TRAVAUX DIRIGÉS : PRODUIT SCALAIRE - ESPACES EUCLIDIENS

1. Formes bilinéaires et produits scalaires

Exercice 1. Déterminer si φ est une forme bilinéaire sur E et si oui, déterminer si elle est symétrique, définie, positive, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $E=\mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))=4x_1y_1-x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$.
(2) $E=\mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2$.
(3) $E=\mathbb{R}^2$, $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+2x_2y_2$.
(4) $E=\mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=x_1y_1+2x_1y_2+3x_3y_3$.
(5) $E=\mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=x_1y_1-x_2y_2+x_3y_3$.
(6) $E=\mathbb{R}^3$, $\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2+x_3y_3$.

Exercice 2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit E l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{R}_n[x]$ tels que $P(0)=P(1)=0$, et soit φ l'application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(P,Q)\in E\times E$ par : $\varphi(P,Q)=-\int_0^1 P(t)Q''(t)dt$.

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
(2) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
(3) Expliciter la norme euclidienne associée.

Exercice 3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Etablir que : $n^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)^2\leq\dfrac{n^2(n+1)}{2}$ (*indication : utiliser Cauchy-Schwarz).*

Exercice 4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer les vecteurs $(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $x_1^2+...+x_n^2=x_1+...+x_n=n$.

Exercice 5. Montrer que, pour tout $f\in\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a : $\left|\int_0^1\dfrac{f(t)}{1+t^2}dt\right|\leq\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\int_0^1\dfrac{f^2(t)}{1+t^2}dt}$. Cas d'égalité?

Exercice 6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soient $a_0,...,a_n$ des réels quelconques et posons $E=\mathbb{R}_n[x]$. Montrer que l'application $\varphi: E\times E\longrightarrow\mathbb{R}$, $(P,Q)\longmapsto\sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 7. (HEC 2010) Soit n un entier ≥ 2, et soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et ${}^tAA$ ont même rang (*indication : comparer les noyaux des endomorphismes f et g canoniquement associés à A et ${}^tAA$*).

Exercice 8. (HEC 2021) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et admettant une espérance. Montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance, puis établir que $E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)\geq 1$. Etudier le cas d'égalité.

2. Orthogonalité

Exercice 9. Pour tout $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, on pose : $q(x)=2x_1^2+x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3$.

(1) Déterminer un produit scalaire φ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}^3$, $q(x)=\varphi(x,x)$.
(2) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique pour trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. Soit $Q:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ par : $Q(x)=2x_1^2+5x_2^2-2x_1x_2$.

(1) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}^2$, on a : $Q(x)\geq 0$.
(2) Pour tout $x\in\mathbb{R}^2$, on pose $N(x)=\sqrt{Q(x)}$. Montrer que N est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
(3) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ pour le produit scalaire associé à N.

Exercice 11. On pose $E=\mathbb{R}_2[x]$ et $\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)dt$ pour tout $(P,Q)\in\mathbb{R}_2[x]^2$.

(1) Vérifier que φ définit un produit scalaire sur E.
(2) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique pour trouver une base orthonormée de E.

Exercice 12. La famille $((1,1,1),(1,-2,1),(1,0,-1))$ est-elle une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$? Si oui, est-elle orthonormale? Mêmes questions pour la famille $((0,1,1),(0,-1,1),(1,1,0))$.

Exercice 13. (Polynômes d'interpolation de Lagrange) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ et soient $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts. On désigne par φ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$, définie pour tout $(P,Q) \in E^2$ par $\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^n P(x_i)Q(x_i)$. Enfin, pour tout $i \in \{0,...,n\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$L_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right).$$

(1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
(2) Montrer que, pour tout $(i,j) \in \{0,...,n\}^2$, on a : $L_i(x_j) = 1$ si $i = j$ et $L_i(x_j) = 0$ sinon.
(3) En déduire que la famille $(L_0, ..., L_n)$ est une base orthonormée de E pour φ.
(4) Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P \in E$ dans cette base.

