

## TRAVAUX DIRIGÉS : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES - VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS (RÉPONSES - INDICATIONS)

**Exercice 1.** Dans le sens direct, c'est un résultat du cours! Pour la réciproque, supposons que  $\text{cov}(X, Y) = 0$ . Vérifier tout d'abord que  $[X = 1]$  et  $[Y = 1]$  sont indépendants, puis que  $[X = x]$  et  $[Y = y]$  sont indépendants pour tout  $(x, y) \in \llbracket 0, 1 \rrbracket^2$ , et en déduire que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Exercice 2.** Remarquons tout d'abord que  $(U, V)(\Omega) \subset \llbracket -1, 1 \rrbracket \times \llbracket 0, 2 \rrbracket$ . De plus, la loi de  $(U, V)$  est donnée par la liste :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P([U = 0] \cap [V = -1]) & = & 0 \\ P([U = 0] \cap [V = 0]) & = & q^2 \\ P([U = 0] \cap [V = 1]) & = & 0 \\ P([U = 1] \cap [V = -1]) & = & pq \\ P([U = 1] \cap [V = 0]) & = & 0 \\ P([U = 1] \cap [V = 1]) & = & pq \\ P([U = 2] \cap [V = -1]) & = & 0 \\ P([U = 2] \cap [V = 0]) & = & p^2 \\ P([U = 2] \cap [V = 1]) & = & 0 \end{array} \right.$$

Par transfert ou par bilinéarité de la covariance, on trouve que  $\text{cov}(U, V) = 0$ . Cependant,  $U$  et  $V$  ne sont pas indépendantes. Pour voir, il suffit de comparer  $P([U = 0] \cap [V = -1])$  et  $P(U = 0)P(V = -1)$ , et de conclure.

**Exercice 3.**

- (1) On trouve que  $a = \frac{1}{1+e}$ .
- (2) On obtient que  $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{e}{1+e}\right)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$ . Vérifier ensuite l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .
- (3) On trouve que  $E(X) = 1 + \frac{1+e}{e}$  et  $V(X) = 1 + \frac{1+e}{e^2}$ .

**Exercice 4.**

- (1) A l'aide du théorème de Fubini, on trouve que  $\lambda = \frac{1}{2}$ .
- (2)  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (comparer pour cela  $P([X = 0] \cap [Y = 0])$  et  $P(X = 0)P(Y = 0)$ ).
- (3) Par transfert, on trouve que  $E(2^{X+Y}) = 2e$ .

**Exercice 5.**

- (1) La loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \end{cases}$ .

Pour les lois marginales, on en déduit que  $X$  et  $Y$  suivent la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

- (2)  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (comparer pour cela  $P([X = 1] \cap [Y = 1])$  et  $P(X = 1)P(Y = 1)$ ).
- (3) En utilisant le théorème de transfert, on trouve que  $\rho_n = -\frac{1}{n-1}$ .
- (4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 0$ .

**Exercice 6.** On a  $S \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n+m, \frac{1}{2}\right)$ ,  $P([X = Y]) = \binom{n+m}{n} \frac{1}{2^{n+m}}$  et  $P([X \neq Y]) = 1 - \binom{n+m}{n} \frac{1}{2^{n+m}}$ .

**Exercice 7.** On a  $E(Z) = p\lambda$ ,  $V(Z) = p\lambda + p\lambda^2 - p^2\lambda^2$  et la loi de  $Z$  est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z = k) = \begin{cases} \frac{q + pe^{-\lambda}}{k!} & \text{si } k = 0 \\ \frac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & \text{si } k > 0 \end{cases}.$$

**Exercice 8.**

- (1) On trouve que  $E(X + Y) = n + 1$  et  $V(X + Y) = \frac{n^2 - 1}{6}$ .
- (2) Procéder par convolution discrète.

- (3) Toujours par convolution discrète, on trouve que :  $\forall k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket$ ,  $P(X+Y=k) = \frac{2n-k+1}{n^2}$ .  
 (4) Appliquer la formule des probas totales à l'événement  $[X+Y=Z]$  et au s.c.e.  $([Z=k])_{1 \leq k \leq n}$ .

