**Lycée Clemenceau** **Jeudi 18 décembre 2025**
**ECG 2** **Durée : 4 heures**

# Devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 4$ (type EDHEC)

***Remarques :*** *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits.*

**Exercice 1.** Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $r > 1$, un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 2$, trace la courbe représentative de la fonction $f_n : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^\alpha x^k$ sur l'intervalle $[0, r]$.

**Exercice 2.** Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $r$ compris strictement entre 1 et $\dfrac{\pi^2}{6}$, détermine le plus petit entier $n \geq 1$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq r.$$

**Exercice 3.** Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, calcule la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{1}{kl}.$$

**Exercice 4.** On rappelle qu'une matrice carrée $A$ de taille 2 à coefficients réels est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Ecrire une fonction en Python qui, étant donnée une matrice carrée $A$ de taille 2, détermine si la matrice $A$ est inversible ou non et si oui, affiche son inverse.

**Exercice 5.** Dans cet exercice, $E$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par $\Delta$ l'application qui, à toute fonction $f$ de $E$, associe la fonction $\Delta(f) = g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $E$.
(2) (a) Vérifier que, pour tout $f \in E$, la fonction $\Delta(f)$ est dérivable.
  (b) En déduire que l'endomorphisme $\Delta$ n'est pas surjectif.
(3) Montrer que l'endomorphisme $\Delta$ est injectif.
(4) On suppose dans cette question que $\Delta$ possède une valeur propre $\lambda \neq 0$, et on désigne par $f$ un vecteur propre de $\Delta$ associé à $\lambda$.
  (a) Montrer que la fonction $h : x \longmapsto f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$ est constante sur $\mathbb{R}$.
  (b) Déterminer alors la fonction $\Delta(f)$.
  (c) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $a > 0$, trace la courbe de la fonction $f_a : x \longmapsto a(e^{\frac{x}{a}} - 1)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
(5) Conclure à l'aide des questions précédentes que $\Delta$ n'a aucune valeur propre.
(6) Pour toute fonction $f \in E$, on pose $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \Delta(F_{n-1})$.
  (a) Montrer que la fonction $F_n$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.
  (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt.$

**Exercice 6.** Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et soit $u$ un endomorphisme de $E$. On désigne par $I$ l'endomorphisme identité de $E$. Si $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p$ est un élément de $\mathbb{R}[x]$, on rappelle que $P(u) = a_0 I + a_1 u + ... + a_p u^p$. Dans tout la suite de l'exercice, $Q$ désigne un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi on peut écrire que $Q : x \longmapsto (x-1)Q_1(x)$ avec $Q_1(1) \neq 0$.

(1) Montrer que l'image de $(u - I)$ est contenue dans $\ker(Q_1(u))$.
(2) On pose $E_1 = \ker(u - I)$.
  (a) Montrer que, si $x$ appartient à $E_1$, alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1).x$.
  (b) En déduire que $E_1 \cap \ker(Q_1(u)) = \{0_E\}$.
  (c) En déduire à l'aide du théorème du rang que $E = E_1 \oplus \ker(Q_1(u))$.
(3) Montrer que $Q_1(u) = 0$ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $u$.

(4) On suppose dans cette question que $Q : x \longmapsto (x-1)(x+1)^2$, que $E$ est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de $u$; on note $E_1$ l'espace propre de $u$ associé à la valeur propre 1. Montrer que, si la dimension de $E_1$ est $\geq 2$, alors $u$ est diagonalisable (*on distinguera les cas* $\dim E_1 = 2$ *et* $\dim E_1 = 3$).

**Exercice 7.** Soit $n$ un entier $\geq 2$ et soit $A$ une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que la trace d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Tr}(B)$, est la somme des éléments diagonaux de $B$, et l'on considère l'application $f$ définie pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A.$$

(1) Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Montrer que $f$ n'est pas l'endomorphisme nul (*on distinguera les cas* $\mathrm{Tr}(A) = 0$ *et* $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$).
(3) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnée une matrice carrée $M$ de taille $n$ quelconque, calcule et affiche sa trace.
(4) En déduire une fonction en Python qui, étant donnée deux matrices carrées $A$ et $M$ de même taille $n$ quelconque, calcule et affiche la matrice $f(M)$.
(5) (a) Etablir que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)f(M)$.
 (b) Donner les valeurs propres possibles de $f$.
(6) Montrer que 0 est valeur propre de $f$.
(7) Montrer que, si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $f$ n'est pas diagonalisable.
(8) On suppose dans cette question que la trace de $A$ est non nulle.
 (a) Quelle est la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$? Justifier.
 (b) Conclure que $f$ est diagonalisable.

**Problème 1. (EDHEC)**
**Partie I**
Dans cette partie , la lettre $r$ désigne un entier naturel et $x$ est un réel fixé de $]0,1[$.

(1) (a) Montrer que, lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$, on a : $\displaystyle\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$.
 (b) Donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n$.
 (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_n \binom{n}{r} x^n$ est convergente.
(2) Pour tout entier naturel $r$, on pose $\displaystyle S_r = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n$.
 (a) Donner la valeur de $S_0$.
 (b) A l'aide de la formule du triangle de Pascal, établir que $(1-x)S_{r+1} = xS_r$.
 (c) En déduire que, pour tout $x \in [0,1[$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.
 (d) Donner enfin la valeur de $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$.

**Partie II**
On désigne par $\alpha$ et $p$ deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches. Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité $\alpha$ de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif) et une probabilité $(1-\alpha)$ d'y être autorisé, et ce indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité $p$ et il perd un euro avec la probabilité $(1-p)$. Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié et on suppose que les manches jouées sont jouées de façon indépendante. On note :

- $X$ le nombre de manches auquelles a participé ce joueur avant d'être disqualifié.
- $Y$ le nombre de manches gagnées par ce joueur.
- $G$ le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que $X, Y, G$ sont des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) (a) Donner la loi de $X$ (on pourra noter $D_k$ l'événement "le joueur ne joue pas la $k$-ème manche").
 (b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de $T$ et en déduire que : $E(X) = \dfrac{1-\alpha}{\alpha}$.
 (c) En déduire également la valeur de $V(X)$.
(2) (a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de $Y$ conditionnellement à l'événement $[X = n]$.
 (b) En déduire, à l'aide de la partie I, la loi de $Y$.

(3) Calculer l'espérance de $Y$, puis montrer que : $V(Y) = \dfrac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}$.

(4) (a) Exprimer $G$ en fonction de $X$ et $Y$.
(b) En déduire l'espérance de $G$.
(c) On admet l'existence de $E(XY)$. A l'aide de la question 2)$a$) et de la formule de l'espérance totale, établir que :

$$E(XY) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.$$

(d) En déduire la variance de $G$.