". Montrons qu'il existe un unique entier naturel n_0 tel que :

$$\sum_{k=0}^{n_0} P([X=k]) < \frac{x}{x+y} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n_0+1} P([X=k]) \geq \frac{x}{x+y}.$$

Pour ce faire, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} P([X=k])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N} |\ u_n < \frac{x}{x+y} \right\}.$$

Comme $u_0 = P([X=0]) = \sum_{k=0}^{0} P([X=k]) < \frac{x}{x+y}$ par hypothèse, l'ensemble E est non vide vu qu'il contient 0. De plus, comme $([X=k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P([X=k]) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} P([X=k]) = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Comme $x, y > 0$, on constate que $\frac{x}{x+y} < 1$. Dès lors, comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, il existe un entier m_0 tel que, pour tout $n \geq m_0$, on ait $u_n \geq \frac{x}{x+y}$. En particulier, tous les éléments de E sont majorés par $m_0 - 1$. En résumé, E est un ensemble non vide et majoré de $\mathbb{N}$, et donc il admet un élément maximal d'après la propriété rappelée en début de question, que l'on notera n_0 par la suite. Comme n_0 appartient à E, on a clairement $u_{n_0} < \frac{x}{x+y}$. De plus, comme n_0 est le maximum de E, on voit que $n_0 + 1$ n'appartient pas à E, et donc $u_{n_0+1} \geq \frac{x}{x+y}$. En particulier, l'entier n_0 satisfait les conditions données plus haut. Reste à montrer qu'il est le seul. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il en existe un autre, que l'on note n_0'. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} P([X = k]) - \sum_{k=0}^{n} P([X = k]) = P([X = n+1]) \geq 0.$$

En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si $n_0' > n_0$, on trouve par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $u_{n_0'} \geq u_{n_0+1} \geq \frac{x}{x+y}$, ce qui est absurde car $u_{n_0'} < \frac{x}{x+y}$ par hypothèse. Si maintenant $n_0' < n_0$, alors on obtient également par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $u_{n_0'} \leq u_{n_0'+1} \leq u_{n_0} < \frac{x}{x+y}$, ce qui est également absurde car $u_{n_0'+1} \geq \frac{x}{x+y}$ par hypothèse. Par conséquent, il ne peut pas exister d'entier $n_0' \neq n_0$ et satisfaisant les conditions données plus haut, et donc :

$$\boxed{\exists! n_0 \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n_0} P([X = k]) < \frac{x}{x+y} \text{ et } \sum_{k=0}^{n_0+1} P([X = k]) \geq \frac{x}{x+y}.}$$

(c) Montrons que ce commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$. D'après la question précédente, on sait que :

$$\begin{cases} \forall n \leq n_0, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P([X = k]) \leq \sum_{k=0}^{n_0} P([X = k]) < \frac{x}{x+y} \\ \forall n > n_0, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P([X = k]) \geq \sum_{k=0}^{n_0+1} P([X = k]) \geq \frac{x}{x+y} \end{cases}.$$

Dès lors, on obtient avec la question $(3)(a)$ que :

$$\begin{cases} \forall n \leq n_0, \quad E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = (x+y)\left[\dfrac{x}{x+y} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P([X = k])\right] > 0 \\ \forall n > n_0, \quad E(Y_{n+1}) - E(Y_n) = (x+y)\left[\dfrac{x}{x+y} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P([X = k])\right] \leq 0 \end{cases}.$$

En d'autres termes, la suite $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante jusqu'à l'indice $n_1 = n_0+1$, puis décroissante à partir de cet indice. En particulier, la suite $(E(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ prend sa valeur maximale en $n_1 = n_0+1$, ce qui signifie exactement que $E(Y_{n_0+1})$ est l'espérance maximale que l'on puisse obtenir, et donc :

le commerçant est sûr de maximiser son espérance de gain en constituant un stock de taille $n_1 = n_0 + 1$.

(4) Une étude statistique faite au cours des saisons précédentes permet d'affirmer que : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(l)$.

(a) Exprimons $P([X = k+1])$ en fonction de $P([X = k])$. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(l)$, on sait que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P([X = k]) = \frac{e^{-l} l^k}{k!}.$$

Dès lors, on trouve que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([X = k+1]) = \frac{e^{-l} l^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-l} l^k l}{k!(k+1)} = P([X = k])\frac{l}{k+1}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{P([X = k+1]) = P([X = k])\frac{l}{k+1}.}$$

(b) Ecrivons une fonction en Python, de paramètres d'entrée x, y, l, permettant de calculer et d'afficher l'entier n_1. Pour ce faire, on doit calculer successivement les sommes $\sum_{k=0}^{n} P([X = k])$ et déterminer le plus grand entier n_0 tel que $\sum_{k=0}^{n_0} P([X = k]) < \frac{x}{x+y}$. Puisque l'on ne sait pas combien de calculs il va falloir faire, le mieux est de calculer à l'aide d'une boucle `while` les valeurs successives de $P([X = n])$ et de $\sum_{k=0}^{n} P([X = k])$ (et ce en utilisant la question précédente), puis de s'arrêter au moment où cette somme dépasse le réel $\frac{x}{x+y}$. Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np

