Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques $n^o 4$: Polynômes - Diagonalisation

Corrigé de l'exercice 1. (Dichotomie) Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) < 0$. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ selon le protocole suivant. Si l'on pose $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, alors on définit a_{n+1} et b_{n+1} par :

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) & \text{si} \quad f(a_n)f(c_n) \leq 0 \\ (c_n, b_n) & \text{si} \quad f(a_n)f(c_n) > 0 \end{cases}.$$

(1) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) :'' \; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}''.$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est clairement vraie car $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $b_0 - a_0 = b - a = \frac{b-a}{2^0}$. A présent, supposons la propriété vraie à un certain ordre n et montrons-la à l'ordre $n+1$. Par construction, on voit que, si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = c_n - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

De même, si $f(a_n)f(c_n) > 0$, on trouve que :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - c_n = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

Dans tous les cas, on voit que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$. Comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ par hypothèse de récurrence, il s'ensuit que :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.}$$

(2) Montrons que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite notée l. Pour ce faire, on va vérifier qu'elles sont adjacentes. D'après la question précédente, on a $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, comme $b > a$, ceci entraine que $b_n \geq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'ensuit que $a_n \leq c_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Partant de là, on voit que $a_{n+1} - a_n = 0$ si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$ et $a_{n+1} - a_n = c_n - a_n \geq 0$ si $f(a_n)f(c_n) > 0$. Dans tous les cas, on obtient que $a_{n+1} - a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc (a_n) est croissante. De même, on voit que $b_{n+1} - b_n = c_n - b_n \leq 0$ si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$ et $b_{n+1} - b_n = 0$ si $f(a_n)f(c_n) > 0$. Dans tous les cas, on obtient que $b_{n+1} - b_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc (b_n) est décroissante. Enfin, comme $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0, et donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, on en déduit que :

$$\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ convergent et ont même limite.}}$$

(3) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) :'' \; f(a_n)f(b_n) \leq 0''.$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est clairement vraie car $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $f(a)f(b) < 0$. A présent, supposons la propriété vraie à un certain ordre n et montrons-la à l'ordre $n+1$. Par construction, on voit que, si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$, et donc :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(a_n)f(c_n) \leq 0.$$

De même, si $f(a_n)f(c_n) > 0$, on trouve que $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$, ce qui entraine que :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(c_n)f(b_n).$$

Vérifions que $f(c_n)f(b_n) \leq 0$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que $f(c_n)f(b_n) > 0$. Par hypothèse, on sait que $f(a_n)f(c_n) > 0$, ce qui entraine par produit que $f(a_n)f(c_n)^2 f(b_n) > 0$. En particulier, le réel $f(c_n)$ est non nul et $f(c_n)^2 > 0$, ce qui nous donne après division que $f(a_n)f(b_n) > 0$. Mais ceci est impossible par hypothèse de récurrence, et donc on a bien :

$$f(a_{n+1})f(b_{n+1}) = f(c_n)f(b_n) \leq 0.$$

Dans tous les cas, il s'ensuit que $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) \leq 0$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f(a_n)f(b_n) \leq 0.}$$

(4) Montrons tout d'abord que $f(l) = 0$. Comme f est continue sur $[a, b]$, que (a_n) et (b_n) convergent toutes deux vers $l \in [a, b]$ et que $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question précédente, on obtient par passage à la limite dans cette inégalité que :

$$f(l)^2 = \lim_{n \to +\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0,$$

et donc $f(l) = 0$ (vu que $f(l)$ est réel). Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f(l) = 0.}$$

A présent, montrons que $a_n \leq l \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme (a_n) est croissante et tend vers l d'après la question (2), on voit que $a_n \leq l$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De même, comme (b_n) est croissante et tend vers l d'après la question (2), on constate que $l \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En mettant bout à bout ces inégalités, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_n \leq l \leq b_n.}$$

(5) (a) Montrons que, pour tout réel $r > 2$, l'équation $x^5 - rx + 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$. Pour ce faire, fixons un réel $r > 2$ et posons $f_r : x \longmapsto x^5 - rx + 1$. Comme f_r est polynomiale sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $[0, 1]$. De plus, on voit que $f_r(0)f_r(1) = 1 \times (2-r) = 2-r < 0$, et donc f_r change de signe sur $[0, 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'y annule au moins une fois, ce qui signifie que, pour tout $r > 2$:

$$\boxed{\text{l'équation } x^5 - rx + 1 = 0 \text{ admet au moins une solution dans } [0, 1].}$$

(b) A l'aide des questions précédentes, complétons la fonction en Python ci-dessous pour qu'étant donnés un réel $r > 2$ et une précision $\varepsilon > 0$, celle-ci calcule une solution approchée à ε près de l'équation $x^5 - rx + 1 = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$:

```
def dicho(r,e):
    a=0
    b=1
    while b-a>e:
        c=........
        if ........
            b=.......
        else:
            a=.......
    return ........
```

Pour ce faire, on va utiliser le procédé de dichotomie tel qu'il est décrit plus avant dans l'exercice. Plus précisément, on va calculer les termes généraux des suites (a_n) et (b_n), et on s'arrêtera quand l'écart entre b_n et a_n sera $\leq \varepsilon$. Comme $a_n \leq l \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$, l'écart entre a_n et l sera $\leq \varepsilon$, et donc le réel a_n obtenu fournira une valeur approchée de l à ε près (par défaut). En d'autres termes, on complètera la fonction précédente comme suit :

```
def dicho(r,e):
    a=0
    b=1
    while b-a>e:
        c=(a+b)/2
        if (a**5-r*a+1)*(c**5-r*c+1)<0:
            b=c
        else:
            a=c
    return a
```

Corrigé de l'exercice 2. Soit $P \in \mathbb{R}_7[x]$ tel que $x \longmapsto (x-1)^4$ divise $P+4$ et $x \longmapsto (x+1)^4$ divise $P-4$.

