

Programme de colles en Mathématiques

ECG 2 (semaine 11 : 8 décembre 2025)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur la diagonalisation des endomorphismes et des matrices, ainsi que sur la dérivation, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) Diagonalisation:

Définition et propriétés des valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme.

Définition et propriétés des sous-espaces propres d'un endomorphisme.

Calcul pratique des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.

Polynôme en un endomorphisme - polynôme annulateur d'un endomorphisme f .

"Tout endomorphisme f (en dimension finie) admet un polynôme annulateur non nul". (*)

"Toute valeur propre de f est racine de tout polynôme annulateur de f ". (*)

Définition et propriétés des endomorphismes f de E diagonalisables (avec $\dim E = n$).

" f est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe) de ses sous-espaces propres".

"Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1". (*)

Définition et propriétés des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice.

Définition et propriétés des sous-espaces propres d'une matrice.

Calcul pratique des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice.

Polynôme en une matrice - polynôme annulateur d'une matrice.

"Toute matrice admet un polynôme annulateur non nul".

"Toute valeur propre d'une matrice A est racine de tout polynôme annulateur de A ".

Définition et propriétés des matrices A de taille n diagonalisables.

" A est diagonalisable ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n ".

"Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1".

"Si A est diagonalisable, alors sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres" (*).

(2) Dérivation (révisions):

Définition d'une fonction dérivable en un réel a .

Equation de la tangente à la courbe de f en a .

Définition d'une fonction dérivable à droite (resp. à gauche) en a .

Définition d'une fonction dérivable sur un intervalle.

Dérivation et opérations algébriques - Composition.

Dérivation de l'application réciproque d'une fonction bijective dérivable.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis - Inégalités des accroissements finis.

Sens de variation de f en fonction du signe de f' - Dérivées usuelles.

Théorème du prolongement de la dérivée.

Définition d'une fonction n fois dérivable en un point, ou sur un intervalle.

Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur un intervalle.

Opérations algébriques sur les fonctions n fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Dérivation d'un produit - Formule de Leibniz.

Définition et propriétés des fonctions convexes et concaves.

Inégalité de convexité - Notion de point d'inflexion.

Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^2$.

Condition suffisante de minimum global en un point critique d'une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \frac{i}{j}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Calculer A^2 en fonction de n et A , et en déduire les valeurs propres de A .

Exercice 2. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose $u(P) : x \mapsto (x^2 - 1)P''(x) + (2x + 1)P'(x)$.

- (1) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2) Déterminer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (3) En déduire le spectre de u . L'endomorphisme u est-il diagonalisable? Justifier.

Exercice 3. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, déterminer si M est diagonalisable et si oui la diagonaliser, et ce dans l'un des cas suivants :

$$(1) M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4) M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$