TRAVAUX DIRIGÉS : PRODUIT SCALAIRE - ESPACES EUCLIDIENS
RÉPONSES - INDICATIONS

1. Formes bilinéaires et produits scalaires

Exercice 1.

(1) φ est bilinéaire, pas symétrique, définie, positive.
(2) φ est bilinéaire, symétrique, pas définie, positive.
(3) φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive.
(4) φ est bilinéaire, pas symétrique, pas définie, pas positive.
(5) φ est bilinéaire, symétrique, pas définie, pas positive.
(6) φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Exercice 2.

(1) Vérifier que E est non vide, inclus dans $\mathbb{R}_n[x]$ et stable par combinaisons linéaires.
(2) Commencer par faire une IPP pour montrer que $\varphi(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$, puis passer à la démonstration.
(3) $\|P\| = \sqrt{\int_0^1 (P'(t))^2 dt}$.

Exercice 3. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $x = (\sqrt{1}, ..., \sqrt{n})$ et $y = (1, ..., 1)$.

Exercice 4. Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On trouve que : $(x_1, ..., x_n) = (1, ..., 1)$.

Exercice 5. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)g(t)dt}{1+t^2}$ et aux fonctions f et 1. On a alors égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 6. Pour montrer que φ est définie, raisonner par l'absurde sur le degré de P. Le reste est classique.

Exercice 7. Montrer que $\ker(f) = \ker(g)$ par double inclusion et en utilisant l'écriture matricielle du produit scalaire en base orthonormée, puis conclure avec le théorème du rang.

Exercice 8. Refaire la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le polynôme :

$$P(t) = E\left(\left(t\sqrt{X} - \frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2\right).$$

On a alors égalité si et seulement si X est constante presque sûrement.

2. Orthogonalité

Exercice 9.

(1) Par polarisation, on trouve que : $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$.
(2) (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, avec $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $f_2 = (0,1,0)$, $f_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Exercice 10.

(1) Ecrire $Q(x)$ comme une somme de carrés.
(2) Poser $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, puis que N est la norme associée à φ.
(3) (f_1, f_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, avec $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $f_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Exercice 11.

(1) A faire!
(2) $\left(x \longmapsto 1, x \longmapsto \sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right), x \longmapsto \sqrt{180}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 12. La famille $((1,1,1),(1,-2,1),(1,0,-1))$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, mais pas une base orthonormale. De plus, la famille $((0,1,1),(0,-1,1),(1,1,0))$ n'est même pas orthogonale.

Exercice 13.

(1) A faire en utilisant le fait qu'un polynôme de degré $\leq n$, ayant au moins $n+1$ racines distinctes, est le polynôme nul.
(2) Classique, à savoir faire!
(3) Utiliser la question (2).
(4) On trouve que : $\mathfrak{mat}_{(L_0,\ldots,L_n)}(P)=\begin{pmatrix}P(x_0)\\P(x_1)\\\vdots\\P(x_n)\end{pmatrix}$.

Exercice 14.

(1) (a) Montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que T_n est de degré n et de coefficient dominant $a_n=2^{n-1}$.
 (b) Effectuer une récurrence double!
 (c) Utiliser la question (1)(b) pour montrer que l'ensemble S_n des racines de T_n est donné par :
$$S_n=\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right),\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}.$$
(2) (a) A vérifier avec les formules d'addition pour cos.
 (b) Avec la question précédente, on trouve que :
$$I_{p,q}=\begin{cases}\pi & \text{si} \quad p=q=0\\ \pi/2 & \text{si} \quad p=q\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad p\neq q\end{cases}.$$
(3) (a) Se ramener à l'aide du changement de variable $t=\cos(u)$ à l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, puis conclure!
 (b) A faire!
 (c) Utiliser le changement de variable $t=\cos(u)$.
 (d) On trouve que : $\langle x\longmapsto x^n, T_n\rangle=\frac{\pi}{2^n}$.

3. Espaces euclidiens

Exercice 15. Si A est la matrice du produit scalaire dans une base donnée et si X est un vecteur colonne, montrer que $AX=0\Longrightarrow X=0$, puis conclure.

Exercice 16.

(1) A faire!
(2) Procéder par double inclusion!
(3) Utiliser la question (2), le fait que $E=F+G$ et les résultats sur la dimensions des orthogonaux.