(1) Montrons que $x \longmapsto (x-1)^3$ et $x \longmapsto (x+1)^3$ divisent P'. Tout d'abord, Comme $x \longmapsto (x-1)^4$ divise $P+4$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) + 4 = (x-1)^4 Q(x).$$

Par dérivation, ceci nous donne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 4(x-1)^3 Q(x) + (x-1)^4 Q'(x) = (x-1)^3\{4Q(x) + (x-1)Q'(x)\}.$$

Dès lors, le polynôme P' est divisible par $x \longmapsto (x-1)^3$. En outre, comme $x \longmapsto (x+1)^4$ divise $P-4$, il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[x]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) - 4 = (x+1)^4 R(x).$$

Par dérivation, ceci nous donne que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 4(x+1)^3 R(x) + (x+1)^4 R'(x) = (x+1)^3\{4R(x) + (x-1)R'(x)\}.$$

Dès lors, le polynôme P' est divisible par $x \longmapsto (x+1)^3$. Par conséquent :

$$\boxed{P' \text{ est divisible par } x \longmapsto (x-1)^3 \text{ et par } x \longmapsto (x+1)^3.}$$

(2) Déterminons la factorisation du polynôme P'. D'après la question précédente, le polynôme P' est divisible par $x \longmapsto (x-1)^3$ et par $x \longmapsto (x+1)^3$. Donc P' est divisible par $x \longmapsto (x-1)^3(x+1)^3$, et il existe un polynôme $S \in \mathbb{R}[x]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = (x-1)^3(x+1)^3 S(x).$$

Comme P est de degré ≤ 7, on voit que P' est de degré ≤ 6. Comme de plus $x \longmapsto (x-1)^3(x+1)^3$ est de degré 6, il s'ensuit que S est de degré ≤ 0. Donc S est constant, et il existe un réel θ tel que :

$$\boxed{P' : x \longmapsto \theta(x-1)^3(x+1)^3.}$$

(3) Déterminons l'expression générale du polynôme P. D'après la question précédente et la formule du binôme, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \theta(x^2-1)^3 \\ &= \theta\left[\binom{3}{0}(-1)^0(x^2)^3 + \binom{3}{1}(-1)^1(x^2)^2 + \binom{3}{2}(-1)^2(x^2)^1 + \binom{3}{3}(-1)^3(x^2)^0\right] \\ &= \theta\left[x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1\right]. \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par intégration qu'il existe un réel φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(x) = \varphi + \theta\left[\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right].}$$

(4) Calculons les valeurs de $P(1)$ et $P(-1)$. Comme $(P+4)$ est divisible par $x \longmapsto (x-1)^4$ et que $(P-4)$ est divisible par $x \longmapsto (x+1)^4$, il s'ensuit que 1 est racine de $P+4$ et que -1 est racine de $P-4$. En particulier, on a $(P+4)(1) = P(1) + 16 = 0$ et $(P-4)(-1) = P(-1) - 16 = 0$, et donc :

$$\boxed{P(1) = -4 \;\text{ et }\; P(-1) = 4.}$$

(5) D'après la question (3), on trouve aussi que :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} P(1) & = & \varphi + \theta\left[\dfrac{(1)^7}{7} - \dfrac{3(1)^5}{5} + 1^3 - 1\right] & = & \varphi - \dfrac{16\theta}{35} \\[2ex] P(-1) & = & \varphi + \theta\left[\dfrac{(-1)^7}{7} - \dfrac{3(-1)^5}{5} + (-1)^3 - (-1)\right] & = & \varphi + \dfrac{16\theta}{35} \end{array}\right. .$$

D'après la question (4), il s'ensuit que (φ, θ) est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{rcccc} \varphi & - & \dfrac{16\theta}{35} & = & -4 \\[2ex] \varphi & + & \dfrac{16\theta}{35} & = & 4 \end{array}\right. .$$

Après résolution, on obtient que $\varphi = 0$ et $\theta = \dfrac{35}{4}$, d'où l'on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{P(x) = \frac{35}{4}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right) = \frac{5}{4}x^7 - \frac{21}{4}x^5 + \frac{35}{4}x^3 - \frac{35}{4}x.}$$

Corrigé de l'exercice 3. (Polynômes de Tchebychev) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[x]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$. Par la suite, on pose :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, \quad \alpha_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad \omega = \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$