**Exercice 9.**

- (1) Les lois de  $U, V, W$  sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, & P(U=k) = (k-1)p^2q^{k-2} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, & P(V=k) = \frac{p^2q^{|k|}}{1-q^2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, & P(W=k) = (1-q^2)q^{2k-2} \end{cases}.$$

- (2) On trouve que  $\text{cov}(U, V) = 0$ . De plus, les variables aléatoires  $U$  et  $V$  ne sont pas indépendantes (comparer pour cela  $P([U=2] \cap [V=0])$  et  $P(U=2)P(V=0)$ ).

**Exercice 10.**

- (1)  $X_1, X_2, X_3$  suivent la loi  $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$  et  $X_1 + X_2$  la loi  $\mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$ .

- (2) On trouve que  $V(X_1 + X_2) = \frac{2n}{9}$  et  $\text{cov}(X_1, X_2) = -\frac{n}{9}$ .

**Exercice 11.**

- (1)  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ ,  $E(X) = np$ ,  $V(X) = npq$  et  $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-q^2)$ ,  $E(X) = n(1-q^2)$ ,  $V(X) = nq^2(1-q^2)$ .  
 (2)  $Y$  est le nombre de personnes ayant atteint la cible au deuxième tir mais pas au premier. De plus, on obtient que  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq)$ ,  $E(Y) = npq$ ,  $V(Y) = npq(1-pq)$ .  
 (3)  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (comparer pour cela  $P([X=n] \cap [Y=n])$  et  $P(X=n)P(Y=n)$ ).  
 (4) Partant du fait que  $Y = Z - X$ , on trouve que  $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ . Comme on connaît les lois de  $X, Y, Z$ , on en déduit après calculs la covariance de  $X, Y$ .

**Exercice 12.**

- (1) Sachant  $[N=j]$ , on voit que  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(j, p)$ .

- (2) La loi conjointe du couple  $(X, N)$  est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [N=j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \frac{e^{-\lambda} \lambda^j p^i q^{j-i}}{i!(j-i)!} & \text{si } 0 \leq i \leq j \end{cases}.$$

- (3) On en déduit que  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$ ,  $E(X) = \lambda p$ ,  $V(X) = \lambda p$ .  
 (4) Montrer tout d'abord que  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$ , puis vérifier l'indépendance de  $X$  et  $Y$  par le calcul.  
 (5) On trouve que  $\text{cov}(X, N) = \lambda p$ .  
 (6) On obtient que  $\rho(X, N) = \sqrt{p}$ .  
 (7) Utiliser la question précédente pour voir que  $N$  ne peut pas être une fonction affine de  $Y$ .

**Exercice 13.**

- (1) On trouve que  $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$ ,  $E(Y_n) = p^2$ ,  $V(Y_n) = p^2(1-p^2)$ .

- (2) On obtient que  $E(S_n) = np$ ,  $V(S_n) = npq$ ,  $E(V_n) = np^2$ .

- (3) Etablir que  $\text{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3q$  et  $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$  pour tous  $i, j$  tels que  $i < j - 1$ .

- (4) On en déduit que  $V(V_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3q$ .

**Exercice 14.**

- (1) Avec la formule de l'espérance totale, on trouve que  $E(Y) = E(X)E(N)$ .

- (2) De même, on a  $E(Y^2) = V(X)E(N) + E(X)^2E(N^2)$ .

- (3) On en déduit que  $V(Y) = V(X)E(N) + E(X)^2V(N)$ .

- (4) Si  $Y$  est le nombre de piles obtenus, alors on a :

$$E(Y) = \frac{p(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{pq(n+1)}{2} + \frac{p^2(n^2-1)}{12}.$$

**Exercice 15.**

- (1) A faire!

(2) La loi de  $Z$  est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z = k) = \frac{(k+1)a^k}{(1+a)^{k+2}}.$$

De plus, on obtient par transfert que  $E(S) = \frac{1}{1+a}$  et  $E(R) = \frac{a}{2(1+a)}$ .