Exercice 17.

(1) $\mathcal{B}=((-2,1,0),(0,0,1))$.
(2) $\mathcal{B}=((2,-3,1))$.
(3) $\mathcal{B}=((1,-2,1))$.
(4) $\mathcal{B}=\left(x\longmapsto\frac{3}{5}-\frac{11}{5}x+x^2\right)$.
(5) $\mathcal{B}=\left(x\longmapsto-\frac{2}{5}+x^2, x\longmapsto-\frac{3}{5}+x^3\right)$.

Exercice 18.

(1) Evaluer l'égalité de départ en $x=e_i$.

(2) On trouve que la norme est nulle.
(3) Utiliser la question (2) pour montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est génératrice de E, puis conclure avec (1).

Exercice 19.
(1) Pour le caractère défini, utiliser le fait que $P(1) = P'(1) = P^{(2)}(1) = P^{(3)}(1) = 0 \Longrightarrow 1$ est racine de P de multiplicité ≥ 4.
(2) On trouve que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2) = \left(x \longmapsto 1, x \longmapsto x-1, x \longmapsto \dfrac{(x-1)^2}{2}\right)$.
Pour la deuxième partie de la question, calculer $\varphi(P, e_0)$, $\varphi(P, e_1)$, $\varphi(P, e_2)$ et conclure.

Exercice 20.
(1) On trouve que $\varphi(A, B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}$ si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
(2) Utiliser la question (1) pour montrer que φ est un produit scalaire.
(3) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(4) Montrer par Analyse-Synthèse que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, puis que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux avec les propriétés de la trace.

Exercice 21.
(1) On trouve que $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ si $i = j$ et $\langle e_i, e_j \rangle = 1/2$ si $i \neq j$.
(2) Calculer le rang de A et montrer qu'il est égal à n, puis conclure.
(3) Partant de la relation $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$, calculer le produit scalaire de cette expression avec e_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et conclure avec la question (2).

Exercice 22.
(1) Calculer $\|v\|^2$ et montrer que $\|v\|^2 \leq \|u\|^2$. Conclure.
(2) Soient $x_1, ..., x_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$ $(*)$. A l'aide de la question (1), on peut supposer que $x_1, ..., x_n \geq 0$. Calculer alors le produit scalaire de la relation $(*)$ avec e_{n+1} et conclure.

Exercice 23. On voit que ${}^tP = P^{-1}$. Pour l'inégalité à démontrer, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et aux vecteurs U et PU, où U est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1.

Exercice 24.
(1) (a) Etablir la convergence de $\varphi(P, Q)$ en utilisant la linéarité de l'intégrale et la fonction Gamma d'Euler.
(b) A faire!
(2) (a) Montrer que $U(P)(t) = (1-t)P'(t) + tP''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en déduire que $U \in \mathcal{L}(E)$.
(b) Vérifier par une IPP que $\langle U(P), Q \rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t} P'(t) Q'(t) dt$, et conclure.
(3) (a) Utiliser la question $(2)(a)$!
(b) Calculer la matrice de U_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. On trouve que :
$$\mathrm{Sp}(U_n) = \{-k,\ k \in [\![0, n]\!]\}.$$
Conclure que U_n est diagonalisable.
(4) (a) On trouve que : $P_k(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \frac{k!}{i!} t^i$.
(b) A l'aide de la question $(4)(a)$, montrer que $U(P_k) = -kP_k$, puis conclure.

4. Exercices supplémentaires

Exercice 25.
(1) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $u = (\sqrt{x_1}, ..., \sqrt{x_n})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, ..., \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
(2) On a égalité si et seulement si $x_1 = ... = x_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 26.

(1) A faire!
(2) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$.

Exercice 27.

(1) A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer tout d'abord que :
$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \, \|u_k\| \, .$$
Appliquer ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $(|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|)$ et $(\|u_1\|, ..., \|u_n\|)$.
(2) Utiliser la question (1) et raisonner par l'absurde.

Exercice 28.