(1) Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, trace la courbe représentative du polynôme T_n sur l'intervalle $[-1, 1]$. Pour ce faire, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tracecourbetn(n):
    x=np.arange(-1,1,0.01)
    n=np.shape(x)[0]
    a=np.ones(n)
    b=x
    for k in range(n-1):
        a=2*x*b-a
        a=b
        b=c
    plt.plot(a,b)
    plt.show()
```

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par a_n le coefficient dominant de T_n. Montrons par une récurrence double la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\deg(T_n) = n \ \text{ et } \ a_n = 2^{n-1}\text{"}.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, car $\deg(T_1) = \deg(x \longmapsto x) = 1$ et $a_1 = 1 = 2^{1-1}$, vu que $T_1 = X$. De plus, on vérifie sans peine que $\mathcal{P}(2)$ est vraie, car $\deg(T_2) = 2$ et $a_2 = 2 = 2^{2-1}$. En effet, d'après la relation de récurrence "$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$", on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1.$$

A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}$ vraie aux ordres $n-1$ et n, avec $n \geq 2$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe des réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}, \beta_0, ..., \beta_{n-2}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_0 \quad \text{et} \quad T_{n-1}(x) = 2^{n-2}x^{n-1} + \beta_{n-2}x^{n-2} + ... + \beta_0.$$

D'après la relation de récurrence "$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$", on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ &= 2x(2^{n-1}x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_0) - (2^{n-2}x^{n-1} + \beta_{n-2}x^{n-2} + ... + \beta_0) \\ &= 2^n x^{n+1} + ... - \beta_0, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\deg(T_{n+1}) = n+1$ et $a_{n+1} = 2^n = 2^{n+1-1}$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \deg(T_n) = n \ \text{ et } \ a_n = 2^{n-1}.}$$

(3) Montrons par une récurrence double la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}\forall t \in \mathbb{R}, \ \ T_n(\cos t) = \cos nt\text{"}.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}$ est vraie aux ordres 0 et 1, car $T_0(\cos(t)) = 1 = \cos(0.t)$ et $T_1(\cos(t)) = \cos(t) = \cos(1.t)$. A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}$ vraie aux ordres $n-1$ et n, avec $n \geq 1$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos(t)) = \cos(nt) \quad \text{et} \quad T_{n-1}(\cos(t)) = \cos((n-1)t).$$

D'après la relation de récurrence "$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$" et les formules d'addition des fonctions trigonométriques, on trouve que :

$$\begin{aligned}
T_{n+1}(\cos(t)) &= 2\cos(t)T_n(\cos(t)) - T_{n-1}(\cos(t)) \\
&= 2\cos(t)\cos(nt) - \cos((n-1)t) \\
&= 2\cos(t)\cos(nt) - \cos(nt-t) \\
&= 2\cos(t)\cos(nt) - \{\cos(nt)\cos(t) + \sin(nt)\sin(t)\} \\
&= 2\cos(t)\cos(nt) - \cos(nt)\cos(t) - \sin(nt)\sin(t) \\
&= \cos(t)\cos(nt) - \sin(nt)\sin(t) \\
&= \cos(nt+t),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $T_{n+1}(\cos(t)) = \cos((n+1)t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ T_n(\cos(t)) = \cos(nt).}$$

(4) Calculons les valeurs de $T_n(1), T_n(-1), T_n(0)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. D'après la question (3), on sait que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si l'on choisit $t = 0$, alors on trouve que :

$$T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n(0)) = \cos(0) = 1.$$

De même, si l'on choisit $t = \pi$, alors on obtient que :

$$T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

Enfin, si l'on choisit $t = \frac{\pi}{2}$, alors on trouve que :

$$T_n(0) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

En résumé, on vient de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_n(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).}$$

(5) Montrons que, pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, le réel α_k est racine de T_n. Comme $\alpha_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, le résultat de la question (3) entraine que :

$$T_n(\alpha_k) = T_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

Dès lors, on en déduit que, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$:

$$\boxed{\text{le réel } \alpha_k \text{ est racine de } T_n.}$$

(6) Commençons par vérifier que les α_k sont distincts deux à deux. Pour ce faire, on pose $\omega_k = \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$. Comme $0 \leq k \leq n-1$, on voit que $0 \leq k\frac{\pi}{n} \leq \frac{(n-1)\pi}{n}$, et donc :

$$0 < \frac{\pi}{2n} \leq \omega_k \leq \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{n} < \pi.$$

En particulier, tous les réels w_k sont compris dans l'intervalle $]0, \pi[$, et de plus $\omega_0 < \omega_1 < ... < \omega_{n-1}$. Comme la fonction cos est dérivable sur $]0, \pi[$, que $\cos' = -\sin$ et que sin est > 0 sur $]0, \pi[$, la fonction cos est strictement décroissante sur $]0, \pi[$. Dès lors, ceci nous donne que :

$$\cos(\omega_0) > \cos(\omega_1) > ... > \cos(\omega_{n-1}).$$

En particulier, il s'ensuit par définition des ω_k que $\alpha_0 > \alpha_1 > ... > \alpha_{n-1}$, et donc :

$$\boxed{\text{les réels } \alpha_k \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

A présent, donnons la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[x]$. D'après la question (5), les réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ sont tous des racines de T_n. Comme de plus ils sont deux à deux distincts et que T_n est de degré n, il existe un réel $\theta_n \neq 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$T_n(x) = \theta_n(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)...(x-\alpha_{n-1}).$$

Dès lors, le terme dominant de T_n est égal à θ_n, et donc $\theta_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après la question (2). Par conséquent, la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[x]$ est donnée par :

