Lycée Clemenceau **Jeudi 18 décembre 2025**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques n^o4

Corrigé de l'exercice 1. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un réel $r > 1$, un réel $\alpha > 0$ et un entier $n \geq 2$, trace la courbe représentative de la fonction $f_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} k^\alpha x^k$ sur l'intervalle $[0, r]$. Pour ce faire, on va procéder comme suit :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def courbe(r,a,n):
    x=np.linspace(0,r,500)
    y=np.zeros(500)
    for i in range(n):
        y=y+((i**a)*(x**k))
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```

Corrigé de l'exercice 2. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un réel r compris strictement entre 1 et $\dfrac{\pi^2}{6}$, détermine le plus petit entier $n \geq 1$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq r.$$

Pour ce faire, on va commencer par calculer les différentes valeurs de la somme de gauche ci-dessus lorsque n croît, en vérifiant à chaque fois si cette somme est $\geq r$ ou non. Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np

def pluspetitentier(r):
    s=0
    n=1
    while s<r:
        s=s+(1/(n**2))
        n=n+1
    return n
```

Corrigé de l'exercice 3. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, calcule la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{1}{kl}.$$

Pour ce faire, on procèdera à l'aide de deux boucles `for` (en tenant compte du décalage sur les indices) et d'un test `if` comme suit :

```
import numpy as np

def somme(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        for l in range(k,n+1):
            s=s+(1/(k*l))
    return s
```

Corrigé de l'exercice 4. On rappelle qu'une matrice carrée A de taille 2 à coefficients réels est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donnée une matrice carrée A de taille 2, détermine si la matrice A est inversible ou non et si oui, affiche son inverse. Pour ce faire, on va d'abord calculer le déterminant de la matrice A. Ensuite, on utilisera un test `if` pour afficher un

message sur l'inversibilité ou non de la matrice A et donner l'inverse de A si cette dernière est inversible. On pourra pour cela importer la bibilothèque `numpy.linalg`. Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def determine(a):
    d=a[0,0]*a[1,1] -a[1,0]*a[0,1]
    if d==0:
        print("la matrice n est pas inversible")
    else:
        print("la matrice est inversible")
        b=al.inv(a)
        return b
```

Corrigé de l'exercice 5. Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On désigne par Δ l'application qui, à toute fonction f de E, associe la fonction $\Delta(f) = g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

(1) Montrons que Δ est un endomorphisme de E. Comme tout élément f de E est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $g = \Delta(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, on voit que $\Delta(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et donc Δ envoie tout élément de E sur un élément de E. Reste à vérifier que Δ est linéaire. Soient f_1, f_2 des éléments de E et soient λ_1, λ_2 des réels. Par linéarité de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= \int_0^x (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)dt \\
&= \lambda_1 \int_0^x f_1(t)dt + \lambda_2 \int_0^x f_2(t)dt \\
&= \lambda_1 \Delta(f_1)(x) + \lambda_2 \Delta(f_2)(x),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\Delta(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Delta(f_1) + \lambda_2 \Delta(f_2)$, et donc Δ est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

(2) (a) Vérifions que, pour tout $f \in E$, la fonction $\Delta(f)$ est dérivable. Comme tout élément f de E est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $g = \Delta(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, on voit que, pour tout $f \in E$:

$$\boxed{\text{la fonction } \Delta(f) \text{ est dérivable.}}$$

(b) Montrons que l'endomorphisme Δ n'est pas surjectif. Si l'on pose $h(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on sait d'après le cours que la fonction h est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas dérivable en 0. En particulier, la fonction h appartient à E mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc elle ne peut pas appartenir à l'image de Δ. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta \text{ n'est pas surjectif.}}$$

(3) Montrons que l'endomorphisme Δ est injectif. Pour ce faire, il suffit de vérifier que $\ker(\Delta) = \{\theta\}$, où θ désigne la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Soit f un élément quelconque de $\ker(\Delta)$. Alors on voit par définition que $\Delta(f)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\Delta(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0, il s'ensuit par dérivation que $(\Delta(f))'(x) = f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $f = \theta$. Par conséquent, on en déduit que $\ker(\Delta) = \{\theta\}$, et donc :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta \text{ est injectif.}}$$

(4) On suppose dans cette question que Δ possède une valeur propre $\lambda \neq 0$, et on désigne par f un vecteur propre de Δ associé à λ.