(1) A faire!
(2) On trouve que $a_{0,0} = 3$, $a_{0,1} = a_{1,0} = 0$, $a_{0,2} = a_{2,0} = 2$, $a_{1,1} = 2$, $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$, $a_{2,2} = 2$.
(3) Par le procédé de Gram-Schmidt, on trouve que $\mathcal{B} = (x \longmapsto 1/\sqrt{3}, x \longmapsto x/\sqrt{2}, x \longmapsto (x^2 - 2)/\sqrt{6})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$.
(4) Vérifier que les vecteurs $x \longmapsto 1 + x$ et $x \longmapsto 1 - x^2$ sont orthogonaux à $x \longmapsto x - x^2$.

Exercice 29.

(1) A faire comme à l'exo 2.
(2) Par le procédé de Gram-Schmidt, on trouve que $\mathcal{B} = (x \longmapsto 1, x \longmapsto x, x \longmapsto (x^2 - x)/\sqrt{3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$.
(3) Après calculs, on obtient que $\mathcal{F} = \left(x \longmapsto 1, x \longmapsto \frac{3}{4}x^2 - x\right)$ est une base de $F^{\perp}$.

Exercice 30.

(1) On trouve que $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base orthonormée de $F^{\perp}$.
(2) On trouve que $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1, 0), (-1, -1, 0, 2))$ est une base orthonormée de $F^{\perp}$.
(3) On trouve que $\mathcal{B} = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4))$ est une base orthonormée de $F^{\perp}$.
(4) On trouve que $\mathcal{B} = (x \longmapsto 1 + x + x^2)$ est une base orthonormée de $F^{\perp}$.

Exercice 31.

(1) (a) On trouve que $L_0 : x \longmapsto 1$, $L_1 : x \longmapsto x$, $L_2 : x \longmapsto \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$.
    (b) On trouve que L_n est de degré n, de coefficient dominant $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.
    (c) A faire avec les degrés échelonnés!
(2) A faire!
(3) (a) Utiliser une IPP.
    (b) Procéder par une récurrence finie à l'aide de la question (3)(a).
(4) (a) D'après la question (1)(c), on sait que $(L_0, ..., L_{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$. De plus, on peut montrer à l'aide de la question (3) que L_i est orthogonal à L_m pour tout $i \leq m - 1$. Conclure.
    (b) Utiliser la question précédente.

Exercice 32.

(1) Soient f et g deux éléments de E.
    (a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on voit que $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geq 0$, et donc $2|f(t)g(t)| \leq f^2(t) + g^2(t)$.
    (b) Avec la question précédente, conclure sur la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ par linéarité et comparaison d'intégrales de fonctions positives.
    (c) Vérifier avec les questions précédentes que E est stable par somme et par produit par une constante.
(2) A faire!
(3) (a) Penser aux intégrales exponentielles!
    (b) On trouve que $\langle f_k, f_l \rangle = \frac{1}{2(k+l)}$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$.
    (c) Après calculs, on trouve que $\mathcal{B} = (2f_1, \sqrt{72}(f_2 - \frac{2}{3}f_1))$ est une base orthonormée de F.

Exercice 33.

(1) On voit que $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, et donc $2|ab| \leq a^2 + b^2$. En particulier, on a $|a + b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

(2) Avec la question précédente, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Conclure sur la convergence de $\sum |u_n v_n|$ par linéarité et comparaison des séries à termes positifs.

(3) Vérifier avec l'indication donnée que $l^2(\mathbb{N})$ est stable par somme et par produit par une constante.

(4) (a) A faire!

(b) A faire! Conclure que F n'est pas de dimension finie car il contient une famille libre infinie.

(c) A faire en partant de la définition de F.

(d) On trouve que $F^\perp = \{0\}$ et $F \oplus F^\perp = F \neq l^2(\mathbb{N})$ (car $l^2(\mathbb{N})$ contient la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$, qui n'appartient pas à F). Enfin, on obtient que $(F^\perp)^\perp = l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 34.

(1) (a) A faire! Vérifier par télescopage que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge, de somme 1.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que $u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Vérifier par télescopage que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, de somme 1.

(2) (a) On peut proposer la fonction en Python suivante :

```
import numpy as np

def fact(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        p=1
        for k in range(1,n+1):
            p=p*k
        return p
```

(b) On peut proposer la fonction en Python suivante :

```
import numpy as np

def suiteu(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+fact(k)
    return n/s
```

(c) Penser aux séries exponentielles!