def gain(x,y,l):
    r=x/(x+y)
    n=0
    p=np.exp(-l)
    s=p
    while s<r:
        p=(p*l)/(n+1)
        s=s+p
        n=n+1
    return n
```

Corrigé de l'exercice 5. Soit n un entier ≥ 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules tirées simultanément portent le même numéro, on ne les remet pas dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée, et sinon on les remet dans l'urne. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_i = k$ si k tirages exactement sont nécessaires pour constituer i paires. On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant de modéliser cette expérience et que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, T_i est une variable aléatoire définie sur cet espace.

(1) (a) Déterminons la loi de T_1. Par définition, on sait que $T_1 = k$ s'il a fallu exactement k tirages pour constituer une paire, c'est-à-dire si, au cours des $(k-1)$ premiers tirages, on n'a pas obtenu de paire, et qu'on en a obtenu une au cours du k-ème tirage. On voit alors que T_1 est un temps d'attente d'un premier succès. Plus précisément, on répète indéfiniment et dans les mêmes conditions l'expérience aléatoire suivante "on tire deux boules de l'urne", avec deux issues A "on obtient une paire" et B "on n'obtient pas de paire". Comme T_1 est le premier instant où l'issue A est réalisée, T_1 suit la loi géométrique de paramètre $p = P(A)$. Pour calculer $P(A)$, on se place dans le cas d'un seul tirage où les 2 boules sont tirées successivement et sans remise (ce qui revient à un tirage simultané de 2 boules). Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère l'événement E_i "on a d'abord tiré la boule numérotée i lors de ce tirage" et F_i "on a ensuite tiré la boule numérotée i lors de ce tirage". Par construction, on voit que A est réalisé si et seulement si l'un des événements $E_i \cap F_i$ est réalisé, et donc :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \cap F_i).$$

Par incompatibilité, on trouve que :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap F_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P_{E_i}(F_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2n} \times \frac{1}{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n} \times \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right).}$$

(b) Donnons sans calcul la valeur de $E(T_1)$. D'après le cours, on sait que $E(X) = \frac{1}{p}$ si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, ce qui entraine d'après la question précédente que :

$$\boxed{E(X) = 2n - 1.}$$

(2) On pose $X_1 = T_1$ et pour tout $i \in \{2, ..., n\}$: $X_i = T_i - T_{i-1}$.

(a) Déterminons ce que représente la variable X_i. Par définition, on sait que $T_{i-1} = k$ s'il a fallu exactement k tirages pour constituer $(i-1)$ paires, et que $T_i = k'$ s'il a fallu exactement k' tirages pour constituer i paires. En d'autres termes, la $(i-1)$-ème paire a été obtenue lors du k-ème tirage, et la i-ème paire lors du k'-ème tirage. Mais comme $X_i = T_i - T_{i-1} = k' - k$ dans ce cas, on en déduit que :

$$\boxed{X_i \text{ représente le temps d'attente entre la } (i-1)\text{-ème et la } i\text{-ème paires}}$$

(b) Déterminons pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ la loi et l'espérance de X_i. Pour ce faire, supposons que l'on ait déjà tiré $(i-1)$ paires de l'urne. D'après la question précédente, on sait que $X_i = l$ s'il a fallu exactement l tirages pour constituer la i-ème paire. On voit alors que X_i est un temps d'attente du premier succès. Plus précisément, sachant que l'on a déjà tiré $(i-1)$ paires de l'urne, on répète indéfiniment et dans les mêmes conditions l'expérience suivante "on tire deux boules de l'urne", avec deux issues A'_i : "on obtient une paire" et B'_i : "on n'obtient pas de paire". Comme X_i est le premier instant où l'issue A'_i est réalisée, X_i suit la loi géométrique de paramètre $p = P(A'_i)$. Pour calculer $P(A'_i)$, il suffit de reproduire la même démonstration qu'à la question $(1)(a)$, en sachant qu'ici l'urne contient exactement $(n-i+1)$ paires de boules avec le même numéro (et non plus n paires), ce qui nous donne que :

$$P(A'_i) = \frac{1}{2(n-i+1)-1} = \frac{1}{2n-2i+1}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-2i+1}\right) \quad \text{et} \quad E(X_i) = 2n-2i+1.}$$

(c) Montrons que T_n admet une espérance et et que $E(T_n) = n^2$. Comme $X_1 = T_1$ et que $X_i = T_i - T_{i-1}$, il s'ensuit par télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_n = T_1 + \sum_{i=2}^{n} (T_i - T_{i-1}) = X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Mais comme $X_1, ..., X_n$ suivent toutes des lois géométriques, elles admettent toutes une espérance. Dès lors, la variable aléatoire T_n admet aussi une espérance (comme combinaison linéaire des X_i). De plus, par linéarité de l'espérance, on obtient que :

$$E(T_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1) = 2n^2 - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n,$$

d'où il s'ensuit après simplification que $E(T_n) = n^2$. Par conséquent :

$$\boxed{T_n \text{ admet une espérance et de plus : } E(T_n) = n^2.}$$

(3) Soit S_n le nombre de paires constituées lors des n premiers tirages.

(a) Calculons la valeur de $P([S_n = 0])$. Pour ce faire, on désigne par B_i l'événement "aucune paire n'a été obtenue lors du i-ème tirage". Par définition, l'événement $[S_n = 0]$ est réalisé si et seulement si aucune paire n'a été constituée lors des n premiers tirages, c'est-à-dire si les événements $B_1, ..., B_n$ sont simultanément réalisés, et donc :

$$[S_n = 0] = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n.$$

D'après la formule des probabilités composées, on obtient que :

$$P([S_n = 0]) = P(B_1) P_{B_1}(B_2) ... P_{B_1 \cap ... \cap B_{n-1}}(B_n).$$

Supposons que l'événement $B_1 \cap ... \cap B_{i-1}$ soit réalisé, où $2 \leq i \leq n$. Alors cela signifie que l'on n'a pas obtenu de paire lors des $(i-1)$ premiers tirages. Donc l'événement B_i est réalisé si l'on n'obtient pas de paire lors du i-ème tirage, c'est-à-dire si l'événement A de la question $(1)(a)$ n'est pas réalisé, et donc :

$$P_{B_1 \cap ... \cap B_{i-1}}(B_i) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2n-1}.$$

Comme de plus $P(B_1) = 1 - \frac{1}{2n-1}$ par les mêmes arguments, on en déduit que :

$$\boxed{P([S_n = 0]) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n.}$$

(b) Déterminons $\lim_{n\to+\infty} P([S_n = 0])$. Par un calcul simple, on trouve que :

$$P([S_n = 0]) = \left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)^n = \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right].$$

Comme $\frac{1}{2n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et que de plus $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on obtient par substitution que :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n-1}.$$

D'après les règles de calcul sur les équivalents, on trouve que :

$$n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2n} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}.$$

Dès lors, ceci entraine que :

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Mais par continuité de l'exponentielle, il s'ensuit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right)\right] = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P([S_n = 0]) = \frac{1}{\sqrt{e}}.}$$

(c) Montrons l'égalité :

$$P([S_n = n]) = \frac{n!2^n}{(2n)!}.$$

Pour ce faire, on désigne par A_i l'événement "on a obtenu une paire lors du i-ème tirage". Par définition, l'événement $[S_n = n]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu n paires lors des n premiers tirages, c'est-à-dire si les événements $A_1, ..., A_n$ sont simultanément réalisés, et donc :

$$[S_n = n] = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n.$$

D'après la formule des probabilités composées, on obtient que :

$$P([S_n = n]) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)...P_{A_1\cap...\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Tout d'abord, on peut remarquer que $P(A_1)$ correspond à la probabilité de l'issue A définie à la question $(1)(a)$, et donc :

$$P(A_1) = P(A) = \frac{1}{2n-1}.$$

A présent, supposons que l'événement $A_1 \cap ... \cap A_{i-1}$ soit réalisé, où $2 \leq i \leq n$. Alors cela signifie que l'on a obtenu $(i-1)$ paires lors des $(i-1)$ premiers tirages. Donc l'événement A_i est réalisé si l'on obtient une nouvelle paire lors du i-ème tirage. Si A_i' est l'événement défini à la question $(2)(a)$, alors on voit que :

$$P_{A_1\cap...\cap A_{i-1}}(A_i) = P(A_i') = \frac{1}{2n-2i+1}.$$

Dès lors, on trouve que :

$$P([S_n = n]) = \frac{1}{2n-1} \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{(2n-2i+1)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2n-2i+1)}.$$

Par des calculs simples, on obtient que :

$$\begin{aligned}
P([S_n = n]) &= \frac{1}{(2n-1) \times ... \times (2n-2i+1) \times ... \times 1} \\
&= \frac{(2n) \times (2(n-1)) \times ... \times (2n-2i+2) \times ... \times 2}{(2n)(2n-1) \times ... \times (2n-2i+2)(2n-2i+1) \times ... \times 2 \times 1} \\
&= \frac{(2 \times 2 \times ... \times 2) \times [n \times (n-1) \times ... \times 1]}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P([S_n = n]) = \frac{n!2^n}{(2n)!}.}$$

Corrigé du problème 1. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$, et face avec la probabilité $q = 1 - p$. Dans ce problème, on s'intéresse aux successions de lancers amenant un même côté. On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre côté. De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. De la même façon, on définit les séries suivantes. On désigne par Ω l'ensemble des successions infinies de pile ou face. Enfin, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par P_i l'événement "le i-ème lancer amène un pile" et par F_i l'événement contraire.

(1) **Partie I : étude des longueurs de séries.**

Soit L_1 la longueur de la première série, et soit L_2 la longueur de la deuxième série.

(a) Exprimons l'événement $[L_1 = n]$ à l'aide des P_i et F_i. Par définition, l'événement $[L_1 = n]$ est réalisé si et seulement si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ème l'autre côté, c'est-à-dire si soit les n premiers lancers amènent un pile et le $(n+1)$-ème un face, soit les n premiers lancers amènent un face et le $(n+1)$-ème un pile. En d'autres termes, l'événement $[L_1 = n]$ est réalisé si et seulement si soit l'événement $P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1}$ est réalisé, soit l'événement $F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, et donc :

$$\boxed{[L_1 = n] = (P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}).}$$

(b) Déterminons la loi de L_1. Comme les événements $P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1}$ et $F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}$ sont incompatibles, le résultat de la question précédente entraine que :

$$\begin{aligned} P([L_1 = n]) &= P((P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1})) \\ &= P(P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1}) + P(F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}). \end{aligned}$$

D'après la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1}) = P(P_1)P_{P_1}(P_2)...P_{P_1 \cap ... \cap P_n}(F_{n+1}) = p \times p \times ... \times q = p^n q \\ \\ P(F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1}) = P(F_1)P_{F_1}(F_2)...P_{F_1 \cap ... \cap F_n}(P_{n+1}) = q \times q \times ... \times p = q^n p \end{array} \right. .$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P([L_1 = n]) = p^n q + q^n p.}$$

(c) Vérifions que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n]) = 1$. D'après la question précédente et par linéarité de la somme, on voit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p^n q + q^n p) = q \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \right) + p \left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \right).$$

On reconnait alors à droite les sommes des séries géométriques de raisons respectives p et q. D'après le cours, on trouve que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n]) = q \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \right) + p \left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \right) = q \left(\frac{p}{1-p} \right) + p \left(\frac{q}{1-q} \right).$$

Comme $p + q = 1$, il s'ensuit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n]) = q \left(\frac{p}{q} \right) + p \left(\frac{q}{p} \right) = p + q = 1.$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n]) = 1.}$$

(d) Exprimons l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ à l'aide des P_i et F_i. Par définition, l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$ est réalisé si et seulement si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce, puis les k lancers suivants l'autre côté et enfin le $(n+k+1)$-ème le côté de départ, c'est-à-dire si soit on obtient n piles, puis k faces et enfin un pile, soit on obtient n faces, puis k piles et enfin un face. En d'autres termes, l'événement $[L_1 = n]$ est réalisé si et seulement si soit l'événement $P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1} \cap ... \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}$ est réalisé, soit l'événement $F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1} \cap ... \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}$ est réalisé, et donc :

$$\boxed{\begin{aligned} [L_1 = n] \cap [L_2 = k] \quad &= \quad (P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1} \cap ... \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \cup \\ & \quad\quad (F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1} \cap ... \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}). \end{aligned}}$$

(e) Calculons la probabilité de l'événement $[L_1 = n] \cap [L_2 = k]$. Comme les événements $P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1} \cap ... \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}$ et $F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1} \cap ... \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}$ sont incompatibles, le résultat de la question précédente entraine que :