(a) Montrons que la fonction $h : x \longmapsto f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$ est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $\Delta(f) = \lambda f$ par définition, on trouve par linéarité de Δ et vu que $\lambda \neq 0$ que :

$$f = \frac{\Delta(f)}{\lambda} = \Delta\left(\frac{f}{\lambda}\right).$$

En particulier, comme la fonction f appartient à l'image de Δ, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la question $(2)(a)$. Comme de plus $\Delta(f) = \lambda f$ et que la fonction $\Delta(f)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on obtient par dérivation que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\Delta(f))'(x) = f(x) = \lambda f'(x). \quad (*)$$

En outre, la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \left(f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}\right)' = f'(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda}f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} = \frac{\lambda f'(x) - f(x)}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Avec la relation $(*)$, il s'ensuit que $h'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est constante sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Déterminons la fonction $\Delta(f)$. D'après la question précédente, la fonction $h : x \longmapsto f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$ est constante sur $\mathbb{R}$. Dès lors, il existe un réel μ tel que $h(x) = f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}} = \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc $f(x) = \mu e^{\frac{x}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par intégration, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(f)(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \mu e^{\frac{t}{\lambda}}dt = \mu\lambda\left[e^{\frac{t}{\lambda}}\right]_0^x.$$

Par conséquent, il existe un réel μ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\Delta(f)(x) = \mu\lambda\left[e^{\frac{x}{\lambda}} - 1\right].}$$

