Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 10 : 1 décembre 2025)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les polynômes et sur la diagonalisation, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Polynômes (révisions):**
Définition des polynômes - Opérations de base - Unicité des coefficients d'un polynôme.
Définition et propriétés du degré et de la dérivation des polynômes.
Divisibilité d'un polynôme par un polynôme non nul - Division euclidienne.
Définition des racines d'un polynôme - Critère de divisibilité par $(x - a)$.
Définition et calcul de l'ordre de multiplicité d'une racine.
Formule de Taylor pour un polynôme - Factorisation dans $\mathbb{R}[x]$.
"Le degré d'un polynôme est égal à la somme des ordres de multiplicité des racines".
"Tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes".
"Tout polynôme de degré $\geq n$ ayant au moins $(n + 1)$ racines distinctes est nul".
"Deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux".

(2) **Diagonalisation:**
Définition et propriétés des valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme.
Définition et propriétés des sous-espaces propres d'un endomorphisme.
Calcul pratique des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.
Polynôme en un endomorphisme - polynôme annulateur d'un endomorphisme f.
"Tout endomorphisme f (en dimension finie) admet un polynôme annulateur non nul". **(*)**.
"Toute valeur propre de f est racine de tout polynôme annulateur de f". **(*)**
Définition et propriétés des endomorphismes f de E diagonalisables (avec $\dim E = n$).
"f est diagonalisable si et seulement E est somme (directe) de ses sous-espaces propres".
"Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1". **(*)**
Définition et propriétés des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice.
Définition et propriétés des sous-espaces propres d'une matrice.
Calcul pratique des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice.
Polynôme en une matrice - polynôme annulateur d'une matrice.
"Toute matrice admet un polynôme annulateur non nul".
"Toute valeur propre d'une matrice A est racine de tout polynôme annulateur de A".
Définition et propriétés des matrices A de taille n diagonalisables.
"A est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n".
"Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1".
"Si A est diagonalisable, alors sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres " **(*)**.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et soit f un endomorphisme de E. On définit *le commutant de* f par $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) |\ f \circ g = g \circ f\}$.

(1) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
(2) Soit $g \in C(f)$. Montrer que g stabilise les sous-espaces propres de f.
(3) Soit $g \in C(f)$. Montrer que g stabilise le noyau et l'image de f.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit f un endomorphisme *nilpotent* de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel : $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ f^p = 0$.

(1) Déterminer le spectre de f.
(2) En déduire que f est diagonalisable si et seulement si f est l'endomorphisme nul.

Exercice 3. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer si M est diagonalisable et si oui la diagonaliser, et ce dans l'un des cas suivants :

$$(1)\ M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2)\ M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)\ M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$