Lycée Clemenceau **2025-26**
ECG 2

Devoir Maison de Mathématiques $n^o 4$: Polynômes - Diagonalisation

Exercice 1. (Dichotomie) Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ selon le protocole suivant. Si l'on pose $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, alors on définit a_{n+1} et b_{n+1} par :

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) & \text{si} \quad f(a_n)f(c_n) \leq 0 \\ (c_n, b_n) & \text{si} \quad f(a_n)f(c_n) > 0 \end{cases} .$$

(1) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

(2) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite notée l.

(3) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

(4) En déduire que $f(l) = 0$ et que $a_n \leq l \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(5) (a) Montrer que, pour tout réel $r > 2$, l'équation $x^5 - rx + 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

(b) A l'aide des questions précédentes, compléter la fonction en Python ci-dessous pour qu'étant donnés un réel $r > 2$ et une précision $\varepsilon > 0$, celle-ci calcule une solution approchée à ε près de l'équation $x^5 - rx + 1 = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$:

```
def dicho(r,e):
    a=0
    b=1
    while b-a>e:
        c=........
        if ........
            b=.......
        else:
            a=.......
    return ........
```

Exercice 2. Soit P un élément de $\mathbb{R}_7[x]$ tel que $x \longmapsto (x-1)^4$ divise $P + 4$ et $x \longmapsto (x+1)^4$ divise $P - 4$.

(1) Montrer que $x \longmapsto (x-1)^3$ et $x \longmapsto (x+1)^3$ divisent P'.

(2) En déduire la factorisation de P' dans $\mathbb{R}[x]$.

(3) En déduire l'expression générale de P.

(4) Calculer les valeurs de $P(1)$ et $P(-1)$.

(5) En déduire l'expression du polynôme P.

Exercice 3. (Polynômes de Tchebychev) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$. Par la suite, on pose :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad \alpha_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

(1) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, trace la courbe représentative du polynôme T_n sur l'intervalle $[-1, 1]$.

(2) Montrer que, pour tout $n > 0$, T_n est de degré n et son coefficient dominant est égal à 2^{n-1} .

(3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.

(4) Calculer les valeurs de $T_n(1), T_n(-1), T_n(0)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

(5) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, le réel α_k est racine de T_n.

(6) Vérifier que les α_k sont 2 à 2 distincts, et en déduire la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[x]$.

(7) A l'aide de la question (4), en déduire la valeur du réel ω.

(8) Calculer la forme réduite du polynôme T_5.

(9) En déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{10})$.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(1) (a) Calculer A, A^2, A^3, puis déterminer un polynôme annulateur de f.
    (b) En déduire les valeurs propres de f.
    (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Justifier.

(2) A l'aide d'un raisonnement par Analyse-Synthèse, déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.

(4) Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'un tel endomorphisme g existe.
    (a) Montrer que $\ker(f^2)$ est stable par g, puis que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

    (b) En utilisant la matrice de f dans cette même base, aboutir à une contradiction et conclure.

(5) Soit n un entier ≥ 1, soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et soit α un réel non nul.
    (a) Montrer que, si $h^n = \alpha h^{n-1}$, alors $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha\mathrm{Id})$.
    (b) Réciproquement, montrer que, si $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha\mathrm{Id})$, alors $h^n = \alpha h^{n-1}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(P)(x) = P''(x) - 4xP'(x).$$

(1) (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
    (b) Calculer $f(x \longmapsto 1)$ et $f(x \longmapsto x)$, puis $f(x \longmapsto x^k)$ pour tout $k \in \{2, ..., n\}$.
    (c) En déduire que la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire.
    (d) Montrer que, si P est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors : $\lambda = -4\deg(P)$.
    (e) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n, de degré n, tel que : $f(H_n) = -4nH_n$.

(2) (a) En dérivant la relation "$f(H_n) = -4nH_n$", montrer que : $\forall n \geq 1,\ f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.
    (b) En déduire que : $\forall n \geq 1,\ H_n' = nH_{n-1}$, puis que : $\forall n \geq 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) - xH_{n-1}(x) + \frac{(n-1)}{4}H_{n-2}(x) = 0$.
    (c) Justifier que $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis calculer H_2 et H_3.
    (d) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, permet de calculer u_n, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)}{4}u_{n-2}$.