$$\begin{aligned} P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) \quad &= \quad P(P_1 \cap ... \cap P_n \cap F_{n+1} \cap ... \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) + \\ & \quad\quad P(F_1 \cap ... \cap F_n \cap P_{n+1} \cap ... \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1}). \end{aligned}$$

D'après la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$\begin{aligned} P(P_1 \cap ... \cap P_{n+k+1}) \quad &= \quad P(P_1)P_{P_1}(P_2)...P_{P_1 \cap ... \cap F_{n+k}}(P_{n+k+1}) \\ &= \quad p \times p \times ... \times q \times ... \times q \times p \qquad . \\ &= \quad p^n q^k p \quad = \quad p^{n+1} q^k. \end{aligned}$$

De même, on vérifie aisément que $P(F_1 \cap ... \cap P_{n+k+1}) = p^k q^{n+1}$. Par conséquent :

$$\boxed{P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k.}$$

(f) Déterminons la loi de L_2. Comme L_1 ne prend que des valeurs entières > 0, la famille $([L_1 = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. Dès lors, d'après la question précédente, on trouve que :

$$P([L_2 = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([L_1 = n] \cap [L_2 = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k).$$

Par linéarité de la somme, on voit que :

$$P([L_2 = k]) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p^{n+1} q^k + q^{n+1} p^k) = pq^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \right) + qp^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \right).$$

On reconnait alors à droite les sommes des séries géométriques de raisons respectives p et q. D'après le cours, on trouve que :

$$P([L_2 = k]) = pq^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \right) + qp^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \right) = pq^k \left(\frac{p}{1-p} \right) + qp^k \left(\frac{q}{1-q} \right).$$

Comme $p + q = 1$, il s'ensuit que :

$$P([L_2 = k]) = pq^k \left(\frac{p}{q} \right) + qp^k \left(\frac{q}{p} \right) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.$$

Par conséquent, on vient de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P([L_2 = k]) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}.}$$

(g) Montrons que L_2 admet une espérance égale à 2. Par définition, L_2 admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP([L_2 = k])$ converge absolument. Mais comme cette série est à termes positifs, ceci revient à vérifier que la série $\sum kP([L_2 = k])$ converge. Or, d'après la question précédente, on sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$kP([L_2 = k]) = p^2 (kq^{k-1}) + q^2 (kp^{k-1}).$$

On reconnait alors à droite une combinaison linéaire des termes généraux des séries géométriques dérivées (d'ordre 1), de raisons respectives p et q. Comme $0 < p, q < 1$, la série $\sum kP([L_2 = k])$

converge, et donc L_2 admet une espérance. De plus, par linéarité de la somme et sachant que $p+q=1$, on trouve que :

$$\begin{aligned} E(L_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty}(p^2kq^{k-1}+q^2kp^{k-1}) \\ &= p^2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kq^{k-1}\right)+q^2\left(\sum_{k=1}^{+\infty}kp^{k-1})\right) \\ &= p^2\times\frac{1}{(1-q)^2}+q^2\times\frac{1}{(1-p)^2} \\ &= p^2\times\frac{1}{p^2}+q^2\times\frac{1}{q^2} \quad = \quad 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } L_2 \text{ admet une espérance et de plus : } E(L_2)=2.}$$

(2) **Partie II : étude du nombre de séries lors des n premiers lancers.**

Dans cette partie, on considère que la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p=\frac{1}{2}$. On désigne par N_n le nombre de séries lors des n premiers lancers. Ainsi, la première série est de longueur $k<n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ème l'autre côté, et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce. De plus, la dernière série se termine nécessairement au n-ème lancer. Par exemple, si les lancers successifs donnent $FFPPPPFFPPP...$, où F désigne face et P pile, alors on a pour une telle succession ω que :

$$\begin{aligned} &N_1(\omega)=N_2(\omega)=1, \quad N_3(\omega)=...=N_6(\omega)=2, \\ &N_7(\omega)=N_8(\omega)=3, \quad N_9(\omega)=...=N_{11}(\omega)=4, \end{aligned}$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de calculer $N_{12}(\Omega)$. Par la suite, on admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Enfin, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction génératrice G_n de N_n comme suit. Pour tout $s\in[0,1]$, on pose :

$$G_n(s)=\sum_{k=1}^{n}P([N_n=k])s^k.$$

(a) Déterminons les lois de N_1,N_2,N_3 et donnons leurs espérances. Comme N_1 est le nombre de séries obtenues lors du premier lancer, on voit que $N_1=1$ et $E(N_1)=1$, et donc :

$$\boxed{N_1=1 \text{ et } E(N_1)=1.}$$

De plus, N_2 est le nombre de séries obtenues lors des deux premiers lancers. Dès lors, on voit que N_2 prend la valeur 1 si les deux premiers lancers amènent le même côté de la pièce, et 2 sinon. En particulier, N_2 est égal à 1 si et seulement si les deux premiers lancers sont "PF" ou "FP". Mais comme chacun de ces couples de lancers est de probabilité $\frac{1}{4}$, il s'ensuit que :

$$P([N_2=1])=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P([N_2=2])=1-P([N_2=1])=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Dès lors, on obtient par un calcul simple que :

$$\boxed{N_2(\Omega)=\{1,2\},\ \ P([N_2=1])=P([N_2=2])=\frac{1}{2} \text{ et } E(N_2)=\frac{3}{2}.}$$

Enfin, on sait que N_3 est le nombre de séries obtenues lors des 3 premiers lancers. Dès lors, on voit que N_3 prend la valeur 1 si les 3 premiers lancers amènent le tirage "PPP" ou "FFF", que N_3 prend la valeur 2 si l'on obtient l'un des tirages "PFF", "FPP", "PPF" ou "FFP", et que N_3 prend la valeur 3 sinon. Comme les lancers sont indépendants entre eux et que P et F ont la même probabilité d'apparaître à chaque lancer, on voit par incompatibilité que :

$$P([N_3=1])=P(PPP\cup FFF)=P(PPP)+P(FFF)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

Pour les mêmes raisons, on trouve que :

$$\begin{aligned}P([N_3=2]) &= P(PFF \cup FPP \cup PPF \cup FFP)\\ &= P(PFF)+P(FPP)+P(PPF)+P(FFP)\\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \quad = \quad \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Comme $([N_3=1],[N_3=2],[N_3=3])$ est un système complet d'événements, on a :

$$P([N_3=3]) = 1-P([N_3=1])-P([N_3=2]) = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

Par un calcul simple, on obtient alors que :

$$E(N_3) = \left(1\times\frac{1}{4}\right)+\left(2\times\frac{1}{2}\right)+\left(3\times\frac{1}{4}\right)=2.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{N_3(\Omega)=\{1,2,3\},\ \ P([N_3=1])=\frac{1}{4},\ \ P([N_3=2])=\frac{1}{2},\ \ P([N_3=3])=\frac{1}{4},\ \ E(N_3)=2.}$$

(b) Déterminons l'ensemble $N_n(\Omega)$ des valeurs prises par N_n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Par définition, N_n est un nombre de séries lors de n lancers. Il ne peut donc prendre que des valeurs entières positives. Comme toute succession de n lancers contient au moins une série et au plus n, on a $N_n(\Omega)\subset\{1,...,n\}$. De plus, N_n prendra la valeur 1 si tous les lancers donnent le même résultat. En outre, pour tout $k\in\{2,...,n\}$, N_n prendra la valeur k si les k premiers lancers donnent des résultats alternés du style "$PFPFPF$...", et si les $(n-k)$ lancers suivants sont tous égaux au k-ème. Dès lors, N_n peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 1 et n, et donc :

$$\boxed{N_n(\Omega)=\{1,...,n\}.}$$

(c) Calculons d'abord la valeur de $P([N_n=1])$ en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$. Par définition, on sait que $[N_n=1]$ est réalisé si et seulement si les n premiers lancers amènent le même côté de la pièce, c'est-à-dire si l'une des successions de lancers "$PPP...P$" ou "$FFF...F$" est réalisée. Mais comme les lancers sont indépendants entre eux et que P et F ont la même probabilité d'apparaître à chaque lancer, on trouve par incompatibilité que :

$$P([N_n=1]) = P(PPP...P\cup FFF...F) = P(PPP...P)+P(FFF...F)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P([N_n=1])=\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

A présent, calculons la valeur de $P([N_n=n])$ en fonction de $n\in\mathbb{N}^*$. Par définition, on sait que $[N_n=n]$ est réalisé si et seulement si les n premiers lancers donnent des résultats alternés, c'est-à-dire si l'une des successions de lancers "$PFPF$..." ou "$FPFP$..." est réalisée. Mais comme les lancers sont indépendants entre eux et que P et F ont la même probabilité d'apparaître à chaque lancer, on trouve par incompatibilité que :

$$P([N_n=n]) = P(PFPF...\cup FPFP...) = P(PFPF...)+P(FPFP...)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P([N_n=n])=\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

(d) Soit $s\in[0,1]$. Comparons l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$. D'après le théorème de transfert et sachant que $N_n(\Omega)=\{1,...,n\}$, on trouve que :

$$E(s^{N_n})=\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_n=k]),$$

d'où l'on déduit que, pour tout $s\in[0,1]$:

$$\boxed{E(s^{N_n})=G_n(s).}$$

(e) Déterminons ce que représente $G_n'(1)$. Par définition de G_n, on voit que, pour tout $s \in \mathbb{R}^*$:

$$G_n'(s) = \sum_{k=1}^{n} ks^{k-1} P([N_n = k]).$$

En particulier, pour $s = 1$, on trouve que :

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k(1^{k-1}) P([N_n = k]) = \sum_{k=1}^{n} kP([N_n = k]) = E(N_n).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{G_n'(1) = E(N_n).}$$

(f) Montrons que, pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P([N_n = k] \cap P_n) & = & \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) \\ \\ P([N_n = k] \cap F_n) & = & \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) \end{array} \right. .$$

Pour ce faire, on se contentera de démontrer la première égalité, la démonstration de la deuxième étant analogue. Comme (P_{n-1}, F_{n-1}) et $([N_{n-1} = i])_{1 \leq i \leq n-1}$ sont des systèmes complets d'événements, on voit que la famille $([N_{n-1} = i] \cap P_n)_{1 \leq i \leq n-1} \cup ([N_{n-1} = i] \cap F_n)_{1 \leq i \leq n-1}$ est aussi un système complet d'événements. Dès lors, d'après la formule des probabilités totales appliquée à ce système complet d'événements, on obtient que :

$$\begin{aligned} P([N_n = k] \cap P_n) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n-1} P_{[N_{n-1} = i] \cap P_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) P([N_{n-1} = i] \cap P_{n-1}) + \\ & \sum_{i=1}^{n-1} P_{[N_{n-1} = i] \cap F_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) P([N_{n-1} = i] \cap F_{n-1}). \end{aligned}$$

Si $[N_n = k]$ est réalisé, alors on a obtenu k séries au cours des n premiers lancers, c'est-à-dire k ou $(k-1)$ séries au cours des $(n-1)$ premiers lancers. Dès lors, pour tout $i \neq k, k-1$, on a :

$$P_{[N_{n-1} = i] \cap P_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = P_{[N_{n-1} = i] \cap F_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = 0.$$

Supposons d'abord que $[N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}$ soit réalisé. Alors cela signifie que l'a obtenu k séries au cours des $(n-1)$ premiers lancers, et que le $(n-1)$-ème lancer a donné un pile. Dès lors, pour que l'événement $[N_n = k] \cap P_n$ soit réalisé, il faut et il suffit que l'on obtienne un pile au n-ème lancer. Mais comme les résultats des lancers sont équiprobables, on a :

$$P_{[N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = \frac{1}{2}.$$

Supposons ensuite que $[N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}$ soit réalisé. Alors cela signifie que l'a obtenu k séries au cours des $(n-1)$ premiers lancers, et que le $(n-1)$-ème lancer a donné un face. Dès lors, l'événement $[N_n = k] \cap P_n$ ne peut être réalisé, car on augmente nécessairement le nombre de séries si l'on obtient un pile au n-ème lancer, et donc :

$$P_{[N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = 0.$$

Supposons maintenant que $[N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}$ soit réalisé. Alors cela signifie que l'a obtenu $(k-1)$ séries au cours des $(n-1)$ premiers lancers, et que le $(n-1)$-ème lancer a donné un pile. Dès lors, l'événement $[N_n = k] \cap P_n$ ne peut être réalisé, car le nombre de séries ne changera pas si l'on obtient un pile au n-ème lancer, et donc :

$$P_{[N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = 0.$$

Supposons enfin que $[N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}$ soit réalisé. Alors cela signifie que l'a obtenu $(k-1)$ séries au cours des $(n-1)$ premiers lancers, et que le $(n-1)$-ème lancer a donné un face. Dès lors, pour que l'événement $[N_n = k] \cap P_n$ soit réalisé, il faut et il suffit que l'on obtienne un pile au n-ème lancer. Mais comme les résultats des lancers sont équiprobables, on a :

$$P_{[N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}}([N_n = k] \cap P_n) = \frac{1}{2}.$$

En réintroduisant les résultats obtenus dans la formule des probabilités totales, on obtient que :

$$\begin{aligned}P([N_n = k] \cap P_n) &= \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + 0P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) \\ &\quad +0P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}),\end{aligned}$$

ce qui nous donne la première formule à démontrer. Par un raisonnement analogue, on obtient aussi la deuxième. Par conséquent, pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} P([N_n = k] \cap P_n) &=& \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) \\ P([N_n = k] \cap F_n) &=& \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) \end{array}\right.}.$$

(g) Comme (P_{n-1}, F_{n-1}) et (P_n, F_n) sont des systèmes complets d'événements, on obtient à l'aide de la question précédente que :

$$\begin{aligned}P([N_n = k]) &= P([N_n = k] \cap P_n) + P([N_n = k] \cap F_n) \\ &= \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) + \\ &\quad \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\{P([N_{n-1} = k] \cap P_{n-1}) + P([N_{n-1} = k] \cap F_{n-1})\} + \\ &\quad \frac{1}{2}\{P([N_{n-1} = k-1] \cap F_{n-1}) + P([N_{n-1} = k-1] \cap P_{n-1})\} \\ &= \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k]) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1]).\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in \{1, ..., n\}$:

$$\boxed{P([N_n = k]) = \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k]) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1]).}$$

(h) Montrons que, pour tout $n \geq 2$, on a : $G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right) G_{n-1}(s)$. En multipliant le résultat de la question précédente par s^k et en sommant de 1 à n, on obtient que :

$$\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_n = k]) = \sum_{k=1}^{n} s^k \left\{\frac{1}{2}P([N_{n-1} = k]) + \frac{1}{2}P([N_{n-1} = k-1])\right\}.$$

Par linéarité de la somme, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_n = k]) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_{n-1} = k])\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_{n-1} = k-1])\right).$$

En effectuant le changement d'indices $l = k - 1$ dans la somme de droite, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_n = k]) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_{n-1} = k])\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{n-1} s^{l+1} P([N_{n-1} = l])\right).$$

Comme N_{n-1} ne peut pas prendre les valeurs 0 et n, il s'ensuit que $P([N_{n-1} = 0]) = 0$ et que $P([N_{n-1} = n]) = 0$, et donc par linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} s^k P([N_n = k]) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} s^k P([N_{n-1} = k])\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{n-1} s^{l+1} P([N_{n-1} = l])\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} s^k P([N_{n-1} = k])\right) + \frac{s}{2}\left(\sum_{l=1}^{n-1} s^{l} P([N_{n-1} = l])\right)\end{aligned}$$

Mais par définition de G_n et de G_{n-1}, il s'ensuit que :

$$G_n(s) = \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + \frac{s}{2}G_{n-1}(s).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right) G_{n-1}(s).}$$

(i) Calculons l'expression de $G_1(s)$. Par définition, on sait que :

$$G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} s^k P([N_1 = k]) = s^1 P([N_1 = 1]) = s \times 1,$$

d'où il s'ensuit que, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G_1(s) = s.}$$

D'après la question précédente, on voit que, pour tout $s \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(G_n(s))$ est géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$. D'après le cours, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s.}$$

(j) Déterminons le nombre moyen M_n de séries dans les n premiers lancers. Par définition, ce nombre moyen M_n est égal à l'espérance de N_n, laquelle est égale à $G_n'(1)$ d'après la question $(2)(e)$. Or, d'après la question précédente, on trouve que, pour tout $s \in \mathbb{R}^*$:

$$G_n'(s) = (n-1) \times \frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} \times 1.$$

En remplaçant s par 1, on obtient alors que :

$$G_n'(1) = (n-1) \times \frac{1}{2}\left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} 1 + \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} \times 1 = \frac{n-1}{2} + 1.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$:

$$\boxed{M_n = E(N_n) = \frac{n+1}{2}.}$$

A noter que cette formule est encore vraie si $n = 1$ *!*

(3) **Partie III : probabilité d'avoir une infinité de fois deux piles consécutifs.**

(a) Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1 - x \leq e^{-x}$. Pour ce faire, on considère la fonction $f : x \longmapsto e^{-x} - 1 + x$ sur $\mathbb{R}_+$. Alors cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme différence de fonctions dérivables. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f'(x) = -e^{-x} + 1.$$

Dès lors, la fonction f' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, et donc elle atteint son minimum en $x = 0$. Mais comme $f(0) = e^{-0} - 1 + 0 = 0$, il s'ensuit que f est positive sur $\mathbb{R}$, et donc $e^{-x} - 1 + x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - x \leq e^{-x}.}$$

(b) Dans cette question, on considère une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série $\sum_i P(A_i)$ diverge. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Pour tout $n \geq k$, on pose :

$$C_n = \bigcup_{k \leq i \leq n} A_i = A_k \cup ... \cup A_n.$$

(i) Justifions que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$. Comme la série $\sum_i P(A_i)$ diverge, cela signifie que sa suite des sommes partielles diverge. Comme la nature d'une série ne change pas si l'on lui retire un nombre fini de termes, cela entraine que la série $\sum_{i \geq k} P(A_i)$ diverge aussi. Mais comme cette dernière est à termes positifs, cela signifie que sa suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, et donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty.}$$

(ii) Montrons que, pour tout $n \geq k$, on a : $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P\left(\overline{A_i}\right)$. Par définition de C_n et par passage au contraire, on trouve que :

$$\overline{C_n} = \overline{\bigcup_{k\leq i\leq n} A_i} = \bigcap_{k\leq i\leq n} \overline{A_i}.$$

Comme les A_i sont indépendants, les $\overline{A_i}$ le sont aussi par passage au contraire, et donc :

$$P\left(\overline{C_n}\right) = P\left(\bigcap_{k\leq i\leq n} \overline{A_i}\right) = \prod_{k\leq i\leq n} P\left(\overline{A_i}\right).$$

Mais comme $P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n})$, on en déduit que, pour tout $n \geq k$:

$$\boxed{P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^{n} P\left(\overline{A_i}\right).}$$

(iii) Comme $P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leq e^{-P(A_i)}$ d'après la question $(3)(a)$, et que tous les $P(\overline{A_i})$ sont positifs, la question $(3)(b)(ii)$ entraine que :

$$\prod_{i=k}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) \leq \prod_{i=k}^{n} \exp\left(-P(A_i)\right) = \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P\left(A_i\right)\right).$$

D'après la question précédente, on en déduit que, pour tout $n \geq k$:

$$\boxed{P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P\left(A_i\right)\right).}$$

(iv) D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \geq k$:

$$1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^{n} P\left(A_i\right)\right) \leq P(C_n) \leq 1,$$

vu que P est une probabilité. Mais comme $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=k}^{n} P(A_i) = +\infty$, il s'ensuit que les termes de droite et de gauche de cet encadrement tendent tous deux vers 1 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(C_n) = 1.}$$

(v) Comparons les événements C_n et C_{n+1} pour l'inclusion. Comme $C_n = A_k \cup ... \cup A_n$ et que $C_{n+1} = A_k \cup ... \cup A_{n+1}$, on voit que $C_{n+1} = C_n \cup A_{n+1}$. En particulier, on a pour tout $n \geq k$:

$$\boxed{C_n \subset C_{n+1}.}$$

(vi) Comme la suite (C_n) est croissante (pour l'inclusion) d'après la question précédente, la propriété de limite monotone entraine que :

$$P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n\to+\infty} P(C_n).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = 1.}$$

(vii) Justifions que $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Pour ce faire, on peut remarquer que, pour tout $i \geq k$ et tout $n \geq i$, on a : $A_i \subset C_n$. En particulier, on voit que $A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$ pour tout $i \geq k$. En passant à la réunion, on obtient que :

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.$$

Réciproquement, on voit que $C_n = A_k \cup ... \cup A_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$ pour tout $n \geq k$. En passant à la réunion, on obtient que :

$$\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i.$$

Par conséquent, il s'ensuit que :

$$\boxed{\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.}$$

Mais comme $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = 1$, on en déduit que :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.}$$

(c) En considérant les événements A_n : "on obtient pile au $(2n)$-ème et au $(2n+1)$-ème lancers", montrons que la probabilité de l'événement E "avoir deux piles consécutifs, après n'importe quel lancer" vaut 1. Pour ce faire, considérons l'événement E_k "on obtient deux piles consécutifs à partir du k-ème lancer". Par définition, E_k est réalisé si l'un des événements A_n avec $n \geq k$ l'est, et donc $\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n = E_k$ pour tout $k \geq 1$. De plus, les événements A_i sont indépendants entre eux (puisqu'ils correspondent à des résultats de tirages différents). En outre, comme $A_n = P_{2n} \cap P_{2n+1}$ et que les résultats des lancers sont indépendants, on voit que $P(A_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. En particulier, la série $\sum P(A_n)$ diverge. D'après les résultats des questions précédentes, il s'ensuit que, pour tout $k \geq 1$:

$$P(E_k) = P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

Comme E est réalisé si et seulement si tous les E_k le sont, on voit que :

$$E = \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_k.$$

A noter que, si l'événement E_{k+1} est réalisé, alors on a obtenu deux piles consécutifs à partir du $(k+1)$-ème lancer, ce qui entraine qu'on en a obtenu deux à partir du k-ème lancer, et donc E_k est réalisé. En particulier, on voit que $E_{k+1} \subset E_k$ pour tout $k \geq 1$, et donc la suite d'événements (E_k) est décroissante. D'après la propriété de limite monotone, il s'ensuit que :

$$P(E) = \lim_{k \to +\infty} P(E_k) = \lim_{k \to +\infty} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P(E) = 1.}$$

2. Sujet type HEC-ESSEC

Corrigé du problème 2. Lorsque r est un réel > 0, on note :

$$\begin{aligned} A(r) &= \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que : } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ la série } \sum n^k|a_n|r^n \text{ converge}\right\}, \\ B(r) &= \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telle que la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0\right\}. \end{aligned}$$

A toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(r)$, on associe, sous réserve d'existence, la fonction $f_a : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des ensembles $A(r)$ et $B(r)$.

Dans la seconde, on étudie les propriétés de régularité des fonctions f_a.

Dans la troisième partie, on obtient, dans le cas où $r > 1$, sous certaines hypothèses, une formule de réciprocité donnant la suite a en fonction de la suite $\left(f_a^{(n)}(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, dans la dernière partie, on utilise les résultats obtenus pour l'étude de variables aléatoires discrètes.

Partie I : Premières propriétés et premiers exemples.

(1) Soit r un réel > 0 et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A(r)$. Montrons tout d'abord que, pour tout $x \in [-r, r]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum n^k|a_n||x|^n$ converge. Pour tout $x \in [-r, r]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on constate que $0 \leq n^k|a_n|.|x^n| \leq n^k|a_n|r^n$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $A(r)$, on sait par définition que la série $\sum n^k|a_n|r^n$ converge, et donc la série $\sum n^k|a_n||x|^n$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [-r, r]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{la série } \sum n^k|a_n||x|^n \text{ converge.}}$$

A présent, montrons que, pour tout réel r' tel que $r \leq r'$, on a : $A(r') \subset A(r)$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r')$, alors la série $\sum n^k|a_n|(r')^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui entraine d'après ce qui précède que la série $\sum n^k|a_n|r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$ vu que $r \in [-r', r']$, et donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout réel r' tel que $r \leq r'$, on a :

$$\boxed{A(r') \subset A(r).}$$

(2) Vérifions tout d'abord que : $0 < r \leq r' \Longrightarrow B(r') \subset B(r)$. Pour ce faire, supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(r')$. Alors la suite $(a_n(r')^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Or, on trouve par des calculs simples que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq |a_n r^n| = |a_n(r')^n| \times \left|\frac{r}{r'}\right|^n \leq |a_n(r')^n|.$$

D'après le théorème d'encadrement, la suite $(|a_n r^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qui entraine que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0, et donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(r)$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout réel r' tel que $0 < r \leq r'$, on a :

$$\boxed{B(r') \subset B(r).}$$

Vérifions à présent que : $A(r) \subset B(r)$. Pour ce faire, supposons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Alors la série $\sum n^k a_n r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on voit en choisissant $k = 0$ que la série $\sum a_n r^n$ converge, et donc son terme général $a_n r^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Dès lors, il s'ensuit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(r)$, et donc :

$$\boxed{A(r) \subset B(r).}$$

(3) Montrons que, pour tout réel $r > 0$, $A(r)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles. Tout d'abord, on peut remarquer que $A(r)$ est une partie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles par définition. De plus, $A(r)$ est non vide car il contient la suite nulle $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, on voit que $n^k|\theta_n|r^n = 0$, ce qui entraine que la série $\sum n^k|\theta_n|r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$ (vu qu'il s'agit de la série de terme général nul), et donc $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Reste à vérifier que $A(r)$ est stable par combinaisons linéaires. Pour ce faire, considérons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A(r)$ et deux réels λ, μ. Alors les séries $\sum n^k|a_n|r^n$ et $\sum n^k|b_n|r^n$ convergent pour tout