Exercice 14. (Polynômes de Tchebychev - ESCP 2016) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 : x \longmapsto 1$, $T_1 : x \longmapsto x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

(1) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est de degré n et de coefficient dominant que l'on explicitera.
    (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
    (c) En déduire les racines de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(2) Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(pt)\cos(qt)dt$.
    (a) Montrer que, pour tous réels a, b, on a : $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$.
    (b) Calculer $I_{p,q}$ (*indication : on distinguera les cas "$p \neq q$", "$p = q \neq 0$" et "$p = q = 0$"*).
(3) Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$, on pose : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
    (a) Montrer que l'intégrale $\langle P, Q\rangle$ converge pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[x]^2$.
    (b) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.
    (c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(T_0, ..., T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$. Est-elle orthonormale?
    (d) Calculer $\langle x \longmapsto x^n, T_n\rangle$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (*indication : utiliser* (1)(*a*) *et* (3)(*c*)).

3. Espaces euclidiens

Exercice 15. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Montrer que la matrice du produit scalaire dans une base quelconque est toujours inversible.

Exercice 16. Soit E un espace euclidien, et soient F, G des sous-espaces vectoriels de E.
(1) Montrer que, si $F \subset G$, alors on a : $G^\perp \subset F^\perp$.
(2) Etablir l'égalité suivante : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
(3) Montrer que, si F et G sont supplémentaires dans E, alors $F^\perp$ et $G^\perp$ le sont aussi.

Exercice 17. Déterminer une base de l'orthogonal de F dans E, et ce dans chacun des cas suivants :
(1) $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \mathrm{Vect}((1,2,0))$.
(2) $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \mathrm{Vect}((1,1,1),(2,1,-1))$.
(3) $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - 2y + z = 0\}$.
(4) $E = \mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$ et $F = \{P \in E |\ P(-1) = 0\}$.
(5) $E = \mathbb{R}_3[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ et $F = \mathrm{Vect}(x \longmapsto x, x \longmapsto x^2+1)$.

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$, et soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k\rangle)^2$.
(1) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthonormée de E.
(2) Calculer la norme de $x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k$ pour tout $x \in E$.
(3) En déduire que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 19. Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_3[x]^2$, on pose : $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^3 P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.
(1) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[x]$.
(2) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[x]$, puis vérifier que $P : x \longmapsto (x-1)^3$ appartient à $\mathbb{R}_2[x]^\perp$.

Exercice 20. (Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que ${}^tA = A$. De même, on désigne par $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que ${}^tA = -A$. Enfin, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

(1) Exprimer $\varphi(A, B)$ à l'aide des coefficients de A et de B.
(2) Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(3) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $|\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n}\|A\|$.
(4) Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux pour φ.

Exercice 21. Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$. Soient $e_1, ..., e_n$ des vecteurs unitaires de E tels que $\|e_i - e_j\| = 1$ si $i \neq j$.

(1) Calculer $\langle e_i, e_j\rangle$ pour tous i, j.
(2) Montrer que la matrice $A = (\langle e_i, e_j\rangle)$ est inversible.
(3) En déduire que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre.

Exercice 22. (QSP ESCP 2010) Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$. Soient $e_1, ..., e_{n+1}$ des vecteurs de E pour lesquels $\langle e_i, e_j\rangle < 0$ pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n + 1\}^2$ tel que $i \neq j$.

(1) Montrer que, si $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0$, alors $v = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| e_k = 0$ (*indication : comparer* $\|u\|$ *et* $\|v\|$).
(2) Montrer que toute sous-famille de n vecteurs de $(e_1, ..., e_{n+1})$ est une base de E.