(3) (a) On trouve que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $P(X \leq n) = 1 - \left(\frac{a}{1+a}\right)^{n+1}$ .

(b) Partir du fait que  $P(T \geq n) = P(X \geq n)P(Y \geq n) \dots$

### Exercice 16.

(1) On a pour tout  $n \in (X_1 + X_2)(\Omega)$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n_1 \rrbracket$  :  $P_{[X_1 + X_2 = n]}(X_1 = k) = \frac{\binom{n_1}{k} \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1 + n_2}{n}}$ .

(2) On obtient que  $E(X_1 | [X_1 + X_2 = n]) = \frac{n_1 \binom{n_1 + n_2 - 1}{n-1}}{\binom{n_1 + n_2}{n}} = \frac{nn_1}{n_1 + n_2}$ .

## 1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

### Exercice 17.

(1) La loi du couple  $(X, Y)$  est donnée par :  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} \frac{1}{ni} & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

(2) On voit que  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ ,  $E(X) = \frac{n+1}{2}$ ,  $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$ .

(3) La loi de  $Y$  est donnée par :  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Y = j) = \frac{1}{n} \sum_{i=j}^n \frac{1}{i}$ .

(4)  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (comparer pour cela  $P([X = n] \cap [Y = n])$  et  $P(X = n)P(Y = n)$ ).

(5) Par transfert et avec la question (1), on trouve que  $E(Y) = \frac{n+3}{4}$  et  $V(Y) = \frac{7n^2 + 6n - 13}{144}$ .

### Exercice 18.

(1) Si  $q = 1 - p$ , on trouve que  $P([X = k] \cap [Y = l]) = p^{k+1}q^l + q^{l+1}p^k$  pour tout  $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . De plus, les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  suivent la loi  $\mathcal{G}(q)$ .

(2) Vérifier que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si  $p = 1/2$ .

(3) On trouve que  $P([X = Y]) = \frac{pq}{1 - pq}$ .

### Exercice 19.

(1) On trouve que  $\lambda = \frac{4}{n^2(n+1)^2}$ .

(2) (a) On obtient que :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = i) = P(Y = i) = \frac{2i}{n(n+1)}$ . De plus :  $E(X) = E(Y) = \frac{2n+1}{3}$ .

(b) Vérifier que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, et donc la covariance de  $(X, Y)$  est nulle.

(3) On trouve que  $\lambda = \frac{1}{e}$ . De plus, on obtient que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = P(Y = i) = \frac{\left(i + \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{e}i!2^i}.$$

Après calculs, on trouve que :  $E(X) = E(Y) = \frac{1}{2}$ . Par transfert, on obtient que  $E(XY) = \frac{3}{4}$ . Par Koenig-Huygens, il s'ensuit que  $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{2} \neq 0$ , et donc  $X, Y$  ne sont pas indépendantes.

### Exercice 20.

(1) On peut représenter une façon de vider le sac par une succession de  $n$  cases. On représente par 2 croix dans ces cases les instants où on a tiré les 2 boules blanches. On a donc un choix favorable et  $\binom{n}{2}$  façons de choisir 2 cases parmi  $n$ , sans ordre et sans répétition, d'où le résultat!

(2) Les lois de  $X$  et de  $Y$  sont données par :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad P(X=i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)} \\ \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad P(Y=j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \end{cases}.$$

(3) Après calculs et notamment par transfert, on trouve que :

$$E(X) = \frac{n+1}{3}, \quad E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}, \quad E(X^2) = \frac{n(n+1)}{6}, \quad E(XY) = E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}.$$

(4) Après calculs et notamment par Koenig-Huygens, on obtient que :

$$V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}, \quad \text{cov}(X, Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

On en déduit que  $\rho(X, Y) = \frac{1}{2}$ .

### Exercice 21.

- (1) Si  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ , on trouve que  $G_X(t) = (pt + q)^n$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
- (2) Par transfert, on voit que  $G_X(t) = E(t^X)$  et  $G'_X(1) = E(X)$ .
- (3) On trouve que :  $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$ .
- (4) Utiliser la question (2) et le lemme des coalitions.