$$\boxed{T_n : x \longmapsto 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(x-\alpha_k).}$$

(7) Déterminons la valeur du réel ω. D'après la question précédente, le réel $T_n(0)$ est donné par :

$$T_n(0) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(0-\alpha_k) = (-1)^n 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\alpha_k = (-1)^n 2^{n-1}\omega.$$

Comme de plus $T_n(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ d'après la question (4), il s'ensuit que :

$$T_n(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^n 2^{n-1}\omega,$$

d'où l'on déduit après calculs que :

$$\boxed{\omega = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).}$$

(8) Calculons la forme réduite de T_5. D'après la relation de récurrence "$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$", on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1 \\ T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 3x \\ T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3-3x) - (2x^2-1) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) = 2xT_4(x) - T_3(x) = 2x(8x^4-8x^2+1) - (4x^3-3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \end{cases}.$$

Dès lors, on en déduit que :

$$\boxed{T_5 : x \longmapsto 16x^5 - 20x^3 + 5x.}$$

(9) Déterminons la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$. D'après la question (5), on sait que $\alpha_1, ..., \alpha_5$ sont exactement les racines de T_5, avec :

$$\alpha_1 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right), \quad \alpha_2 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right), \quad \alpha_3 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha_4 = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right), \quad \alpha_1 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right).$$

Il nous reste donc à déterminer explicitement l'ensemble $\mathcal{S}$ des racines de T_5. Pour ce faire, on commence par remarquer que :

$$T_5(\alpha_1) = 16\alpha_1^5 - 20\alpha_1^3 + 5\alpha_1 = \alpha_1(16\alpha_1^4 - 20\alpha_1^2 + 5) = 0.$$

Dès lors, on voit que $T_5(\alpha_1) = 0$ si et seulement si soit $\alpha_1 = 0$, soit $16\alpha_1^4 - 20\alpha_1^2 + 5 = 0$. Pour résoudre la dernière équation, on pose $A = \alpha_1^2$. Alors A vérifie l'équation $16A^2 - 20A + 5 = 0$. Par un calcul simple, on trouve que le discriminant de cette équation est égal à :

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 16 \times 5 = 400 - 320 = 80 = (4\sqrt{5})^2,$$

et que ses racines sont données par :

$$A_1 = \frac{20-4\sqrt{5}}{32} = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{20+4\sqrt{5}}{32} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

Comme ces deux racines sont strictement positives et que $A = \alpha_1^2$, il s'ensuit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des racines de T_5 est donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{0, -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}.$$

Comme $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{3\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$ et que la fonction cos est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, il s'ensuit que $0 < \alpha_2 < \alpha_1$. De plus, comme $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{10} < \frac{9\pi}{10} < \frac{3\pi}{2}$, on obtient que $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \leq 0$. Par conséquent, α_1 est la plus grande racine de T_5, c'est-à-dire :

$$\boxed{\alpha_1 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.}$$

Corrigé de l'exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Par des calculs simples, on trouve que :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Dès lors, il s'ensuit que $A^3 = 2A^2$, ce qui entraine que $A^3 - 2A^2 = 0$ et $f^3 - 2f^2 = 0$, et donc :

$$\boxed{P : x \longmapsto x^3 - 2x^2 \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

(b) Déterminons les valeurs propres de f. Comme P est un polynôme annulateur de f, on voit que les seules valeurs propres possibles de f sont 0 et 2. Reste à vérifier que ce sont bien des valeurs propres de f. Pour ce faire, considérons un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$, et soit X le vecteur colonne de composantes x_1, x_2, x_3. Alors x appartient à $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ si et seulement si $f(x) - 2x = (0, 0, 0)$, ce qui se traduit en termes matriciels par :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En termes de coordonnées, cela nous donne que (x_1, x_2, x_3) est solution du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

On résout alors ce système par la méthode du pivot de Gauss. En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & -2x_3 & = & 0 \\ & & & & -2x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on obtient que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & -2x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Si l'on choisit x_2 comme paramètre, on obtient que $x_3 = 0$, $x_2 = x_2$ et $x_1 = x_2$, et donc :

$$x \in \ker(f - 2\mathrm{Id}) \iff \exists x_3 \in \mathbb{R},\ x = x_3(1, 1, 0) \iff x \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1, 1, 0)).$$

En d'autres termes, on vient de trouver que :

$$\ker(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0)).$$

Comme $\ker(f - 2\mathrm{Id}) \neq \{(0, 0, 0)\}$, il s'ensuit que 2 est bien valeur propre de f. Passons maintenant au réel 0. Avec les notations précédentes, on voit que x appartient à $\ker(f)$ si et seulement si $f(x) = (0, 0, 0)$, ce qui se traduit en termes matriciels par :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En termes de coordonnées, cela nous donne que (x_1, x_2, x_3) est solution du système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

On résout alors ce système par la méthode du pivot de Gauss. En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on trouve que :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Si l'on choisit x_3 comme paramètre, on obtient que $x_2 = x_3$ et $x_1 = 0$, et donc :