$k \in \mathbb{N}$, ce qui entraine par linéarité que la série $\sum n^k(|\lambda|.|a_n| + |\mu|.|b_n|)r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or, on voit d'après l'inégalité triangulaire que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq n^k|\lambda a_n + \mu b_n|r^n \leq n^k(|\lambda|.|a_n| + |\mu|.|b_n|)r^n.$$

D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, il s'ensuit que la série $\sum n^k|\lambda a_n + \mu b_n|r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc la suite $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $r > 0$:

$$\boxed{A(r) \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.}}$$

(4) Exemples :

(a) On souhaite montrer que, pour tout réel $r > 0$, la suite $\alpha = \left(\dfrac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour cela, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_n(k) = \frac{n^{k+2}r^n}{n!}.$$

Montrons tout d'abord que la suite $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Pour ce faire, fixons un entier $k \in \mathbb{N}$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} = \frac{\frac{(n+1)^{k+2}r^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^{k+2}r^n}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{k+2}\frac{r(n!)}{(n+1)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+2}\frac{r}{n+1}.$$

Comme $(1+\frac{1}{n})^{k+2}$ et $\frac{r}{n+1}$ tendent tous deux vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on voit par produit que la suite $\left(\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. En particulier, comme cette suite est positive, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$0 \leq \frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} \leq 1.$$

Dès lors, on constate que la suite $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est de plus minorée par 0 (vu qu'elle est positive), il s'ensuit d'après le théorème d'encadrement que la suite $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Si l'on désigne par l sa limite, on voit par passage à la limite dans les inégalités que $l \geq 0$. Si l était non nul, alors la suite $\left(\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergerait vers $\frac{l}{l} = 1$, ce qui est impossible car elle converge vers 0 d'après ce qui précède, et donc $l = 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n(k))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

Montrons à présent que : $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A(r)$. Pour ce faire, fixons un entier $k \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on sait que :

$$u_n(k) = \frac{n^{k+2}r^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, ceci entraine qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{n^k r^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après le cours et qu'elle est à termes positifs, il s'ensuit d'après le critère de négligeabilité pour les séries que la série $\sum \frac{n^k r^n}{n!}$ converge. Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que :

$$\boxed{\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in A(r).}$$

(b) Pour tout réel $\lambda > 0$, on note $\beta(\lambda)$ la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminons tout d'abord l'ensemble E_λ des réels $r > 0$ pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $B(r)$. Par définition, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(r)$ si et seulement si la suite géométrique $((\lambda r)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, c'est-à-dire si $|\lambda r| < 1$. Comme $\lambda > 0$, il s'ensuit que la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(r)$ si et seulement si $r \in]0, \frac{1}{\lambda}[$, et donc :

$$\boxed{E_\lambda = \left]0, \frac{1}{\lambda}\right[.}$$

Déterminons à présent l'ensemble F_λ des réels $r > 0$ pour lesquels la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $A(r)$. Par définition, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si la série $\sum n^k(\lambda r)^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\lambda > 0$, on constate par croissances comparées que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, \frac{1}{\lambda}[$:

$$n^{k+2}(\lambda r)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

car $0 < \lambda r < 1$. En particulier, ceci entraine que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, \frac{1}{\lambda}[$:

$$n^k(\lambda r)^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après le cours et qu'elle est à termes positifs, il s'ensuit d'après le critère de négligeabilité que la série $\sum n^k(\lambda r)^n$ converge pour tout $r \in]0, \frac{1}{\lambda}[$. Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ pour tout $r \in]0, \frac{1}{\lambda}[$, et donc on a l'inclusion :

$$\left]0, \frac{1}{\lambda}\right[\subset F_\lambda.$$

Si maintenant $r \geq \frac{1}{\lambda}$, alors on a $n^k(\lambda r)^n \geq n^k \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par minoration, on voit que la suite $(n^k(\lambda r)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, et donc la série $\sum n^k(\lambda r)^n$ diverge grossièrement pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient pas à $A(r)$ pour tout $r \in [\frac{1}{\lambda}, +\infty[$, et donc :

$$F_\lambda \subset \left]0, \frac{1}{\lambda}\right[.$$

Par conséquent, on en déduit par double inclusion que :

$$\boxed{F_\lambda = \left]0, \frac{1}{\lambda}\right[.}$$

(5) Soit ρ un réel > 0 et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(\rho)$. Montrons que, pour tout $r \in]0, \rho[$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Pour ce faire, fixons un réel $r \in]0, \rho[$, et commençons par écrire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$n^{k+2}|a_n|r^n = |a_n|\rho^n n^{k+2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$, la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et donc la suite $(|a_n|\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0. De plus, comme r appartient à $]0, \rho[$, on voit que $0 < \frac{r}{\rho} < 1$, ce qui entraine par croissances comparées que :

$$n^{k+2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par produit, ceci nous donne que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$n^{k+2}|a_n|r^n = |a_n|\rho^n n^{k+2}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, ceci entraine que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$n^k|a_n|r^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après le cours et qu'elle est à termes positifs, il s'ensuit d'après le critère de négligeabilité que $\sum n^k|a_n|r^n$ converge. Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. Mais comme ceci est vrai pour tout $r \in]0, \rho[$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } A(r) \text{ pour tout } r \in]0, \rho[.}$$

Partie II : Régularité de la fonction f_a.

Dans cette partie, R désigne un réel > 0 et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$.

(1) Vérifier que $f_a : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur $]-R, R[$. Pour ce faire, fixons un réel $x \in]-R, R[$. Si $x = 0$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge en tant que série de terme général nul, et donc f_a est bien définie en x. Si maintenant $x \neq 0$, on pose $r = |x|$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(R)$ et que $0 < r < R$, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ d'après la question (5) de la partie I, et donc la série $\sum n^k|a_n|r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on obtient pour $k = 0$ que la série $\sum |a_n|r^n = \sum |a_n x^n|$

converge. Dès lors, on voit que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument, ce qui entraine qu'elle converge, et donc f_a est bien définie en x. Comme ceci est vrai pour tout $x \in]-R, R[$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ est bien définie sur }]-R, R[.}$$

(2) Continuité de f_a :

(a) Soient $r \in]0, R[$, $x \in [-r, r]$ et h un réel tel que : $x + h \in [-r, r]$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|(x+h)^n - x^n| \leq n r^{n-1} |h|.$$

A noter que l'inégalité ci-dessus est clairement vraie si $h = 0$. Dès lors, supposons que $h \neq 0$ et considérons l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^n$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, l'égalité des accroissements finis entraine qu'il existe un réel c strictement compris entre x et $x + h$ tel que :

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(c) = n c^{n-1}.$$

En passant à la valeur absolue, on trouve que :

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right| \leq n |c|^{n-1}.$$

Comme $-r \leq x \leq r$, que $-r \leq x + h \leq r$ et que c est strictement compris entre x et $x + h$, on voit que $-r \leq c \leq r$, et donc $n|c|^{n-1} \leq n r^{n-1}$. Dès lors, on obtient que :

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right| \leq n r^{n-1}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{|(x+h)^n - x^n| \leq n r^{n-1} |h|.}$$

(b) Justifions que : $|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|$. Remarquons tout d'abord que $f_a(x)$ et $f_a(x+h)$ sont bien définies d'après la question (1) de la partie II, car $x, x+h$ appartiennent à $[-r, r]$ et $[-r, r] \subset]-R, R[$ par construction. En particulier, les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n (x+h)^n$ convergent. De plus, comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $B(R)$ et que $0 < r < R$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ d'après la question (5) de la partie I. Dès lors, la série $\sum n^k |a_n| r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, on voit en prenant $k = 1$ que $\sum n |a_n| r^n$ converge. Dès lors, on obtient avec la question précédente, par linéarité de la somme et d'après l'inégalité triangulaire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{p} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{p} a_n x^n \right| &= \left| \sum_{n=0}^{p} a_n [(x+h)^n - x^n] \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{p} |a_n| \, . \, |(x+h)^n - x^n| \\
&\leq \sum_{n=0}^{p} |a_n| \, n r^{n-1} |h| \\
&\leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{p} n \, |a_n| \, r^n \right) |h|.
\end{aligned}$$

Comme toutes les sommes partielles des séries ci-dessus convergent, il s'ensuit par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus que :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|.$$

Par conséquent, on en déduit par définition de f_a que :

$$\boxed{|f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n |a_n| r^n \right) |h|.}$$

(c) Montrons tout d'abord que f_a est continue sur $[-r,r]$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in [-r,r]$ et pour tout réel h tel que $x+h \in [-r,r]$, on a l'encadrement suivant :

$$0 \leq |f_a(x+h) - f_a(x)| \leq \frac{1}{r}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n|a_n|r^n\right)|h|.$$

Comme le terme de droite dans cet encadrement tend vers 0 quand h tend vers 0, on obtient d'après le théorème des gendarmes que le terme du milieu dans l'encadrement ci-dessus tend vers 0 quand h tend vers 0, et donc :

$$\lim_{h\to 0} f_a(x+h) = f_a(x).$$

En particulier, la fonction f_a est continue en x. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in [-r,r]$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est continue sur } [-r,r].}$$

Montrons à présent que f_a est continue sur $]-R,R[$. Pour ce faire, considérons un réel $x \in]-R,R[$, et posons $r = \frac{R+|x|}{2}$. Par construction, on voit que $0 < r < R$ et de plus, on a $x \in [-r,r]$. D'après ce qui précède, la fonction f_a est continue en x. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in]-R,R[$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est continue sur }]-R,R[.}$$

(3) Caractère $\mathcal{C}^1$ de f_a :

On considère ici un réel $r \in]0,R[$ et un réel $x \in [-r,r]$. Pour tout $n \in N$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et, sous réserve d'existence : $g_a : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

(a) Soit $\rho \in [r,R[$. Justifions tout d'abord que la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(R)$ par hypothèse et que $0 < \rho < R$, on voit d'après la question (5) de la partie I que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(\rho)$. En particulier, la série $\sum n^k|a_n|\rho^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, la série $\sum n^{k+1}|a_n|\rho^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(\rho)$. Mais comme $A(\rho) \subset B(\rho)$ d'après la question (2) de la partie I, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (na_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } B(\rho).}$$

A présent, montrons que g_a est définie et continue sur $]-R,R[$. D'après les questions (1) et (2)(c) appliquées à la fonction g_a et vu que la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$, il s'ensuit que la fonction g_a est définie et continue sur $]-\rho,\rho[$, et ce pour tout $\rho \in [r,R[$. Considérons alors un réel $x \in]-R,R[$, et posons $\rho = \max\{\frac{R+r}{2}, \frac{R+|x|}{2}\}$. Par construction, on voit que $0 < r < \rho < R$ et de plus, on a $x \in [-r,r]$. Comme $r < \rho$, on constate que $[-r,r] \subset]-\rho,\rho[$, et donc $x \in]-\rho,\rho[$. D'après ce qui précède, la fonction g_a est définie et continue en x. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in]-R,R[$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } g_a \text{ est définie et continue sur }]-R,R[.}$$

(b) Vérifions que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S_n(x) = a_0 + \int_0^x S_n'(t)dt$. Comme la fonction est polynomiale sur $\mathbb{R}$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Dès lors, on obtient par intégration que :

$$\int_0^x S_n'(t)dt = S_n(x) - S_n(0).$$

Mais comme $S_n(0) = \sum_{k=0}^n a_k 0^k = a_0$, on voit que :

$$\int_0^x S_n'(t)dt = S_n(x) - a_0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{S_n(x) = a_0 + \int_0^x S_n'(t)dt.}$$