Exercice 23. (QSP HEC 2012) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, et soit $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$. Exprimer ${}^tP$ en fonction de P, puis établir l'inégalité :

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\right| \leq n.$$

Exercice 24. (Polynômes de Laguerre - ESCP 2014) Soit $E = \mathbb{R}[x]$. Pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

(1) (a) Montrer que, pour tous $P, Q \in E$, l'intégrale $\varphi(P, Q)$ converge.
(b) Montrer que φ est un produit scalaire sur E, que l'on notera $\langle\ ,\ \rangle$ par la suite.
(2) Pour tout $P \in E$, on pose $\psi(P) : t \longmapsto te^{-t}P'(t)$ et $U(P) : t \longmapsto e^t[\psi(P)]'(t)$.
(a) Montrer que $U(P)$ appartient à E pour tout $P \in E$, puis que U est un endomorphisme de E.
(b) Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$, on a : $\langle U(P), Q\rangle = \langle P, U(Q)\rangle$.
(3) (a) Soit $n \geq 2$. Montrer que la restriction de U à $\mathbb{R}_n[x]$ induit un endomorphisme U_n de $\mathbb{R}_n[x]$.
(b) Déterminer les valeurs propres de U_n. L'endomorphisme U_n est-il diagonalisable?
(4) Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $f_k : t \longmapsto e^{-t}t^k$ et $P_k : t \longmapsto e^t f_k^{(k)}(t)$.
(a) Expliciter $P_k(t)$ (*indication : utiliser la formule de Leibniz*).
(b) Montrer que P_k est un vecteur propre de U_n et déterminer la valeur propre associée.

4. Exercices supplémentaires

Exercice 25. Soient $x_1, ..., x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 + ... + x_n = 1$.

(1) Montrer l'inégalité : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$.
(2) Dans quels cas a-t-on égalité?

Exercice 26. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et soit φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(f, g) \in E \times E$ par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(1) Vérifier que φ définit un produit scalaire sur E.
(2) Montrer que, si $f, g \in E$ et si $f, g, fg - 1$ sont positives sur $[0, 1]$, alors :

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right) \geq 1.$$

Exercice 27. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et soient $u_1, ..., u_n$ des vecteurs de E tels que : $\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 < 1$.

(1) Montrer que, pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :
$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \|u_k\|^2 \right)$$
(*indication : utiliser l'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz*).

(2) En déduire que la famille $(e_1 + u_1, ..., e_n + u_n)$ est une base de E.

Exercice 28. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x]^2$, on pose $\varphi(P, Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.

(1) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
(2) Calculer $a_{i,j} = \varphi(x \longmapsto x^i, x \longmapsto x^j)$ pour tout $(i, j) \in [\![0, 2]\!]^2$.
(3) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour φ.
(4) Montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}(x \longmapsto 1 + x, x \longmapsto 1 - x^2)$ et $G = \mathrm{Vect}(x \longmapsto x - x^2)$ sont orthogonaux pour φ.

Exercice 29. Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[x]^2$, on pose $\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P'(x)Q'(x)dx$.

(1) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[x]$.
(2) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$ pour φ.
(3) Déterminer une base de l'orthogonal de $F = \mathrm{Vect}(x \longmapsto x^2)$ pour φ.

Exercice 30. Calculer une base de l'orthogonal de F dans E, et ce dans chacun des cas suivants :

(1) $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 0\}$.
(2) $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et $F = \mathrm{Vect}\left((1, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 0)\right)$.
(3) $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 |\ x + y + z + t = x + 2y + 3z + 2t = 0\}$.
(4) $E = \mathbb{R}_2[x]$ muni du produit scalaire $\langle x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2, x \longmapsto b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \rangle = \sum_{k=0}^2 a_k b_k$ et $F = \{P \in E |\ P(1) = 0\}$.