$$x \in \ker(f) \iff \exists x_3 \in \mathbb{R},\ x = x_3(1,1,0) \iff x \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((0,1,1)).$$

En d'autres termes, on vient de trouver que :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1)).$$

Comme $\ker(f) \neq \{(0,0,0)\}$, il s'ensuit que 0 est bien valeur propre de f. Par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{0, 2\}.}$$

(c) Montrons que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable. D'après la question $(1)(b)$, on sait que :

$$E_2(f) = \ker(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}((1,1,0)) \quad \text{et} \quad E_0(f) = \ker(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1)).$$

En particulier, les familles $((1,1,0))$ et $((0,1,1))$ sont génératrices respectivement dans $E_2(f)$ et dans $E_0(f)$. Comme les vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$ sont non nuls, les familles $((1,1,0))$ et $((0,1,1))$ sont aussi libres, et donc ce sont des bases respectives de $E_2(f)$ et de $E_0(f)$. Dès lors, ceci nous donne en passant aux dimensions que :

$$\dim E_2(f) + \dim E_0(f) = 1 + 1 = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

(2) Déterminons une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour ce faire, on va procéder par Analyse-Synthèse.

Analyse :

Supposons qu'il existe une telle base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Comme T est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, cela signifie que $f(e_1) = (0,0,0)$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = 2e_3$. En particulier, les vecteurs e_1 et e_3 appartiennent respectivement à $E_0(f)$ et à $E_2(f)$. D'après la question $(1)(b)$, il existe des réels α, β tels que $e_1 = \alpha(0,1,1)$ et $e_3 = \beta(1,1,0)$. De plus, si l'on pose $e_2 = (x_1, x_2, x_3)$ et si X est le vecteur colonne de composantes x_1, x_2, x_3, alors l'égalité $f(e_2) = e_1 = \alpha(0,1,1)$ se traduit en termes matriciels par :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on voit que (x_1, x_2, x_3) est solution du système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & \alpha \\ -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & \alpha \end{array}\right. .$$

On résout alors ce système par la méthode du pivot de Gauss. En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on trouve que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = \alpha \\ 4x_2 - 4x_3 = \alpha \end{cases}.$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on obtient que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 = \alpha \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Si l'on choisit x_3 comme paramètre, on trouve que $x_2 = x_3 + \frac{\alpha}{4}$ et $x_1 = -\frac{\alpha}{4}$, et donc :

$$e_2 = x_3(0,1,1) + \frac{\alpha}{4}(-1,1,0).$$

En d'autres termes, la base $\mathcal{B}$ doit être de la forme :

$$\mathcal{B} = \left(\alpha(0,1,1), x_3(0,1,1) + \frac{\alpha}{4}(-1,1,0), \beta(1,1,0)\right),$$

où α, β, x_3 sont des réels. A noter que, comme une base ne peut pas contenir le vecteur nul vu qu'elle est libre, on a $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.

Synthèse :

Soient α, β, x_3 des réels tels que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$, et considérons la famille :

$$\mathcal{B} = \left(\alpha(0,1,1), x_3(0,1,1) + \frac{\alpha}{4}(-1,1,0), \beta(1,1,0)\right).$$

Commençons par montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Par définition, on voit que :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\alpha/4 & \beta \\ \alpha & x_3 + \alpha/4 & \beta \\ \alpha & x_3 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

En effectuant les opérations élémentaires $C_2 \leftarrow C_2 - \frac{x_3}{\alpha}C_1$ et $C_3 \leftarrow \frac{1}{\beta}C_3$ (lesquelles sont valides car $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ par hypothèse), on trouve que :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & -\alpha/4 & 1 \\ \alpha & \alpha/4 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

En effectuant les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow \frac{1}{\alpha}C_1$ et $C_2 \leftarrow \frac{4}{\alpha}C_2$, on obtient que :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_1 \leftrightarrow L_3$, on trouve que :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Enfin, en effectuant l'opération élémentaire $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, on obtient que :

$$\mathrm{rg}(\mathcal{B}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 3.$$

Comme la famille $\mathcal{B}$ est de rang 3 et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, elle est génératrice dans $\mathbb{R}^3$. Mais comme elle compte 3 éléments, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

A présent, on va vérifier que T est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Comme $e_1 = \alpha(0,1,1)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 0 par construction, on sait déjà que $f(e_1) = (0,0,0)$. De plus, comme $e_3 = \beta(1,1,0)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2 par construction, on voit aussi que $f(e_3) = 2e_3$. Enfin, si E_2 est le vecteur colonne des coordonnées de e_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on trouve par des calculs matriciels que :

$$AE_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha/4 \\ x_3 + \alpha/4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors, ceci entraine que $f(e_2) = \alpha(0,1,1) = e_1$, et donc :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ce qui termine notre Analyse-Synthèse. En particulier, si l'on choisit $\alpha = 4$, $\beta = 1$ et $x_3 = 0$ (ce qui est licite car $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B} = ((0,4,4),(-1,1,0),(1,1,0)) \text{ est : } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(3) Montrons que $\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$. Pour ce faire, on va déterminer des bases de $\ker(f^2)$ et de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$, puis on va vérifier que la concaténation de ces bases donne une base de $\mathbb{R}^3$. D'après la question (1)(b), on sait déjà que $((1,1,0))$ est une base de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$. Calculons alors une base de $\ker(f^2)$. Pour ce faire, considérons un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$, et soit X le vecteur colonne de composantes x_1, x_2, x_3. Alors x appartient à $\ker(f^2)$ si et seulement si $f^2(x) = (0,0,0)$, ce qui se traduit en termes matriciels et d'après la question (1)(a) par :