(c) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k$. Remarquons que, d'après la question (3)(a), la fonction g_a est définie et continue sur $]-R, R[$. De plus, la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(\rho)$ pour tout $\rho \in]r, R[$. Dès lors, pour tout $\rho \in]r, R[$, on voit que $0 < r < \rho$, et donc la suite $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$ d'après la question (5) de la partie I. En particulier, la série $\sum n^{k+1}|a_n|r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. En prenant $k = 0$, on obtient que la série $\sum n|a_n|r^n$ converge. D'après l'inégalité triangulaire, on trouve que, pour tout $p > n$ et pour tout réel t tel que $0 \leq |t| \leq |x|$:

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{p} ka_k t^{k-1} - S_n'(t)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{p} ka_k t^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} ka_k t^{k-1}\right| \\ &= \left|\sum_{k=n+1}^{p} ka_k t^{k-1}\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{p} k\,|a_k|\,.\,|t|^{k-1}. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq |t| \leq |x| \leq r$, il s'ensuit que, pour tout $p > n$ et pour tout réel t tel que $0 \leq |t| \leq |x|$:

$$\left|\sum_{k=1}^{p} ka_k t^{k-1} - S_n'(t)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{p} k\,|a_k|\,r^{k-1}.$$

Comme les séries $\sum ka_k t^{k-1}$ et $\sum k|a_k|r^k$ convergent, on obtient par passage à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus que, pour tout réel t tel que $0 \leq |t| \leq |x|$:

$$|g_a(t) - S_n'(t)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k t^{k-1} - S_n'(t)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,|a_k|\,r^{k-1}.$$

D'après l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in [0, r]$:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| &\leq \int_0^x |g_a(t) - S_n'(t)|\,dt \\ &\leq \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^{k-1}dt \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^{k-1}x \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k, \end{aligned}$$

et ce car $0 \leq x \leq r$. En procédant de même pour tout $x \in [-r, 0]$, on obtient que :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| &\leq -\int_0^x |g_a(t) - S_n'(t)|\,dt \\ &\leq -\int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^{k-1}dt \\ &\leq -\sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^{k-1}x \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k, \end{aligned}$$

et ce car $0 \leq -x \leq r$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k.}$$

(d) Montrons que : $f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt$. D'après les questions (3)(b) et (3)(c) de la partie II et par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x g_a(t)dt + a_0 - S_n(x)\right| &= \left|\int_0^x g_a(t)dt - \int_0^x S_n'(t))dt\right| \\ &= \left|\int_0^x (g_a(t) - S_n'(t))dt\right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k.\end{aligned}$$

En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \left|\int_0^x g_a(t)dt + a_0 - S_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k|a_k|r^k.$$

Comme le terme de droite dans l'encadrement ci-dessus est le reste d'une série convergente, il tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, le terme du milieu dans l'encadrement ci-dessus tend aussi vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a_0 + \int_0^x g_a(t)dt.$$

Mais comme $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum a_k x^k$, laquelle converge et a pour somme $f_a(x)$, on en déduit que :

$$\boxed{f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt.}$$

(e) Montrons que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et que : $f_a' = g_a$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $r \in]0, R[$ et pour tout $x \in [-r, r]$, on a :

$$f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt.$$

Comme dans les questions précédentes, on vérifie alors que $f_a(x) = a_0 + \int_0^x g_a(t)dt$ pour tout $x \in]-R, R[$. Mais comme la fonction g_a est continue sur $]-R, R[$ d'après la question (3)(a) et que la fonction $x \longmapsto \int_0^x g_a(t)dt$ est l'unique primitive de la fonction g_a sur $]-R, R[$ qui s'annule en 0, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]-R, R[\text{ et de plus : } f_a' = g_a.}$$

(4) Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f_a :

(a) Soit $r \in]0, R[$. Montrons que la suite $(a_n)_{n\in N}$ appartient à $A(r)$ si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k}|a_n|r^{n-k}$ converge. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $n > k$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Comme un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$, on voit que $n(n-1)...(n-k+1) \sim n^k$ quand n tend vers $+\infty$, et donc :

$$\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

En particulier, ceci nous donne par produit que :

$$\binom{n}{k}|a_n|r^{n-k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k!r^k} n^k |a_n| r^n.$$

Comme $n^k|a_n|r^n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les séries $\sum \binom{n}{k}|a_n|r^{n-k}$ et $\sum \frac{1}{k!r^k}n^k|a_n|r^n$ sont donc de même nature d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. Comme les séries $\sum \frac{1}{k!r^k}n^k|a_n|r^n$ et $\sum n^k|a_n|r^n$ sont de même nature par linéarité, il s'ensuit que les séries $\sum \binom{n}{k}|a_n|r^n$ et $\sum n^k|a_n|r^n$ sont de même nature pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, ceci entraine que :

$$\begin{aligned}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A(r) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \sum n^k|a_n|r^n \text{ converge} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \sum \binom{n}{k}|a_n|r^n \text{ converge}\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A(r) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ \sum \binom{n}{k}|a_n|r^n \text{ converge.}}$$

(b) Montrons par récurrence sur $k \geq 0$ que, pour tout réel $R > 0$ et pour toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(R)$, la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-R, R[$ et que, pour tout $x \in]-R, R[$, on a :

$$f_a^{(k)}(x) = k!\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_n x^{n-k}\right).$$

Tout d'abord, la propriété $\mathcal{P}$ à démontrer est clairement vraie pour $k = 0$, et elle est aussi vraie pour $k = 1$ d'après la question (3)(e) de la partie II. Supposons à présent que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $B(R)$. D'après la question (3)(e) de la partie II, la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[$ et de plus, on a pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Fixons alors un réel $r \in]0, R[$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $B(R)$, cette suite appartient à $A(r)$ d'après la question (5) de la partie I, et donc la série $\sum n^k|a_n|r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par décalage d'indice, la série $\sum(n+1)^k|a_{n+1}|r^{n+1}$ converge aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui entraine que $\sum(n+1)^{k+1}|a_{n+1}|r^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$ par linéarité, et donc la suite $((n+1)a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $A(r)$. D'après la question (2) de la partie I, la suite $((n+1)a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient aussi à $B(r)$. Dès lors, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction $g_a : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-r, r[$ et de plus, on a pour tout $x \in]-r, r[$ (en posant $l = n+1$) :

$$\begin{aligned}
g_a^{(k)}(x) &= k!\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(n+1)a_{n+1}x^{n-k}\right) \\
&= k!\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\binom{l-1}{k} l a_l x^{l-1-k}\right) \\
&= k!\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\frac{(l-1)!}{k!(l-1-k)!} l a_l x^{l-1-k}\right) \\
&= k!\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\frac{l!}{k!(l-1-k)!} a_l x^{l-1-k}\right) \\
&= k!\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}(k+1)\frac{l!}{(k-1)!(l-1-k)!} a_l x^{l-1-k}\right) \\
&= (k+1)!\left(\sum_{l=k+1}^{+\infty}\binom{l}{k+1} a_l x^{l-(k+1)}\right).
\end{aligned}$$

Comme $f_a' = g_a$ d'après la question (3)(e) de la partie II, il s'ensuit que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $]-r, r[$ et que l'on a pour tout $x \in]-r, r[$:

$$f_a^{(k+1)}(x) = g_a^{(k)}(x) = (k+1)!\left(\sum_{n=k+1}^{+\infty}\binom{n}{k+1}a_n x^{n-(k+1)}\right).$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $r \in]0, R[$, on en déduit comme aux questions précédentes que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $]-R, R[$ et que l'on a pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f_a^{(k+1)}(x) = (k+1)! \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} a_n x^{n-(k+1)} \right),$$

d'où l'on déduit que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \in \mathbb{N}^*$. En particulier, il s'ensuit que, pour toute suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $B(R)$:

$$\boxed{f_a \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-R, R[\text{ et : } \forall k \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in]-R, R[,\ \ f_a^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k} \right).}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimons a_n en fonction de $f_a^{(n)}(0)$. D'après la question précédente, on voit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_a^{(n)}(0) = n! \left(\sum_{i=n}^{+\infty} \binom{i}{k} a_i 0^{i-n} \right) = n! \binom{n}{n} a_n.1 = n! a_n.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_n = \frac{f_a^{(n)}(0)}{n!}.}$$

(5) Exemples :

(a) On pose $\alpha = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $f_\alpha : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Donnons tout d'abord une expression de $f_\alpha(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après le cours, on reconnaît la somme de la série exponentielle, et donc on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f_\alpha(x) = e^x.}$$

A présent, calculons $f_\alpha^{(k)}(1)$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après les propriétés de l'exponentielle, on sait que $f'_\alpha = f_\alpha$, ce qui entraine par une récurrence facile que $f_\alpha^{(k)} = f_\alpha$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc on voit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f_\alpha^{(k)}(1) = e^1 = e.}$$

(b) Soit λ un réel > 0, soit β la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $f_\beta : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n x^n$. Donnons tout d'abord une expression de $f_\beta(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$. D'après le cours, on reconnaît la somme de la série géométrique de raison λx, et donc on a pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$:

$$\boxed{f_\beta(x) = \frac{1}{1-\lambda x}.}$$

Montrons à présent que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$, la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k}$ converge et : $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$. Pour ce faire, fixons un réel $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$ et posons :

$$r = \frac{|x| + \frac{1}{\lambda}}{2}.$$

Par construction, on voit que x appartient à $]-r, r[$ et que $0 < r < \frac{1}{\lambda}$. D'après les questions (4) et (2) de la partie I, la suite β appartient à $A(r)$, et donc à $B(r)$. D'après la question (4)(a) de la partie II, la série $\sum \binom{n}{k} (\lambda r)^n$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui entraine par linéarité que la série $\sum \binom{n}{k} (\lambda r)^{n-k}$ converge aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$. En utilisant le critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on vérifie comme à la question (1) de la partie I que la série $\sum \binom{n}{k} (\lambda x)^n$ converge absolument pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc elle converge pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus, comme β appartient à $B(r)$, on trouve avec la question (4)(b) de la partie II que la fonction f_β est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (vu que $x \in]-r, r[$ par construction) :

$$f_\beta^{(k)}(x) = k! \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \lambda^n x^{n-k} \right) = \left(\frac{1}{1-\lambda x} \right)^{(k)}.$$

Par une récurrence facile, on vérifie alors que $\left(\frac{1}{1-\lambda x}\right)^{(k)} = \frac{k!\lambda^k}{(1-\lambda x)^{k+1}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui nous donne que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \lambda^n x^{n-k} = \frac{\lambda^k}{(1-\lambda x)^{k+1}}.$$

A près division par λ^k, on trouve que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}.$$

Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$, on en déduit que, pour tout $(k,x) \in \mathbb{N} \times \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$:

$$\boxed{\text{la série } \sum \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} \text{ converge et : } \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}.}$$

Partie III : Une formule de réciprocité.

Dans cette partie, R **désigne un réel** > 1 et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $b_n = \dfrac{f_a^{(n)}(1)}{n!}$ et on fait l'hypothèse (H) qu'il existe un réel $\rho > 1$ tel que la suite $(b_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(1) Expression de a_0 :

(a) Montrons que : $\forall N \in \mathbb{N}$, $f_a(0) = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt$. Comme f_a est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ sur $]-R, R[$ d'après la question (4)(b) de la partie II et que $R > 1$, on obtient par application de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre N à la fonction f_a entre 1 et 0 que :

$$f_a(0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f_a^{(k)}(1)}{k!}(0-1)^k + \int_1^0 \frac{f_a^{N+1}(t)}{N!}(0-t)^N dt,$$

ce qui se réécrit d'après la relation de Chasles sous la forme suivante :

$$f_a(0) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{f_a^{(k)}(1)}{k!} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{f_a^{N+1}(t)}{N!} t^N dt.$$

Par définition des b_k, on en déduit que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f_a(0) = \sum_{p=0}^{N} (-1)^p b_p + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt.}$$