### Exercice 22.

- (1) On voit que  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .
- (2) On trouve que  $P([X_1 = k] \cap [X_2 = l]) = \binom{l}{n} \binom{k}{n-l} p^{k+l} q^{2n-2k-l}$  pour tous  $k, l$ .
- (3) On obtient que  $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq)$ .
- (4) On trouve que  $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^2)$ .
- (5) Plus généralement, on montre que  $X_1 + \dots + X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^k)$ .

### Exercice 23.

- (1) On trouve que  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(na, \frac{1}{n}\right)$ ,  $E(X_i) = a$  et  $V(X_i) = \frac{a(n-1)}{n}$ .
- (2) Comme  $X_1 + \dots + X_n = na$ , on voit que  $V(X_1 + \dots + X_n) = 0$ . En développant cette variance et comme toutes les covariances qui apparaissent sont égales par un argument de symétrie, il s'ensuit que  $\text{cov}(X_i, X_j) = -\frac{a}{n}$  si  $i \neq j$ .
- (3) On obtient que  $\rho(X_1, X_2) = -\frac{1}{n-1}$ . En particulier, on voit que  $\rho(X_1, X_2) = -1$  si  $n = 2$ , ce qui n'est étonnant car alors  $X_2 = 2a - X_1$ , et donc  $X_2$  est une fonction affine de  $X_1$ .

### Exercice 24.

- (1) A vérifier par récurrence sur  $q$ !
- (2) (a) On trouve que  $P(I_n > k) = \frac{\binom{m-k}{n}}{\binom{m}{n}}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, m-n+1 \rrbracket$ , et le reste s'en déduit.
- (b) A l'aide des questions (1) et (2)(a), on trouve que  $E(I_n) = \frac{m+1}{n+1}$ .
- (3) (a) On trouve que  $P(S_n \leq k) = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{m}{n}}$  pour tout  $k \in \llbracket n, m \rrbracket$ , et le reste s'en déduit.
- (b) A l'aide des questions (1) et (3)(a), on trouve que  $E(S_n) = \frac{n(m+1)}{n+1}$ .

### Exercice 25.

- (1) La loi de  $L_1$  est donnée par :  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(L_1 = k) = p^k q + pq^k$ .
- (2) Vérifier que  $L_1$  admet un moment d'ordre 2 par transfert, en utilisant les séries géométriques et leurs dérivées. De plus, on trouve que :

$$E(L_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

- (3) La loi du couple  $(L_1, L_2)$  est donnée par :

$$\forall (k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P([L_1 = k] \cap [L_2 = l]) = p^{k+1} q^l + q^{k+1} p^l.$$

- (4) En utilisant la formule des probas totales, on obtient que :  $\forall l \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = l) = p^2q^{l-1} + q^2p^{l-1}$ .  
 (5) Procéder comme à la question (2). On trouve que  $E(L_2) = 2$ .  
 (6) On vérifie que la loi conjointe de  $(L_1, L_2, L_3)$  est donnée par :

$$\forall (i, j, k) \in (\mathbb{N}^*)^3, \quad P([L_1 = i] \cap [L_2 = j] \cap [L_3 = k]) = p^{i+k}q^{j+1} + q^{i+k}p^{j+1}.$$

En utilisant la formule des probas totales avec le s.c.e.  $([L_1 = i] \cap [L_2 = j])_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ , on trouve que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(L_3 = k) = p^kq + pq^k.$$

- (7) Vérifier que  $L_1, L_2$  admettent un moment d'ordre 2, et en déduire l'existence de  $\text{cov}(L_1, L_2)$ .  
 (8) Par transfert, on trouve que :  $E(L_1 L_2) = \frac{1}{pq}$ . De plus, on obtient d'après Koenig-Huygens que :

$$\text{cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{pq} - 2 \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) = \frac{-2(2p-1)^2}{pq} \leq 0.$$

### Exercice 26.

- (1) Par convolution discrète, on trouve que la loi de  $U$  est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \quad P(U = k) = (k-1)p^2q^{k-2}.$$

- (2) On trouve que, pour tout  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $P_{[U=n]}(X_1 = k) = \frac{1}{n-1}$ .