$$A^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on voit que (x_1, x_2, x_3) est solution du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.,$$

ce qui équivaut à écrire que $2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$. Si l'on choisit x_2 et x_3 comme paramètres, alors on trouve que $x_1 = -x_2 + x_3$, et donc :

$$\begin{aligned} x \in \ker(f^2) &\iff \exists (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2, \;\; u = x_2(-1,1,0) + x_3(1,0,1) \\ &\iff x \in \mathrm{Vect}((-1,1,0),(1,0,1)). \end{aligned}$$

En particulier, on voit que $\ker(f^2) = \mathrm{Vect}((-1,1,0),(1,0,1))$, et donc la famille $((-1,1,0),(1,0,1))$ est génératrice dans $\ker(f^2)$. Mais comme cette famille est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et donc $((-1,1,0),(1,0,1))$ est une base de $\ker(f^2)$. Considérons alors la concaténation des bases de $\ker(f^2)$ et de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ que l'on vient de trouver, c'est-à-dire la famille :

$$\mathcal{F} = ((-1,1,0),(1,0,1),(1,1,0)).$$

Calculons le rang de cette famille. En effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on obtient que :

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Enfin, en effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on trouve que :

$$\mathrm{rg}\,(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = 3.$$

Comme cette famille est de rang 3 et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, elle est génératrice dans $\mathbb{R}^3$. Mais comme elle comporte 3 éléments et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il s'ensuit que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Dès lors, comme la concaténation des bases de $\ker(f^2)$ et de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$ donne une base de $\mathbb{R}^3$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}).}$$

(4) Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'un tel endomorphisme g existe.

(a) Montrons d'abord que $\ker(f^2)$ est stable par g. Soit x un élément de $\ker(f^2)$. Comme $g^2 = f$, on voit que $g^4 = (g^2)^2 = f^2$, et donc :

$$f^2(g(x)) = g^4(g(x)) = g(g^4(x)) = g(f^2(x)) = g(0,0,0) = (0,0,0),$$

d'où il s'ensuit que $g(x)$ appartient à $\ker(f^2)$, et donc :

$$\boxed{\ker(f^2) \text{ est stable par } g.}$$

A présent, montrons que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3) = ((0,4,4), (-1,1,0), (1,1,0))$ la base trouvée à la question (2). Comme $f(e_1) = (0,0,0)$ par construction, on voit que $f^2(e_1) = f(f(e_1)) = f(0,0,0) = (0,0,0)$ car f est linéaire, et donc e_1 appartient à $\ker(f^2)$. De plus, on sait d'après la question précédente que $e_2 = (-1,1,0)$ appartient à $\ker(f^2)$. En particulier, (e_1, e_2) est une famille de $\ker(f^2)$. Comme les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, cette famille est libre. Mais comme $\dim \ker(f^2) = 2$ d'après la question précédente et que (e_1, e_2) compte 2 vecteurs, cette famille est une base de $\ker(f^2)$. En particulier :

$$\ker(f^2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2).$$

Comme $\ker(f^2)$ est stable par g, les vecteurs $g(e_1)$ et $g(e_2)$ appartiennent à $\ker(f^2) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. En particulier, il existe des constantes $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ telles que $g(e_1) = ae_1 + be_2$ et $g(e_2) = a'e_1 + b'e_2$. Mais comme $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il existe aussi des constantes $a'', b'', c'' \in \mathbb{R}$ telles que $g(e_3) = a''e_1 + b''e_2 + c''e_3$, et donc la matrice G de g dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.}$$

(b) Montrons qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$. D'après la question (2), on sait que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $g^2 = f$, on voit que $g \circ f = g \circ g^2 = g^2 \circ g = f \circ g$, et donc les endomorphismes f et g commutent. En particulier, leurs matrices dans la base $\mathcal{B}$ commutent, et donc :

$$\begin{aligned}
GT = TG \quad &\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 2a'' \\ 0 & b & 2b'' \\ 0 & 0 & 2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b' & b'' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c'' \end{pmatrix} \\
&\Longrightarrow \quad a = b', \;\; b = 0, \;\; a'' = 0, \;\; b'' = 0 \\
&\Longrightarrow \quad G = \begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mais comme $g^2 = f$, il s'ensuit que $G^2 = T$, ce qui nous donne que :

$$\begin{pmatrix} a & a' & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2aa' & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (c'')^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on obtient que $a^2 = 0$, et donc $a = 0$, mais ceci est impossible car $2aa'' = 1 \neq 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{il n'existe pas d'endomorphisme } g \text{ de } \mathbb{R}^3 \text{ tel que } g^2 = f.}$$

(5) Soit n un entier ≥ 1, soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et soit α un réel non nul.

(a) Montrons que, si $h^n = \alpha h^{n-1}$, alors $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$. Pour ce faire, on commence par montrer que la somme $\ker(h^{n-1}) + \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$ est bien directe. Considérons un élément x de $\ker(h^{n-1}) \cap \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$. Alors x appartient à la fois à $\ker(h^{n-1})$ et à $\ker(h - \alpha \mathrm{Id})$, et donc :