(b) Démontrons que : $\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt = 0$. Comme $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$, on sait d'après la question (4)(b) de la partie II que la série $\sum_{n\geq N+1} \binom{n}{N+1} a_n t^{n-N-1}$ converge pour tout $t \in [0,1]$ (car $R > 1$) et que, de plus on a :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \binom{n}{N+1} a_n t^{n-N-1} = \frac{f_a^{N+1}(t)}{(N+1)!}.$$

De plus, comme $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ceci nous donne que, pour tout $t \in [0,1]$:

$$0 \leq \frac{f_a^{N+1}(t)}{(N+1)!} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \binom{n}{N+1} a_n t^{n-N-1} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \binom{n}{N+1} a_n 1^{n-N-1} = \frac{f_a^{N+1}(1)}{(N+1)!}.$$

En particulier, on obtient par positivité et croissance de l'intégrale que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt \leq \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(1)dt = \frac{f_a^{N+1}(1)}{(N+1)!} = b_{N+1}. \quad (*)$$

Par hypothèse, on sait qu'il existe un réel $\rho > 1$ tel que la suite $(b_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme $b_n = b_n\rho^n \frac{1}{\rho^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $(\frac{1}{\rho^n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (comme suite géométrique de raison <1 en valeur absolue), la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers aussi vers 0. Dès lors, d'après le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement $(*)$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt = 0.}$$

(c) Montrons que la série $\sum_{p\geq 0}(-1)^p b_p$ converge et que : $a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p b_p$. D'après les questions $(1)(a)$ et $(1)(b)$ de la partie III, on sait que :

$$f_a(0) - \sum_{p=0}^{N}(-1)^p b_p = (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+1)}(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, la série $\sum_{p\geq 0}(-1)^p b_p$ converge et sa somme vaut $f_a(0)$. Mais comme $f_a(0)=a_0$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{p\geq 0}(-1)^p b_p \text{ converge et : } a_0 = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p b_p.}$$

(2) Généralisation : On considère ici un entier naturel s fixé.

(a) Montrons que : $\forall N\in\mathbb{N},\ f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{N}(-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt$. Comme f_a est de classe $\mathcal{C}^{N+s+1}$ sur $]-R,R[$ d'après la question $(4)(b)$ de la partie II, la fonction $f_a^{(s)}$ est de classe $\mathcal{C}^{N+s+1}$ sur $]-R,R[$. De plus, comme $R>1$, on obtient par application de la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre N à la fonction $f_a^{(s)}$ entre 1 et 0 que :

$$f_a^{(s)}(0) = \sum_{k=0}^{N}\frac{f_a^{(k+s)}(1)}{k!}(0-1)^k + \int_1^0 \frac{f_a^{N+s+1}(t)}{N!}(0-t)^N dt,$$

D'après la relation de Chasles, on en déduit que, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{f_a^{(s)}(0) = \sum_{p=0}^{N}(-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt.}$$

(b) Vérifions que : $\forall N\in\mathbb{N},\ \left|\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt\right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!}\rho^{N+s+1}\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!}\frac{1}{\rho^{N+s+1}}$. Comme $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $B(R)$, on sait d'après la question $(4)(b)$ de la partie II que la série $\sum_{n\geq N+s+1}\binom{n}{N+s+1}a_n t^{n-N-s-1}$ converge pour tout $t\in[0,1]$ (car $R>1$) et que, de plus on a :

$$\sum_{n=N+s+1}^{+\infty}\binom{n}{N+s+1}a_n t^{n-N-s-1} = \frac{f_a^{N+s+1}(t)}{(N+s+1)!}.$$

De plus, comme $a_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, ceci nous donne que, pour tout $t\in[0,1]$:

$$0\leq \frac{f_a^{N+s+1}(t)}{(N+1)!} = \sum_{n=N+s+1}^{+\infty}\binom{n}{N+s+1}a_n t^{n-N-s-1} \leq \sum_{n=N+s+1}^{+\infty}\binom{n}{N+s+1}a_n 1^{n-N-s-1} = \frac{f_a^{N+s+1}(1)}{(N+s+1)!}.$$

En particulier, on obtient par positivité et croissance de l'intégrale que :

$$0\leq \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt \leq \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(1)dt = \frac{f_a^{N+s+1}(1)}{(N+1)!}.$$

Dès lors, ceci entraine que, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\left|\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt\right| \leq \frac{f_a^{N+s+1}(1)}{(N+1)!} = \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!}\rho^{N+s+1}\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!}\frac{1}{\rho^{N+s+1}}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\left|\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt\right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!}\rho^{N+s+1}\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!}\frac{1}{\rho^{N+s+1}}.}$$

(c) Déterminons $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt$. D'après la question précédente, on a pour tout $N\in\mathbb{N}$:

$$0\leq \left|\int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt\right| \leq \frac{f_a^{(N+s+1)}(1)}{(N+s+1)!}\rho^{N+s+1}\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!}\frac{1}{\rho^{N+s+1}}.$$

Par définition des b_k, ceci nous donne que, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \left| \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt \right| \leq b_{N+s+1}\rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}. \quad (*)$$

Comme tout polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en $+\infty$, il vient :

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} = (N+s+1)(N+s)...(N+2) \underset{N\to+\infty}{\sim} N^s.$$

Dès lors, ceci entraine par produit que :

$$\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^s}{\rho^{N+s+1}}.$$

Comme $\rho > 1$, on obtient par croissances comparées que $\frac{N^s}{\rho^{N+s+1}}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, et donc $\frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}}$ tend aussi vers 0 quand N tend vers $+\infty$. En particulier, comme la suite $(b_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on trouve par produit que :

$$b_{N+s+1}\rho^{N+s+1} \frac{(N+s+1)!}{(N+1)!} \frac{1}{\rho^{N+s+1}} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème des gendarms appliqué à l'encadrement $(*)$, il s'ensuit que :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt \right| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt = 0.}$$

(d) Montrons que la série $\sum_{p\geq 0}(-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et que : $a_s = \sum_{n=s}^{+\infty}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n$. D'après les questions (2)(a) et (2)(c) de la partie III et par définition des b_k, on voit que :

$$f_a^{(s)}(0) - \sum_{p=0}^{N}(-1)^p \frac{f_a^{(p+s)}(1)}{p!} = f_a^{(s)}(0) - \sum_{p=0}^{N}(-1)^p \frac{b_{p+s}(p+s)!}{p!} = \int_0^1 \frac{t^N}{N!} f_a^{(N+s+1)}(t)dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, la série $\sum_{p\geq 0}(-1)^p \frac{b_{p+s}(p+s)!}{p!}$ converge et sa somme vaut $f_a^{(s)}(0)$. Si l'on effectue le changement d'indice $n = p+s$, alors on voit que la série $\sum_{n\geq s}(-1)^{n-s}\frac{b_n n!}{(n-s)!}$ converge aussi et que sa somme vaut également $f_a^{(s)}(0)$. De plus, par linéarité de la somme, il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq s}(-1)^{n-s}\frac{b_n n!}{(n-s)!s!} = \sum_{n\geq s}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n$ converge et que sa somme vaut $\frac{f_a^{(s)}(0)}{s!}$. Mais comme $\frac{f_a^{(s)}(0)}{s!} = a_s$ d'après la question (4)(c) de la partie II, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{p\geq 0}(-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s} \text{ converge et : } a_s = \sum_{n=s}^{+\infty}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n.}$$

(3) Cas particulier : On suppose dans cette question que $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs pour laquelle il existe un entier naturel d tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq d+1 \Longrightarrow a_n = 0$.

(a) Comme $a_n = 0$ pour tout $n \geq d+1$, on voit que, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f_a(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est la restriction à }]-R, R[\text{ d'une fonction polynomiale de degré } \leq d.}$$

(b) Montrons que la condition (H) est vérifiée. Comme f_a est la restriction à $]-R, R[$ d'une fonction polynomiale de degré $\leq d$, on constate que $f_a^{(n)}$ est la fonction nulle sur $]-R, R[$ pour tout $n \geq d+1$. En particulier, on trouve que $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!} = 0$ pour tout $n \geq d+1$. Comme la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang $d+1$, la suite $(2^n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi nulle à partir du rang $d+1$, et donc elle tend vers 0. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la condition } (H) \text{ est vérifiée avec, par exemple : } \rho = 2.}$$

(c) Montrons que, pour tout $s \in [\![0, d]\!]$, on a : $a_s = \sum_{n=s}^{d} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$. D'après la question (2)(d) de la partie III, on sait que la série $\sum_{p \geq 0} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s}$ converge et que : $a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n$. De plus, d'après la question précédente, on sait aussi que $b_n = 0$ pour tout $n \geq d+1$, ce qui entraine que la somme de la série ci-dessus s'arrête au rang d. Par conséquent, on a pour tout $s \in [\![0, d]\!]$:

$$\boxed{a_s = \sum_{n=s}^{d} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.}$$

Partie IV : Applications aux variables aléatoires discrètes.

Dans cette partie, les variables aléatoires seront discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour une telle variable aléatoire X, on pourra utiliser, sans les rappeler, les notations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ a_n = P(X = n) \quad \text{et} \quad G_X : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{autrement dit :} \ \ G_X = f_a.$$

(1) Premiers résultats :

(a) Justifions que la suite a appartient à $B(1)$. Comme la famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'evénements, la série $\sum a_n = \sum P(X = n)$ converge et sa somme vaut 1. En particulier, son terme général a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc la suite $(a_n 1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0. Par conséquent, on en déduit par définition de $B(1)$ que :

$$\boxed{\text{la suite } a \text{ appartient à } B(1).}$$

(b) Montrons qu'il existe un réel $R \geq 1$ tel que G_X soit définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Comme la suite a appartient à $B(1)$, la fonction $f_a = G_X$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ d'après la question (5)(b) de la partie II. En particulier, on en déduit en choisissant $R = 1$ que :

$$\boxed{\text{il existe un réel } R \geq 1 \text{ tel que } G_X \text{ soit définie et } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-R, R[.}$$

(2) Premier exemple :

(a) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre 1. Déterminons tout d'abord la fonction G_X. Comme X suit la loi de Poisson de paramètre 1, on constate d'après les propriétés des séries exponentielles et par linéarité de la somme que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \frac{e^{-1}(1)^n}{n!} = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^{-1} e^t.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{G_X(t) = e^{t-1}.}$$

A présent, vérifions qu'elle est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculons $G_X^{(s)}(1)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Par composition de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on voit que G_X est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et de plus, on obtient par des dérivations successives que $G_X^{(s)}(t) = e^{t-1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{G_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et : } \ \forall s \in \mathbb{N}, \ \ G_X^{(s)}(1) = e^0 = 1.}$$

(b) On suppose maintenant que X est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et vérifiant la conditions suivantes : $G_X = f_a$ est définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f_a^{(s)}(1) = 1$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Justifions tout d'abord que l'hypothèse (H) de la partie III est réalisée. Comme la série exponentielle $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge d'après le cours, la suite $(\frac{2^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 (vu que c'est le terme général d'une série convergente). Comme $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit qu'il existe un réel $\rho > 1$ (que l'on a pris égal à 2 ici) tel que la suite $(\frac{2^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers 0. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'hypothèse } (H) \text{ est bien vérifiée.}}$$

A présent, déterminons a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de la question (2)(d) de la partie III, on sait que, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \binom{p+s}{s} b_{p+s},$$

la dernière égalité s'obtenant par un simple décalage d'indice. Comme $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!} = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit par linéarité de la somme et d'après les propriétés des séries exponentielles que :

$$a_s = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \binom{p+s}{s} \frac{1}{(p+s)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{p!s!} = \frac{1}{s!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{e^{-1}}{s!}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_s = \frac{e^{-1}}{s!}.}$$

En particulier, comme $a_s = P(X = s) = \frac{e^{-1}}{s!}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que :

$$\boxed{X \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } 1.}$$

(3) Deuxième exemple : On considère ici un réel $p \in]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.