- (3) Sachant  $[U = n]$ ,  $X_1$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , et donc  $E(X_1 | [U = n]) = \frac{n}{2}$ . D'après la formule de l'espérance totale, on en déduit que  $E(X_1) = \frac{1}{2}E(U) = \frac{1}{p}$ .

- (4) La loi de  $V$  est donnée par :  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $P(V = k) = \frac{p^2q^{|k|}}{1-p^2}$ .

- (5) On trouve que  $\text{cov}(U, V) = 0$ .

- (6)  $U$  et  $V$  ne sont pas indépendantes (comparer pour cela  $P([U = 2] \cap [V = 0])$  et  $P(U = 2)P(V = 0)$ ).

### Exercice 27.

- (1) A faire!  
 (2) On trouve que  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$ . De plus, les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes (comparer pour cela  $P([X = 0] \cap [Y = 0])$  et  $P(X = 0)P(Y = 0)$ ).  
 (3) Sachant  $[X = n]$ , on a  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ .  
 (4) On trouve que :  $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda pq)$ .  
 (5) Vérifier par le calcul que les variables aléatoires  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes.

### Exercice 28.

- (1) Tout d'abord, l'intégrale  $u_n$  est faussement impropre en 0. Par comparaison avec une intégrale de Riemann en  $+\infty$ , on en déduit que l'intégrale  $u_n$  converge. De plus, on trouve par IPP et avec le résultat admis début d'exercice que :

$$u_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

- (2) (a) Effectuer le changement de variable  $u = st$ .  
 (b) Avec l'indication donnée et la question précédente, on trouve que :  $u_2 = \frac{\pi}{2}$ .  
 (3) (a) On obtient que  $E(S_n) = 0$  et  $V(S_n) = n$ .  
 (b) Par transfert, on trouve que  $E(\sin(X_1 t)) = 0$  et  $E(\cos(X_1 t)) = \cos(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .  
 (c) Pour l'hérité de la récurrence, on utilise la formule d'addition pour cos, le lemme des coalitions et la question précédente, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E(\cos(S_{n+1}t)) &= E(\cos(S_n t) \cos(X_{n+1}t) - \sin(S_n t) \sin(X_{n+1}t)) \\ &= E(\cos(S_n t)) E(\cos(X_{n+1}t)) - E(\sin(S_n t)) E(\sin(X_{n+1}t)) \\ &= E(\cos(S_n t)) \times \cos(t) - E(\sin(S_n t)) \times 0 \\ &= \cos^n(t) \times \cos(t) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \cos^{n+1}(t), \end{aligned}$$

et là, on peut conclure!

(d) D'après la question (2)(a), on a :

$$|S_n| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(S_n t)}{t^2} dt.$$

Dès lors, on trouve par linéarité de l'intégrale et par transfert que :

$$\begin{aligned} E(|S_n|) &= \sum_{-n \leq k \leq n} |k| P(S_n = k) \\ &= \sum_{-n \leq k \leq n} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(kt)}{t^2} dt P(S_n = k) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sum_{-n \leq k \leq n} \frac{1 - \cos(kt)}{t^2} P(S_n = k) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \sum_{-n \leq k \leq n} \cos(kt) P(S_n = k)}{t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - E(\cos(S_n t))}{t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt = \frac{2}{\pi} u_n. \end{aligned}$$

### Exercice 29.

- (1) On trouve que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :  $P([Z_n \geq k]) = (q_1 \dots q_n)^{k-1}$ . On en déduit que :  $Z_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - q_1 \dots q_n)$ .  
 (2) Après calculs et télescopage, on trouve que :

$$\begin{aligned} q_1 \dots q_n &= \prod_{i=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n+1} \left(\frac{(i-1)(i+1)}{i^2}\right) = \dots = \frac{n+2}{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}. \\ \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = k) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

### Exercice 30.

- (1) Pour tout  $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ , on voit que :

$$P([X = k] \cap [Y = l]) = P([X = k] \cap [N = k + l]) = P\left(\left[\sum_{i=1}^{k+l} U_i = k\right] \cap [N = k + l]\right).$$

Par stabilité par addition, on obtient que  $\sum_{i=1}^{k+l} U_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k + l, p)$ . D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires  $\sum_{i=1}^{k+l} U_i$  et  $N$  sont indépendantes, ce qui permet de conclure.