(d) Comme les a_k sont ≥ 0, on voit que $a_1 + ... + a_n \geq a_n = n!$, et donc $u_n \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$.

(e) Effectuer une comparaison avec une série exponentielle. On trouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = e - 1$, et on conclut!

(3) (a) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $u = \left(\sqrt{a_1}, ..., \sqrt{a_n}\right)$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, ..., \frac{n}{\sqrt{a_n}}\right)$.

(b) D'après le résultat précédent, on voit que :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq (a_1 + ... + a_n) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k},$$

ce qui nous donne après division que :

$$\frac{2n+1}{a_1 + ... + a_n} \leq 4\left(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

On conclut alors en remarquant que $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$!

(c) Par sommation de l'inégalité précédente, puis par interversion des sommes et télescopage, on trouve que, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + ... + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k} k^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

Il n'y a plus qu'à conclure!

(d) D'après la question précédente, on voit que, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + ... + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{a_k}$ converge et est à termes positifs, on obtient que, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1 + ... + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{a_1+...+a_n}$ est majorée. Comme cette série est à termes positifs, il s'ensuit qu'elle converge. Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on voit alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1 + ... + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Comme les a_k sont tous > 0, on obtient que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{a_1 + ... + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 2 de part et d'autre pour établir l'inégalité $(*)$.

Exercice 35.

(1) Soient $x_1, ..., x_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$. Comme $(u_1, ..., u_n)$ est μ-presque orthogonale, on voit que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 0$, ce qui entraine que $x_1 = ... = x_n = 0$, et donc $(u_1, ..., u_n)$ est libre.

(2) Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de E. Si $(u_1, ..., u_n)$ est orthonormale, alors on vérifie avec le théorème de Pythagore que $(u_1, ..., u_n)$ est 1-presque orthogonale. Réciproquement, supposons que $(u_1, ..., u_n)$ soit 1-presque orthogonale. Alors on voit que $\|u_i + u_j\|^2 = 2$ pour tous i, j tels que $i \neq j$. Comme les u_k sont de norme 1, on obtient par polarisation que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tous i, j tels que $i \neq j$. On en déduit que $(u_1, ..., u_n)$ est orthonormale.

(3) (a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Soit x un vecteur de E et soient $x_1, ..., x_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Par linéarité de f, on trouve que :

$$\|f(x)\| = \|f(x_1 e_1 + ... + x_n e_n)\| = \|x_1 f(e_1) + ... + x_n f(e_n)\|$$

D'après l'inégalité triangulaire, on obtient que :

$$\|f(x)\| \leq |x_1| \|f(e_1)\| + ... + |x_n| \|f(e_n)\|.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que :

$$\|f(x)\| \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \sqrt{\|f(e_1)\|^2 + ... + \|f(e_n)\|^2}.$$

Avec le théorème de Pythagore, ceci entraine que :

$$\|f(x)\| \leq \sqrt{\|f(e_1)\|^2 + ... + \|f(e_n)\|^2} \|x\|.$$

Il suffit alors de poser $k = \sqrt{\|f(e_1)\|^2 + ... + \|f(e_n)\|^2}$!

(b) On applique le résultat de la question précédente à f et à f^{-1}. On trouve alors des constantes $k, k' > 0$ telle que $\|f(x)\| \leq k\|x\|$ et $\|f^{-1}(x)\| \leq k'\|x\|$ pour tout $x \in E$. En remplaçant x par $f(x)$ dans la deuxième inégalité, on obtient que $\|x\| \leq k'\|f(x)\|$ pour tout $x \in E$, et donc :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{k'}\|x\| \leq \|f(x)\| \leq k\|x\|.$$

Il suffit alors de choisir $\lambda = \max\{k, 1/k'\}$!

(4) Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de E. Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E. Alors il existe une unique endomorphisme f de E tel que $f(e_i) = u_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $(u_1, ..., u_n)$ est une famille libre, on trouve que f est de rang n, et donc f est un automorphisme de E. D'après la question précédente, il existe alors un réel $\lambda \geq 1$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{\lambda}\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda\|x\|.$$

Pour tous réels $x_1, ..., x_n$, on obtient en posant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et par définition et linéarité de f que :

$$\frac{1}{\lambda}\|x\| \leq \|x_1 u_1 + ... + x_n u_n\| \leq \lambda\|x\|.$$

Comme la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est orthonormée, il s'ensuit avec le théorème de Pythagore que :

$$\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \|x_1u_1 + ... + x_nu_n\|^2 \leq \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

On en déduit que la famille $(u_1, ..., u_n)$ est μ-presque orthogonale, avec $\mu = \lambda^2$.