Exercice 31. **(Polynômes de Legendre)** Soit $E = \mathbb{R}[x]$. Pour tous $P, Q \in E$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ème polynôme de Legendre par :
$$L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}, \quad \text{où :} \quad U_n : x \longmapsto (x^2 - 1)^n.$$

(1) (a) Calculer les polynômes L_0, L_1, L_2.
  (b) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (c) En déduire que la famille $(L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
(2) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E.
(3) Soient P et Q deux éléments de E.
  (a) Montrer que, si $P(-1) = P(1) = 0$, alors $\langle P', Q \rangle = -\langle P, Q' \rangle$.
  (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si -1 et 1 sont racines d'ordre $\geq k$ de P, alors $\langle P^{(k)}, Q \rangle = (-1)^k \langle P, Q^{(k)} \rangle$.
(4) (a) A l'aide de la question (3), montrer que, pour tout $m \geq 1$, le polynôme L_m est orthogonal à $\mathbb{R}_{m-1}[x]$.
  (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, ..., L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.

Exercice 32. **(Fonctions de carré intégrable)** Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt$ converge.

(1) Soient f et g deux éléments de E.
  (a) Montrer que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a : $2|f(t)g(t)| \leq f^2(t) + g^2(t)$.
  (b) En déduire que l'intégrale $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ converge absolument.
  (c) En déduire que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
(3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_k(x) = e^{-kx}$.
  (a) Justifier que f_k appartient à E pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
  (b) Calculer $\langle f_k, f_l \rangle$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$.
  (c) Déterminer une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ pour $\langle\ ,\ \rangle$.

Exercice 33. (Suites de carré sommable) Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum u_n^2$ converge. On désigne par F l'ensemble des suites de $l^2(\mathbb{N})$ qui sont nulles à partir d'un certain rang. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on désigne par e_i la suite dont le terme d'indice i est égal à 1 et dont tous les autres termes sont nuls.

(1) (a) Vérifier que, pour tous réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $2|ab| \leq a^2+b^2$, et en déduire que $|a+b|^2 \leq 2a^2+2b^2$.
(b) En déduire que, pour tous $(u_n),(v_n) \in l^2(\mathbb{N})$, la série $\sum |u_n v_n|$ converge.
(c) En déduire que $l^2(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour tous $u=(u_n)$ et $v=(v_n)$ appartenant à $l^2(\mathbb{N})$, on pose : $\varphi(u,v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.
(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{N})$.
(b) Vérifier que e_i appartient à F pour tout $i \in \mathbb{N}$, et en déduire que F n'est pas de dimension finie.
(c) Montrer que tout élément de F est combinaison linéaire d'un nombre fini des e_i.
(d) Déterminer l'orthogonal $F^\perp$ de F dans $l^2(\mathbb{N})$, vérifier que $F \oplus F^\perp \neq l^2(\mathbb{N})$ puis déterminer $(F^\perp)^\perp$.

Exercice 34. (EDHEC 2013) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge. Dans cet exercice, on va prouver que la série de terme général $u_n = \frac{n}{a_1+\ldots+a_n}$ converge et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}. \quad (*)$$

(1) Etude d'un exemple : on pose $a_n = n(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Vérifier que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer u_n en fonction de n.
(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et donner sa somme. Retrouver l'inégalité $(*)$.

(2) Etude d'un deuxième exemple : on pose $a_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche $n!$.
(b) En déduire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, calculer et affiche u_n.
(c) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge.
(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \leq \dfrac{1}{(n-1)!}$.
(e) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et que, de plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

(3) (a) A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 \leq (a_1+\ldots+a_n)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

(b) A l'aide du résultat précédent, établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{2n+1}{a_1+\ldots+a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}.$$

(c) En déduire par sommation que, pour tout $N \geq 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+\ldots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{a_k}.$$

(d) Montrer enfin que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{a_1+\ldots+a_n}$ converge, puis établir l'inégalité $(*)$ demandée.