$$h^{n-1}(x) = 0 \quad \text{et} \quad h(x) = \alpha x.$$

Partant de l'égalité de droite, on obtient par itérations successives (ou par une récurrence facile) que $h^{n-1}(x) = \alpha^{n-1} x$. Mais comme $h^{n-1}(x) = 0$, il s'ensuit que $\alpha^{n-1} x = 0$, et donc $x = 0$ car $\alpha \neq 0$ par hypothèse. Par conséquent :

$$\ker(h^{n-1}) + \ker(h - \alpha \mathrm{Id}) = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha \mathrm{Id}).$$

A présent, montrons que $\dim \ker(h^{n-1}) + \dim \ker(h - \alpha \mathrm{Id}) = n$. Soit x un élément de $\mathfrak{Im}(h^{n-1})$. Alors il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $h^{n-1}(y) = x$. Mais comme $h^n - \alpha h^{n-1} = 0$, on obtient que :

$$(h - \alpha \mathrm{Id})(x) = (h - \alpha \mathrm{Id})(h^{n-1}(y)) = (h^n - \alpha h^{n-1})(y) = 0,$$

d'où il s'ensuit que x appartient à $\ker(h - \alpha \mathrm{Id})$, et donc $\mathfrak{Im}(h^{n-1}) \subset \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$. En passant aux dimensions, on trouve que :

$$\dim \mathfrak{Im}(h^{n-1}) \leq \dim \ker(h - \alpha \mathrm{Id}).$$

A l'aide du théorème du rang, on obtient que :

$$\dim \mathbb{R}^n - \dim \ker(h^{n-1}) \leq \dim \ker(h - \alpha \mathrm{Id}),$$

d'où il s'ensuit que :

$$\dim \mathbb{R}^n \leq \dim \ker(h^{n-1}) + \dim \ker(h - \alpha \mathrm{Id}).$$

Mais comme la somme $\ker(h^{n-1}) + \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$ est directe et contenue dans $\mathbb{R}^n$, on a aussi :

$$\dim \ker(h^{n-1}) + \dim \ker(h - \alpha \mathrm{Id}) \leq \dim \mathbb{R}^n.$$

Dès lors, cela entraine que :

$$\dim \ker(h^{n-1}) + \dim \ker(h - \alpha \mathrm{Id}) = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

En résumé, on sait que la somme $\ker(h^{n-1}) + \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$ est directe, contenue dans $\mathbb{R}^n$ et que $\dim \ker(h^{n-1}) + \dim \ker(h - \alpha \mathrm{Id}) = n$, d'où l'on déduit que :

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha \mathrm{Id}).}$$

(b) Réciproquement, montrons que, si $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$, alors $h^n = \alpha h^{n-1}$. Soit x un élément de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}^n = \ker(h^{n-1}) \oplus \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$, il existe un vecteur $u \in \ker(h^{n-1})$ et un vecteur $v \in \ker(h - \alpha \mathrm{Id})$ tels que $x = u + v$. Dès lors, par linéarité de h, on trouve que :

$$\begin{aligned}
(h^n - \alpha h^{n-1})(x) &= (h^n - \alpha h^{n-1})(u + v) \\
&= (h^n - \alpha h^{n-1})(u) + (h^n - \alpha h^{n-1})(v) \\
&= (h - \alpha \mathrm{Id})(h^{n-1}(u)) + h^{n-1}((h - \alpha \mathrm{Id})(v)) \\
&= (h - \alpha \mathrm{Id})(0) + h^{n-1}(0) \quad = \quad 0 + 0 \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il s'ensuit que $h^n - \alpha h^{n-1} = 0$, et donc :

$$\boxed{h^n = \alpha h^{n-1}.}$$

Corrigé de l'exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(P)(x) = P''(x) - 4xP'(x)$.

(1) (a) Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. Pour ce faire, on commence par remarquer que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par f. En effet, soit P un élément de $\mathbb{R}_n[x]$. Alors $\deg(P) \leq n$, ce qui entraine que $\deg(P'') \leq n - 2$ et $\deg(x \longmapsto 4xP'(x)) \leq n - 1 + 1 = n$, et donc :

$$\deg(f(P)) \leq \max\{\deg(P''), \deg(x \longmapsto xP'(x))\} \leq \max\{n - 2, n\} = n.$$

En particulier, $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_n[x]$, ce qui signifie que $\mathbb{R}_n[x]$ est stable par f. Reste à montrer que f est linéaire. Soient P, Q des éléments de $\mathbb{R}_n[x]$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on trouve par linéarité de la dérivation que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)''(x) - 4x(\lambda P + \mu Q)'(x) \\ &= \lambda P''(x) + \mu Q''(x) - 4x(\lambda P' + \mu Q')(x) \\ &= \lambda P''(x) + \mu Q''(x) - \lambda 4xP'(x) - \mu 4xQ'(x) \\ &= \lambda(P''(x) - 4xP'(x)) + \mu(Q''(x) - 4xQ'(x)) \\ &= \lambda f(P)(x) + \mu f(Q)(x), \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$, et donc f est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x].}$$

(b) Calculons $f(x \longmapsto 1)$ et $f(x \longmapsto x)$, puis $f(x \longmapsto x^k)$ pour tout $k \in \{2, ..., n\}$. Par définition, on a $(x \longmapsto 1)' = (x \longmapsto 1)'' = x \longmapsto 0$, et donc :

$$f(x \longmapsto 1) = 0 - 4(x \longmapsto x) \times 0 = x \longmapsto 0.$$

De plus, on a $(x \longmapsto x)' = x \longmapsto 1$ et $(x \longmapsto x)'' = x \longmapsto 0$, et donc :

$$f(x \longmapsto x) = 0 - 4(x \longmapsto x) \times 1 = x \longmapsto -4x.$$

De façon générale, on obtient que, pour tout $k \in \{2, ..., n\}$:

$$\begin{aligned} f(x \longmapsto x^k) &= (x \longmapsto x^k)'' - 4(x \longmapsto x)(x \longmapsto x^k)' \\ &= k(k-1)(x \longmapsto x^{k-2}) - 4k(x \longmapsto x)(x \longmapsto x^{k-1}) \\ &= k(k-1)(x \longmapsto x^{k-2}) - 4k(x \longmapsto x^k). \end{aligned}$$

Dès lors, on vient de montrer que :

$$\boxed{f(x \longmapsto 1) = 0, \quad f(x \longmapsto x) = -4(x \longmapsto x).}$$

$$\boxed{\forall k \in \{2, ..., n\}, \quad f(x \longmapsto x^k) = k(k-1)(x \longmapsto x^{k-2}) - 4k(x \longmapsto x^k).}$$

(c) D'après la question précédente, la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -4 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -8 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -4n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ de } f \text{ dans la base canonique de } \mathbb{R}_n[x] \text{ est triangulaire.}}$$

