Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 12 : 15 décembre 2025)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur la dérivation, ainsi que sur les couples de variables aléatoires discrètes, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Dérivation (révisions):**
Définition d'une fonction dérivable en un réel a.
Equation de la tangente à la courbe de f en a.
Définition d'une fonction dérivable à droite (resp. à gauche) en a.
Définition d'une fonction dérivable sur un intervalle.
Dérivation et opérations algébriques - Composition.
Dérivation de l'application réciproque d'une fonction bijective dérivable.
Théorèmes de Rolle et des accroissements finis - Inégalités des accroissements finis.
Sens de variation de f en fonction du signe de f' - Dérivées usuelles.
Théorème du prolongement de la dérivée.
Définition d'une fonction n fois dérivable en un point, ou sur un intervalle.
Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur un intervalle.
Opérations algébriques sur les fonctions n fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.
Dérivation d'un produit - Formule de Leibniz.
Définition et propriétés des fonctions convexes et concaves.
Inégalité de convexité - Notion de point d'inflexion.
Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$ et de classe $\mathcal{C}^2$.
Condition suffisante de minimum global en un point critique d'une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert.

(2) **Couples de variables aléatoires discrètes:**
Définition d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
Définition du support d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
Système complet d'événements associé à un couple de variables aléatoires.
Définition et propriétés de la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes.
Définition et propriétés des lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes.
Définition et propriétés de la loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant $[Y = k]$.
Définition et propriétés de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.
Définition et propriétés d'une fonction de deux variables aléatoires discrètes.
Loi d'une somme de deux variables aléatoires discrètes - Produit de convolution discret.
Stabilité par addition de la loi binomiale **(*)**, et de la loi de Poisson **(*)**.
Théorème de transfert pour les fonctions de deux variables aléatoires discrètes.
Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, existence par domination.
" Si X, Y admettent une espérance et sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$".
Définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.
Propriétés de la covariance (symétrie, bilinéarité) - Formule de Koenig-Huygens.
Expression de la variance d'une somme de deux variables aléatoires.
"Deux variables aléatoires discrètes indépendantes ont une covariance nulle".
Variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.
Définition et propriétés du coefficient de corrélation linéaire.
"Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est compris entre -1 et 1, et égal à ± 1 si et seulement s'il existe des réels a, b tels que $Y = aX + b$ presque sûrement" **(*)**.

(3) **Programmation de base en Python (révisions):**
Utilisation des commandes de base de la bibliothèque `numpy.linalg`.
Savoir écrire un vecteur et une matrice avec les commandes à connaître : `np.array`, `np.linspace`, `np.arange`, `np.zeros`, `np.ones`, `np.eye`.
Opérations de base : extraction d'un élément, d'un sous-vecteur, d'une sous-matrice.

Commandes à connaître : `np.dot`, `np.transpose`, `np.shape`, `np.min`, `np.max`, `np.sum`, `np.cumsum`, `al.inv`, `al.matrix_rank`, `al.matrix_power`.
Utilisation des commandes de base de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
Savoir écrire une fonction d'une variable avec la commande `def` et en tracer la courbe représentative avec les commandes `plt.plot` et `plt.show`.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{2}\right)$. Rappeler la loi de $S = X + Y$, puis calculer $P([X = Y])$.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer l'espérance et la variance de $Z = XY$.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ respectivement, dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a^i}{j!}.$$

(1) Calculer la valeur de a pour que cela définisse bien une loi conjointe.
(2) Déterminer les lois de X et de Y, puis vérifier que X et Y sont indépendantes.
(3) Calculer l'espérance et la variance de $S = X + Y$.

Exercice 4. Soit n un entier ≥ 2 donné au préalable. Ecrire une commande en Python qui crée le vecteur $(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n})$. Compléter cette commande pour qu'elle calcule et affiche la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 5. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, retourne la matrice $H = (h_{i,j})$, où $h_{i,j}$ est donné pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$ par :

$$h_{i,j} = \frac{1}{i + j - 1}.$$