Exercice 35. (ESCP 2016) Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle , \rangle$ et la norme $\| \ \|$. Etant donné un réel $\mu \geq 1$, on dit qu'une famille $(u_1,\ldots,u_n)$ de E est *μ-presque orthogonale* si tous les vecteurs u_i sont de norme 1 et si, pour tout $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right\|^2 \leq \mu\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

(1) Montrer que toute famille μ-presque orthogonale $(u_1, ..., u_n)$ de E est libre.
(2) Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de E. Montrer que $(u_1, ..., u_n)$ est 1-presque orthogonale si et seulement si elle est orthonormale (*indication : pour l'une des implications, s'intéresser au vecteur* $u_i + u_j$ *avec* $i \neq j$).
(3) Soit f un endomorphisme de E.
   (a) Montrer qu'il existe un réel $k \geq 0$ tel que : $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.
   (b) Montrer que, si f est un automorphisme de E, alors il existe un réel $\lambda > 0$ tel que :
$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{\lambda}\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda\|x\|.$$
(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de E. Montrer l'existence d'un réel $\mu \geq 1$ pour lequel la famille $(u_1, ..., u_n)$ est μ-presque orthogonale.

Exercice 36. (Contraction d'un espace euclidien - ESCP 2019) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^p$ du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme associée notée $\|\ \|$. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Un tel endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ est appelé *une contraction. Par la suite, on dira qu'une suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de vecteurs de* $\mathbb{R}^p$ *converge vers* $z \in \mathbb{R}^p$*, et l'on notera* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$*, si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \|z_n - z\| = 0$.

(1) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) \cap \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^p$ tel que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad y = \frac{1}{k}[u^k(x) - x]. \quad (*)$$
(*indication : partant d'un vecteur* $x \in E$ *tel que* $y = u(x) - x$*, établir l'égalité* $(*)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$).
(2) En déduire que $\ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) \cap \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) = \{0\}$.
(3) Conclure que $\mathbb{R}^p = \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p}) \oplus \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$.
(4) (a) Soit $y \in \ker(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$. Etudier la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y)\right)_{n\geq 1}$.
   (b) Soit $y \in \mathfrak{Im}(u - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^p})$. Etudier la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y)\right)_{n\geq 1}$ (*indication : partant d'un vecteur* $x \in E$ *tel que* $y = u(x) - x$*, utiliser le fait que* $u^k(y) = u^{k+1}(x) - u^k(x)$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$).
   (c) En déduire que, pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) = p(y)$, où p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ que l'on caractérisera.

Exercice 37. (HEC 2021) Soit E un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme $\|\ \|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E.
(1) Question de cours : énoncer le théorème de Pythagore.
(2) Soit $(x, y) \in E^2$. Exprimer $\langle x, y\rangle$ à l'aide de $\|x + y\|^2$ et de $\|x - y\|^2$.
(3) Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi donnée par :
$$P([X_1 = 1]) = P([X_1 = -1]) = \frac{1}{2}.$$
On pose $U = X_1v_1 + ... + X_nv_n$. Calculer l'espérance de $\|U\|^2$.
(4) En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\varepsilon_1 v_1 + ... + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$.
(5) A l'aide de la question (2), montrer que la famille $\mathcal{F}$ est orthogonale si et seulement si :
$$\forall(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + ... + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$
(6) Montrer que, si $\mathcal{F}$ n'est pas orthogonale, il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que :
$$\|\varepsilon_1 v_1 + ... + \varepsilon_n v_n\| > \sqrt{n}.$$

Exercice 38. (QSP ESCP 2023) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On considère deux sous-espaces vectoriels F, G de E tels que :
$$(1)\ F \cap G = \{0\}, \quad (2)\ F \cap G^\perp = \{0\}, \quad (3)\ F^\perp \cap G = \{0\}, \quad (4)\ F^\perp \cap G^\perp = \{0\}.$$
(1) Pour $n = 2$, donner un exemple de 2 sous-espaces F, G vérifiant ces 4 conditions.
(2) Dans le cas général, montrer que n est pair et donner un exemple de deux tels sous-espaces.