(d) Montrons que, si P est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors : $\lambda = -4\deg(P)$. Pour ce faire, on considère un polynôme P de $\mathbb{R}_n[x]$, de la forme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r$, avec $a_r \neq 0$ et $\deg(P) = r \leq n$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(P)(x) &= (x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r)'' - 4(x \longmapsto x)(x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r)' \\ &= 2a_2 + ... + r(r-1)a_r(x \longmapsto x^{r-2}) - 4(x \longmapsto x)(x \longmapsto a_1 + ... + ra_r x^{r-1}) \\ &= 2a_2 + ... + r(r-1)a_r(x \longmapsto x^{r-2}) - 4a_1(x \longmapsto x) - ... - 4ra_r(x \longmapsto x^r) \\ &= 2a_2 - 4a_1(x \longmapsto x) - ... - 4ra_r(x \longmapsto x^r). \end{aligned}$$

Si P est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors $f(P) = \lambda P$, et donc on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2a_2 - 4a_1 x - ... - 4ra_r x^r = \lambda(a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r).$$

En identifiant les termes de plus haut degré, on trouve que $-4ra_r = \lambda a_r$. Mais comme $a_r \neq 0$, on obtient que $-4r = \lambda$, et donc :

$$\boxed{\text{si } P \text{ est un vecteur propre de } f \text{ associé à } \lambda, \text{ alors : } \lambda = -4\deg(P).}$$

(e) Montrons qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n, de degré n, tel que : $f(H_n) = -4nH_n$. D'après la question (1)(c), la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire supérieure, avec $-4n$ comme dernier coefficient diagonal. Donc $-4n$ est valeur propre de f, et il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$, non nul, tel que $f(P) = -4nP$. D'après la question (1)(d), le polynôme P est de degré n, et il s'écrit donc sous la forme $P : x \longmapsto a_0 + ... + a_n x^n$, avec $a_n \neq 0$. Quitte à remplacer P par P/a_n, on peut supposer que P est unitaire. Dès lors, il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $f(P) = -4nP$. Reste à montrer que P est unique. Soient P, Q deux polynômes unitaires de $\mathbb{R}_n[x]$ tels que $f(P) = -4nP$ et $f(Q) = -4nQ$. Comme P, Q sont unitaires de degré n, $P - Q$ est de degré $\leq n - 1$. Mais comme $f(P - Q) = -4n(P - Q)$ par linéarité de f, la question (1)(d) entraine que $P - Q$ ne peut être non nul (sinon $P - Q$ serait un vecteur propre de f pour la valeur propre $-4n$, ce qui est absurde car $P - Q$ est de degré $< n$). Dès lors, on a $P - Q = 0$ et $P = Q$, d'où l'unicité. Par conséquent :

$$\boxed{\text{il existe un unique polynôme unitaire } H_n, \text{ de degré } n, \text{ tel que : } f(H_n) = -4nH_n.}$$

(2) (a) Montrons que : $\forall n \geq 1,\ f(H_n') = -4(n-1)H_n'$. Si l'on dérive la relation "$f(H_n) = -4nH_n$", alors on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(f(H_n))'(x) &= ((H_n)''(x) - 4(x \longmapsto x)H_n')'(x) \\
&= H_n'''(x) - 4H_n'(x) - 4xH_n''(x) \\
&= (-4nH_n)'(x) = -4nH_n'(x).
\end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que $H_n'''(x) - 4xH_n''(x) = (H_n')''(x) - 4x(H_n')'(x) = -4(n-1)H_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\boxed{f(H_n') = -4(n-1)H_n'.}$$

(b) Montrons d'abord que : $\forall n \geq 1,\ H_n' = nH_{n-1}$. Comme H_n est unitaire de degré n pour tout $n \geq 1$, on voit que H_n' est de degré $(n-1)$, et que son coefficient dominant est égal à n. Dès lors, le polynôme H_n'/n est unitaire de degré $(n-1)$. De plus, d'après la question (2)(a) et par linéarité de f, on trouve que :

$$f\left(\frac{H_n'}{n}\right) = \frac{1}{n}f(H_n') = -4(n-1)\frac{H_n'}{n}.$$

D'après la question (1)(e), il s'ensuit par unicité que $H_n'/n = H_{n-1}$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ H_n' = nH_{n-1}.}$$

A présent, montrons que : $\forall n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $H_n(x) - xH_{n-1}(x) + \frac{(n-1)}{4}H_{n-2}(x) = 0$. Partant de la relation $f(H_n) = -4nH_n$ et de la définition de f, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(H_n)(x) = H_n''(x) - 4xH_n'(x) = -4nH_n(x),$$

et donc $H_n''(x) - 4xH_n'(x) + 4nH_n(x) = 0$. Comme $H_n'(x) = nH_{n-1}(x)$ pour tout $n \geq 1$, il s'ensuit que $H_n''(x) = n(n-1)H_{n-2}(x)$ pour tout $n \geq 2$, et donc on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_n''(x) - 4xH_n'(x) + 4nH_n(x) = n(n-1)H_{n-2}(x) - 4nxH_{n-1}(x) + 4nH_n(x) = 0.$$

En divisant cette relation par $4n$, on en déduit que, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{H_n(x) - xH_{n-1}(x) + \frac{(n-1)}{4}H_{n-2}(x) = 0.}$$

(c) Justifions que $H_0 : x \longmapsto 1$ et $H_1 : x \longmapsto x$. Tout d'abord, on peut commencer par remarquer que le polynôme $x \longmapsto 1$ est unitaire de degré 0. De plus, par des calculs simples, on trouve que :

$$f(x \longmapsto 1) = (x \longmapsto 1)'' - 4(x \longmapsto x)(x \longmapsto 1)' = (x \longmapsto 0) = -4 \times 0(x \longmapsto 0).$$

Comme H_0 est unitaire de degré 0 et que $f(H_0) = -4 \times 0 \times H_0$, il s'ensuit par unicité que :

$$\boxed{H_0 : x \longmapsto 1.}$$

En outre, on voit que $(x \longmapsto x)$ est unitaire de degré 1 et de plus :

$$f(x \longmapsto x) = (x \longmapsto x)'' - 4(x \longmapsto x)(x \longmapsto x)' = -4(x \longmapsto x) = -4 \times 1 \times (x \longmapsto x).$$

Comme H_1 est unitaire de degré 1 et que $f(H_1) = -4 \times 1 \times H_1$, il s'ensuit par unicité que :

$$\boxed{H_1 : x \longmapsto x.}$$

A présent, calculons H_2 et H_3. D'après la question $(2)(b)$, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_2(x) = xH_1(x) - \frac{(2-1)}{4}H_0(x) = x^2 - \frac{1}{4}.$$

Toujours d'après la question $(2)(b)$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_3(x) = xH_2(x) - \frac{(3-1)}{4}H_1(x) = x^3 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x = x^3 - \frac{3}{4}x.$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{H_2 : x \longmapsto x^2 - \frac{1}{4} \text{ et } H_3 : x \longmapsto x^3 - \frac{3}{4}x.}$$

(d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} - \frac{(n-1)}{4}u_{n-2}$. Pour écrire une fonction en Python permettant de calculer u_n, on procède comme suit :

```
def suite(n):
    if n==0:
        return 1
    elif n==1:
        return 1
    else:
        return suite(n-1)+(n-1)*suite(n-2)/4
```