- (2) Vérifier que  $X$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda p)$ , que  $Y$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda q)$ , où  $q = 1 - p$ , puis que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.  
 (3) (a) En utilisant la question (1), exprimer  $P([X = k + 1] \cap [Y = l])$  et  $P([X = k] \cap [Y = l + 1])$  à l'aide de  $k, l, p, q, P([N = k + l + 1])$ , puis conclure avec l'indépendance de  $X$  et  $Y$  et les propriétés des coefficients binomiaux.

$$(k+1)P(X = k+1)P(Y = l)(1-p) = (l+1)P(X = k)P(Y = l+1)p.$$

- (b) A l'aide de la question précédente, on voit que l'expression  $\frac{(k+1)P(X = k+1)}{P(X = k)}$  ne dépend que de  $l$  et non de  $k$ , et donc elle est constante égale à un certain réel  $\alpha > 0$ . Par récurrence, on montre que  $P(X = k) = \frac{\alpha^k}{k!} P(X = 0)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En sommant tous les  $P(X = k)$ , on en déduit que  $P(X = 0) = e^{-\alpha}$ , et donc  $X$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\alpha)$ . De même, on vérifie que  $Y$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(\beta)$  pour un certain réel  $\beta > 0$ .  
 (c) Par stabilité par addition de la loi de Poisson, on trouve que  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha + \beta)$ .

### Exercice 31.

- (1) On trouve que  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$ ,  $E(X) = 3$  et  $V(X) = 6$ .  
 (2) On trouve que  $W \hookrightarrow \mathcal{G}(2/3)$ ,  $E(W) = 3/2$  et  $V(W) = 3/4$ .  
 (3) Déterminer d'abord la loi du couple  $(X, Y)$ , puis calculer  $P_{[W=k]}(U = l)$  à l'aide de cette loi et conclure.

- (4) Comme la loi de  $U$  sachant  $[W = k]$  ne dépend pas de  $k$ , on voit que cette loi est aussi celle de  $U$ , et donc  $U \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$ . Qui plus, les variables aléatoires  $U$  et  $W$  sont indépendantes.
- (5) Vérifier que  $U + W$  est égale à  $\max\{X, Y\}$ , et en déduire que  $U + 2W = X + Y$ .
- (6) A l'aide de la question précédente et de l'indépendance de  $U$  et  $W$ , on trouve que  $\text{cov}(X, Y) = -3/2$ . En fait, on voit que, si  $X$  est grand, alors il y a plus de chances que les premiers tirages aient donné une boule noire, et donc  $Y$  aura tendance à être petit. En d'autres termes,  $X$  et  $Y$  devraient varier en sens inverse, ce qui explique le signe négatif de la covariance.

**Exercice 32.**

- (1) Soit  $I$  l'événement "  $M$  est inversible". Vérifier que  $M$  est non inversible si et seulement si  $X_1^2 - YX_2^2 = 0$ . A l'aide de la formule des probabilités totales, on trouve alors que :

$$P(I) = \frac{8}{9} - \frac{4p}{45}.$$

- (2) Soit  $D$  l'événement "  $M$  est diagonalisable". Vérifier que le spectre de  $M$  est égal à  $\{X_1 - X_2, X_1 + X_2\}$  si  $Y = 1$ , à  $\{X_1\}$  si  $Y = -1$  et  $X_2 = 0$ , à  $\emptyset$  si  $Y = -1$  et  $X_2 \neq 0$ . Comme  $M$  est diagonale si  $X_2 = 0$ , on voit que  $M$  est diagonalisable si et seulement si  $Y = 1$  ou si  $Y = -1$  et  $X_2 = 0$ . A l'aide de la formule des probabilités totales, on trouve alors que :

$$P(D) = p + (1 - p)e^{-\lambda}.$$