Exercice 36.

(1) Suivre les indications données!
(2) Vérifier tout d'abord que $\|y\| \leq \dfrac{2}{k}\|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ à l'aide de la question (1), puis faire un passage à la limite quand k tend vers $+\infty$.
(3) Utiliser la question (2) et le théorème du rang.
(4) (a) On trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k(y) = y$.
   (b) Suivre l'indication donnée et faire un télescopage. On trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} u^k(y) = 0$.
   (c) Utiliser les questions (3), (4)(a) et (4)(b) pour montrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 37.

(1) A donner!
(2) On trouve que : $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$.
(3) Par linéarité de l'espérance et par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que :

$$E\left(\|U\|^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(X_iX_j)\langle v_i, v_j\rangle.$$

Utiliser ensuite l'indépendance mutuelle des X_i et leur loi commune pour montrer que $E\left(\|U\|^2\right) = n$.
(4) Raisonner par l'absurde et obtenir une contradiction avec la positivité de l'espérance.
(5) Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, alors on a d'après Pythagore :

$$\forall(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1v_1 + ... + \varepsilon_nv_n\| = \sqrt{n}.$$

Réciproquement, supposons que :

$$\forall(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1v_1 + ... + \varepsilon_nv_n\| = \sqrt{n}.$$

Posons alors $x = \varepsilon_1v_1 + ... + \varepsilon_nv_n$ et $y = \varepsilon_1v_1 + ... - \varepsilon_iv_i + ... + \varepsilon_nv_n$. Comme $\|x\| = \|y\| = \sqrt{n}$, on voit que $\|x\|^2 = \|y\|^2$, et donc on a d'après la question (2) :

$$\left\langle v_i, \sum_{1\leq k\leq n,\ k\neq i} \varepsilon_kv_k\right\rangle = 0.$$

En choisissant judicieusement les ε_k, montrer que $\langle v_i, v_k\rangle = 0$ pour tout $k \neq i$. Conclure.
(6) On raisonne par l'absurde et on suppose que $\|\varepsilon_1v_1 + ... + \varepsilon_nv_n\| \leq \sqrt{n}$ pour tout $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. Alors, on obtient par croissance de l'espérance que $E\left(\|U\|^2\right) \leq n$, et donc $E\left(\|U\|^2\right) = n$ d'après la question (3). Par positivité de l'espérance, l'égalité $E\left(\|U\|^2\right) = n$ entraine que $\|U\|^2 = n$ presque sûrement, et donc :

$$\forall(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1v_1 + ... + \varepsilon_nv_n\| = \sqrt{n}.$$

Conclure avec la question (5) que $\mathcal{F}$ est orthogonale, d'où la contradiction recherchée.

Exercice 38.

(1) Pour $n = 2$, on se fixe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. Vérifier alors que $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$ conviennent!
(2) Dans le cas général, on voit avec la relation (1) que F et G sont en somme directe. Ensuite, on vérifie comme à l'exo 16 que $(F \oplus G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, ce qui entraine avec la relation (4) que :

$$F \oplus G = (F^\perp \cap G^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E.$$

De la même manière, on obtient avec les relations (2) et (3) que $F^\perp \oplus G = E$. En particulier, on trouve en passant aux dimensions que ;

$$\dim(F) = n - \dim(G) = \dim(F^\perp) = n - \dim(F),$$

d'où il s'ensuit que $n = 2\dim(F)$, et donc n est pair. Pour un exemple, on se fixe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_{2p})$ de E, où $n = 2p$. Montrer alors que $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1+e_{p+1}, ..., e_p+e_{2p})$ conviennent. Pour ce faire, on pourra vérifier par le calcul que $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, ..., e_{2p})$ et $G^\perp = \mathrm{Vect}(e_1 - e_{p+1}, ..., e_p - e_{2p})$, puis que les relations (1) à (4) sont toutes satisfaites!