(a) On suppose que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p. Déterminons tout d'abord la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis la fonction G_X. Comme $X+1$ suit la loi géométrique de paramètre p, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = P(X = n) = P(X + 1 = n + 1) = q^{n+1-1} p,$$

avec la convention $q = 1 - p$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_n = q^n p.}$$

D'après les propriétés des séries géométriques et par linéarité de la somme, on obtient que, pour tout $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$:

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p(qt)^n = p \sum_{n=0}^{+\infty} (qt)^n = \frac{p}{1 - qt}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$:

$$\boxed{G_X(t) = \frac{p}{1 - qt}.}$$

A présent, vérifions que G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, puis calculons $G_X^{(s)}(1)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Par définition, la fonction G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$. De plus, par une récurrence facile, on peut montrer que, pour tout $s \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, on a :

$$(G_X)^{(s)}(t) = \frac{pq^s s!}{(1 - qt)^{s+1}}.$$

En particulier, ceci nous donne pour $t = 1$ que, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$(G_X)^{(s)}(1) = \frac{pq^s s!}{(1 - q)^{s+1}} = \frac{pq^s s!}{p^{s+1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^s s!.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{G_X \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[\text{ et : } \forall s \in \mathbb{N},\ (G_X)^{(s)}(1) = \left(\frac{q}{p}\right)^s s!.}$$

(b) On suppose maintenant que : $p > \frac{1}{2}$. Vérifions que $\frac{q}{p} < 1$. Comme $\frac{1}{2} < p < 1$ et que $q = 1 - p$, on voit que $0 < q < \frac{1}{2}$, ce qui entraine que $q < \frac{1}{2} < p$, et donc :

$$\boxed{\frac{q}{p} < 1.}$$

On considère une variable aléatoire discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On suppose de plus que $G_X = f_a$ est définie sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$ et que $\frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \left(\frac{q}{p}\right)^s$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. Justifions tout d'abord que l'hypothèse (H) de la partie III est réalisée. Pour ce faire, on pose :

$$\rho = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Comme $\frac{q}{p} < 1$, on voit que $\frac{p}{q} > 1$, et donc $\rho = \sqrt{\frac{p}{q}} > 1$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on constate que :

$$b_n \rho^n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!}\rho^n = \left(\frac{q}{p}\right)^n \times \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^n.$$

Comme $0 < \sqrt{\frac{q}{p}} < 1$, il s'ensuit que la suite $(b_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (en tant que suite géométrique de raison < 1 en valeur absolue). Dès lors, comme $\rho > 1$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la condition } (H) \text{ est vérifiée.}}$$

A présent, déterminons a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de la question $(2)(d)$ de la partie III, on sait que, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

Comme $b_n = \frac{f_a^{(n)}(1)}{n!} = \left(\frac{q}{p}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit par linéarité de la somme et d'après la question $(5)(b)$ de la partie II (avec $\lambda = 1$) que :

$$a_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \left(\frac{q}{p}\right)^s \sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-s} = \left(\frac{q}{p}\right)^s \frac{1}{(1+\frac{q}{p})^{s+1}}.$$

Comme $p + q = 1$, ceci entraine que, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$a_s = \left(\frac{q}{p}\right)^s \frac{1}{(1+\frac{q}{p})^{s+1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^s \frac{p^{s+1}}{(p+q)^{s+1}} = \left(\frac{q}{p}\right)^s p^{s+1} = q^s p.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $s \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_s = q^s p.}$$

En particulier, comme $a_s = P(X = s) = q^s p$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que $P(X + 1 = s) = P(X = s - 1) = q^{s-1}p$ pour tout $s \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{X + 1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p.}$$

(4) Cas où X est une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs :
On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est inclus dans $[\![0, d]\!]$, où $d \in \mathbb{N}^*$. On note Pol_d le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de degré $\leq d$. Pour tout $s \in [\![0, d]\!]$, on note e_s la fonction $x \longmapsto x^s$ et on rappelle que $(e_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d. Enfin, on définit les fonctions de Pol_d :

$$H_0 : x \longmapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall s \in [\![1, d]\!], \;\; H_s : x \longmapsto \frac{x(x-1)...(x-s+1)}{s!} = \frac{1}{s!}\prod_{k=0}^{s-1}(x-k).$$

Enfin, on considère l'application Δ définie pour tout $P \in \mathrm{Pol}_d$ par : $\Delta(P) : x \longmapsto P(x+1) - P(x)$.

(a) Montrons que la famille $(H_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d. Par définition, il s'agit d'une famille de fonctions polynomiales de degrés échelonnés de Pol_d (vu que $\deg(H_s) = s$ pour tout $s \in [\![0, d]\!]$). En particulier, la famille $(H_s)_{s\in[\![0,d]\!]}$ est une famille libre de Pol_d. Mais comme cette famille compte $d + 1$ éléments et que $\dim \mathrm{Pol}_d = d + 1$, on en déduit que :

$$\boxed{(H_s)_{s\in[\![0,d]\!]} \text{ est une base de } \mathrm{Pol}_d.}$$

(b) Vérifions que Δ est un endomorphisme de Pol_d. Comme $\Delta(P)(x) = P(x+1) - P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $P \in \mathrm{Pol}_d$, on voit que $\Delta(P)$ est un polynôme pour tout $P \in \mathrm{Pol}_d$, et de plus :

$$\deg(\Delta(P)) \leq \max\{\deg(x \longmapsto P(x+1)), \deg(P)\} \leq \max\{\deg(P), \deg(P)\} \leq \deg(P) \leq d.$$

En particulier, l'application Δ envoie l'espace vectoriel Pol_d dans lui-même. Reste à vérifier que Δ est linéaire. Soient P, Q des éléments de Pol_d et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)(x+1) - (\lambda P + \mu Q)(x) \\
&= \lambda P(x+1) + \mu Q(x+1) - \lambda P(x) - \mu Q(x) \\
&= \lambda[P(x+1) - P(x)] + \mu[Q(x+1) - Q(x)] \\
&= \lambda \Delta(P)(x) + \mu \Delta(Q)(x),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Delta(P) + \mu\Delta(Q)$, et donc Δ est linéaire. Par conséquent :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } \mathrm{Pol}_d.}$$

(c) Montrons que $\Delta(H_0) = 0$, puis que : $\forall s \in [\![1, d]\!]$, $\Delta(H_s) = H_{s-1}$ et $H_s(0) = 0$. Par des calculs simples, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(H_0)(x) = H_0(x+1) - H_0(x) = 1 - 1 = 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que :

$$\boxed{\Delta(H_0) = 0_{\mathrm{Pol}_d}.}$$

De même, pour tout $s \in [\![1, d]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\Delta(H_s)(x) &= H_s(x+1) - H_s(x) \\
&= \frac{(x+1)(x+1-1)...(x+1-s+1)}{s!} - \frac{x(x-1)...(x-s+1)}{s!} \\
&= \frac{(x+1)x(x-1)...(x-s+2)}{s!} - \frac{x(x-1)....(x-s+2)(x-s+1)}{s!} \\
&= \frac{x(x-1)...(x-s+2)[(x+1)-(x-s+1)]}{s!} \\
&= \frac{x(x-1)...(x-s+2)[1+s-1]}{s!} \\
&= \frac{x(x-1)...(x-s+2)s}{s!} \\
&= \frac{x(x-1)...(x-(s-1)+1)}{(s-1)!} \\
&= H_{s-1}(x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $s \in [\![1, d]\!]$:

$$\boxed{\Delta(H_s) = H_{s-1}.}$$

Enfin, on voit par un calcul direct que, pour tout $s \in [\![1, d]\!]$:

$$H_s(0) = \frac{0(0-1)...(0-s+1)}{s!} = 0.$$

Par conséquent, on en déduit aussi que, pour tout $s \in [\![1, d]\!]$:

$$\boxed{H_s(0) = 0.}$$

(d) Montrons que : $\forall P \in \mathrm{Pol}_d$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(P))(0)]\, H_s(x)$. Comme $\Delta(H_s) = H_{s-1}$ pour tout $s \in [\![1, d]\!]$ d'après la question précédente, il est facile de vérifier par récurrence que $\Delta^k(H_s) = H_{s-k}$ pour tout $s \in [\![k, d]\!]$. Comme de plus $\Delta(H_0) = 0$, ceci entraine que :

$$\Delta^k(H_s) = \begin{cases} H_{s-k} & \text{si} \quad k \leq s \\ 0 & \text{si} \quad k > s \end{cases}.$$

En particulier, comme $H_t(0) = 0$ pour tout $t \in [\![1, d]\!]$ et que $H_0 = 1$, on trouve que :

$$\Delta^k(H_s)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = s \\ 0 & \text{si} \quad k \neq s \end{cases}.$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $t \in [\![0, d]\!]$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(H_t))(0)]\, H_s &= \sum_{0 \leq s \leq d,\ s \neq t} [(\Delta^s(H_t))(0)]\, H_s + \left[(\Delta^t(H_t))(0)\right] H_t \\ &= \sum_{0 \leq s \leq d,\ s \neq t} 0 \times H_s + 1 \times H_t \quad = \quad H_t. \end{aligned}$$

En particulier, l'égalité à démontrer est vraie pour tous les polynômes H_t. A présent, considérons un polynôme P de Pol_d. Comme la famille $(H_t)_{t \in [\![0,d]\!]}$ est une base de Pol_d d'après la question $(4)(a)$ de la partie IV, il existe des réels $\lambda_0, ..., \lambda_d$ tels que $P = \sum_{t=0}^{d} \lambda_t H_t$. Par linéarité de Δ et par interversion des sommes, on trouve que :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{t=0}^{d} \lambda_t H_t \\ &= \sum_{t=0}^{d} \lambda_t \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(H_t))(0)]\, H_s \\ &= \sum_{s=0}^{d} \sum_{t=0}^{d} \lambda_t\, [(\Delta^s(H_t))(0)]\, H_s \\ &= \sum_{s=0}^{d} \left[\left(\Delta^s \left(\sum_{t=0}^{d} \lambda_t H_t \right) \right) (0) \right] H_s \\ &= \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(P))(0)]\, H_s. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall P \in \mathrm{Pol}_d, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(P)(0))] H_s(x).}$$

(e) Montrons que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^k = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, H_s(n).$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction polynomiale e_k, on trouve que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e_k(x) = x^k = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k)(0))] H_s(x).$$

En particulier, on obtient en évaluant cette formule pour $x = n$ que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{n^k = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, H_s(n).}$$

(f) Montrons alors que, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$, l'espérance de X^k est donnée par :

$$E(X^k) = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, b_s, \quad \text{où :} \quad b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!}.$$

Comme $X(\Omega) \subset [\![0,d]\!]$, on obtient d'après le théorème de transfert que, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$:

$$E(X^k) = \sum_{n=0}^{d} n^k P(X=n) = \sum_{n=0}^{d} n^k a_n.$$

D'après la question précédente, ceci nous donne que, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$:

$$E(X^k) = \sum_{n=0}^{d} n^k a_n = \sum_{n=0}^{d}\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, H_s(n) a_n.$$

Par interversion des sommes, ceci entraine que, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} E(X^k) & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{d}\sum_{n=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, H_s(n) a_n \\ & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)] \left(\sum_{n=0}^{d} H_s(n) a_n\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)] \left(\sum_{n=0}^{d} \frac{n(n-1)...(n-s+1)}{s!} a_n\right). \end{array}$$

Comme $H_s(n) = 0$ pour tout $n < s$, il s'ensuit que, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} E(X^k) & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)] \left(\sum_{n=0}^{d} \frac{n(n-1)...(n-s+1)}{s!} a_n\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)] \left(\sum_{n=s}^{d} \frac{n(n-1)...(n-s+1)}{s!} a_n\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)] \left(\sum_{n=s}^{d} \binom{n}{s} a_n\right). \end{array}$$

D'après la question $(4)(b)$ de la partie II, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_a^{(s)}(x) = s! \left(\sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} a_n x^{n-s}\right).$$

Comme X est à valeurs dans $[\![0,d]\!]$, on voit que $a_n = 0$ pour tout $n \geq d+1$, ce qui entraine que :

$$b_s = \frac{f_a^{(s)}(1)}{s!} = \sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} a_n 1^{n-s} = \sum_{n=s}^{d} \binom{n}{s} a_n. \quad (**)$$

D'après les relations $(*)$ et $(**)$, on en déduit que, pour tout $k \in [\![0,d]\!]$:

$$\boxed{E(X^k) = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)] \left(\sum_{n=s}^{d} \binom{n}{s} a_n\right) = \sum_{s=0}^{d} [(\Delta^s(e_k))(0)]\, b_s.}$$

(g) Exemple : on suppose ici que $d=2$, $E(X)=1$ et $E(X^2)=\frac{3}{2}$. Déterminons tout d'abord b_0, b_1, b_2. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} \Delta^0(e_1) & = & e_1 & = & X & & \\ \Delta^0(e_2) & = & e_2 & = & X^2 & & \\ \Delta(e_1) & = & \Delta(X) & = & X+1-X & = & 1 \\ \Delta(e_2) & = & \Delta(X^2) & = & (X+1)^2 - X^2 & = & 2X+1 \\ \Delta^2(e_1) & = & \Delta(1) & = & 1-1 & = & 0 \\ \Delta^2(e_2) & = & \Delta(2X+1) & = & 2(X+1)+1-2X-1 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Dès lors, on trouve avec la question précédente que, pour $k = 0$:

$$E(1) = \sum_{s=0}^{2} [(\Delta^s(e_0))(0)]\, b_s = 1 \times b_0 + 0 \times b_1 + 0 \times b_2 = b_0.$$

De même, ceci nous donne que, pour $k = 1$:

$$E(X) = \sum_{s=0}^{2} [(\Delta^s(e_1))(0)]\, b_s = 0 \times b_0 + 1 \times b_1 + 0 \times b_2 = b_1.$$

Par ailleurs, on trouve que, pour $k = 2$:

$$E(X^2) = \sum_{s=0}^{2} [(\Delta^s(e_2))(0)]\, b_s = 0 \times b_0 + 1 \times b_1 + 2 \times b_2 = b_1 + 2b_2.$$

Comme $E(1) = 1$, $E(X) = 1$ et $E(X^2) = \frac{3}{2}$, on voit que $b_0 = 1$, $b_1 = 1$ et $b_1 + 2b_2 = \frac{3}{2}$, et donc :

$$\boxed{b_0 = 1, \ \ b_1 = 1, \ \ b_2 = \frac{1}{4}.}$$

Calculons maintenant a_0, a_1, a_2. D'après la question (3)(c) de la partie III, on a pour tout $s \in [\![0, 2]\!]$:

$$a_s = \sum_{n=s}^{2} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} b_n.$$

Par application directe de cette formule, on trouve que :

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{4}, \ \ a_1 = \frac{1}{2}, \ \ a_2 = \frac{1}{4}.}$$

Comme $a_i = P(X = i)$ pour tout $i \in [\![0, 2]\!]$, on en déduit que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{2}\right).}$$