(c) Pour écrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $a > 0$, trace la courbe de la fonction $f_a : x \longmapsto a(e^{\frac{x}{a}} - 1)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def tracecourbe(a):
    x=np.linspace(-1,1,500)
    y=a*(np.exp(x/a)-1)
    plt.plot(x,y)
    plt.show()
```

(5) Montrons à l'aide des questions précédentes que Δ n'a aucune valeur propre. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que Δ admet une valeur propre λ, et l'on désigne par f un vecteur propre de Δ associé à λ. Comme l'endomorphisme Δ est injectif d'après la question (3), 0 n'est pas valeur propre de Δ et donc $\lambda \neq 0$. Dès lors, on voit avec la question précédente qu'il existe un réel μ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(f)(x) = \mu\lambda\left[e^{\frac{x}{\lambda}} - 1\right].$$

Comme $\Delta(f) = \lambda f$ par hypothèse, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(f)(x) = \mu\lambda\left[e^{\frac{x}{\lambda}} - 1\right] = \lambda f(x) = \lambda\mu e^{\frac{x}{\lambda}}.$$

Par différence, il s'ensuit que $\mu\lambda = 0$, et donc $\mu = 0$ (vu que $\lambda \neq 0$). Mais alors la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$ (car $f(x) = \mu e^{\frac{x}{\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), ce qui contredit le fait que f soit un vecteur propre de Δ (vu qu'un vecteur propre n'est pas nul par définition). Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Delta \text{ n'a aucune valeur propre.}}$$

(6) Pour toute fonction $f \in E$, on pose $F_0 = \Delta(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \Delta(F_{n-1})$.

(a) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}F_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}\text{"}.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $F_0 = \Delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ d'après les arguments de la question $(2)(a)$. A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et montrons

que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, la fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $F_{n+1} = \Delta(F_n)$, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{n+1}(x) = \Delta(F_n)(x) = \int_0^x F_n(t)dt.$$

En particulier, la fonction F_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme primitive de la fonction F_n) et de plus $F'_{n+1} = F_n$. Mais comme F_n est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$, elle est $(n+1)$-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $(n+1)$-ème est continue sur $\mathbb{R}$, et donc la fonction F_{n+1} est $(n+2)$-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $(n+2)$-ème est continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, la fonction F_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $\mathbb{R}$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{la fonction } F_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^{n+1} \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt.$$

Pour ce faire, on se fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et l'on pose $F_{-1} = f$ par convention. Montrons par une récurrence finie la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$ par :

$$\mathcal{P}(k) : "F_n^{(k)} = F_{n-k}".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $F_n^{(0)} = F_n$ par définition. A présent, supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un certain $k \in [\![0, n]\!]$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $F_n^{(k)} = F_{n-k}$. Comme la fonction F_{n-k} est une primitive de F_{n-k-1} par construction, on voit que $F'_{n-k} = F_{n-k-1}$, ce qui entraine que :

$$F_n^{(k+1)} = \left(F_n^{(k)}\right)' = F'_{n-k} = F_{n-k-1},$$

et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \in [\![0, n+1]\!]$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$:

$$\boxed{F_n^{(k)} = F_{n-k}.}$$

En particulier, on obtient que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$F_n^{(k)}(0) = F_{n-k}(0) = \Delta(F_{n-k-1})(0) = \int_0^0 F_{n-k-1}(t)dt = 0.$$

Dès lors, on trouve avec la formule de Taylor avec reste intégral que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} F_n^{(n+1)}(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} 0 \times x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt.}$$

Corrigé de l'exercice 6. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et soit u un endomorphisme de E. On désigne par I l'endomorphisme identité de E. Si $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_p x^p$ est un élément de $\mathbb{R}[x]$, on rappelle que $P(u) = a_0 I + a_1 u + ... + a_p u^p$. Dans tout la suite de l'exercice, Q désigne un polynôme qui admet 1 pour racine simple et tel que $Q(u) = 0$. Ainsi on peut écrire que $Q(x) = (x-1)Q_1(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $Q_1(1) \neq 0$.

(1) Montrons que l'image de $(u - I)$ est contenue dans $\ker(Q_1(u))$. Pour ce faire, considérons un élément y de $\mathfrak{Im}(u - I)$. Par définition, il existe un élément z de E tel que $y = (u - I)(z)$. Comme $Q : x \longmapsto (x-1)Q_1(x)$ par hypothèse, on obtient d'après les propriétés des polynômes d'endomorphismes que :

$$Q_1(u)(y) = Q_1(u) \circ (u - I)(z) = Q(u)(z) = 0,$$

car Q est un polynôme annulateur de u. En particulier, on voit que y appartient à $\ker(Q_1(u))$ pour tout $y \in \mathfrak{Im}(u-I)$, ce qui entraine que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(u-I) \subset \ker(Q_1(u)).}$$

(2) On pose $E_1 = \ker(u-I)$.

(a) Montrons que, si x appartient à E_1, alors $Q_1(u)(x) = Q_1(1).x$. Pour ce faire, on procède à une distinction de cas. Si $x = 0_E$, alors on voit par linéarité de $Q_1(u)$ que :

$$Q_1(u)(x) = 0_E = Q_1(1).0_E = Q_1(1).x.$$

Si maintenant $x \neq 0_E$, alors on voit que x est un vecteur propre de u pour la valeur propre 1 et l'on sait d'après le cours que :

$$Q_1(u)(x) = Q_1(1).x.$$

Dans tous les cas, on en déduit que, si x appartient à E_1, alors :

$$\boxed{Q_1(u)(x) = Q_1(1).x.}$$

(b) Montrons que $E_1 \cap \ker(Q_1(u)) = \{0_E\}$. Pour ce faire, considérons un élément x de $E_1 \cap \ker(Q_1(u))$. Comme x appartient à E_1, on voit avec la question précédente que :

$$Q_1(u)(x) = Q_1(1).x.$$

Comme de plus x appartient à $\ker(Q_1(u))$, on voit que $Q_1(u)(x) = 0_E$, ce qui entraine que :

$$Q_1(1).x = 0_E.$$

Mais comme $Q_1(1) \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $x = 0_E$, et donc :

$$\boxed{E_1 \cap \ker(Q_1(u)) = \{0_E\}.}$$

(c) Montrons que $E = E_1 \oplus \ker(Q_1(u))$. D'après la question (1), on sait que $\mathfrak{Im}(u-I) \subset \ker(Q_1(u))$, ce qui entraine en passant aux dimensions que :

$$\dim \mathfrak{Im}(u-I) \leq \dim \ker(Q_1(u)).$$

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $(u-I)$, on voit que :

$$\dim E - \dim \ker(u-I) \leq \dim \ker(Q_1(u)).$$

En particulier, comme $E_1 = \ker(u-I)$, ceci implique que :

$$\dim E \leq \dim \ker(u-I) + \dim \ker(Q_1(u)) = \dim E_1 + \dim \ker(Q_1(u)).$$

Comme $E_1 \cap \ker(Q_1(u)) = \{0_E\}$ d'après la question précédente, les sous-espaces vectoriels E_1 et $\ker(Q_1(u))$ sont en somme directe, et donc :

$$\dim E \leq \dim(E_1 \oplus \ker(Q_1(u))). \quad (*)$$

En outre, comme $E_1 \oplus \dim \ker(Q_1(u))$ est un sous-espace vectoriel de E, on voit que :

$$\dim(E_1 \oplus \ker(Q_1(u))) \leq \dim E. \quad (**)$$

Dès lors, il s'ensuit avec les inégalités $(*)$ et $(**)$ que :

$$\dim(E_1 \oplus \ker(Q_1(u))) = \dim E.$$

Mais comme $E_1 \oplus \ker(Q_1(u))$ est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que :

$$\boxed{E = E_1 \oplus \ker(Q_1(u)).}$$

(3) Montrons que $Q_1(u) = 0$ si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de u. Pour ce faire, supposons tout d'abord que $Q_1(u) = 0$. Alors cela signifie que l'endomorphisme $Q_1(u)$ est identiquement nul sur E, et donc $E = \ker(Q_1(u))$. Mais comme E_1 et $\ker(Q_1(u))$ sont en somme directe d'après la question précédente, ceci entraine que :

$$E_1 \cap \ker(Q_1(u)) = E_1 \cap E = E_1 = \{0_E\}.$$

Comme $E_1 = \ker(u-I) = \{0_E\}$, il s'ensuit que 1 n'est pas valeur propre de u. Réciproquement, supposons que 1 ne soit pas valeur propre de u. Alors cela signifie que $E_1 = \ker(u-I) = \{0_E\}$, et donc on obtient avec la question précédente que :

$$E = E_1 \oplus \ker(Q_1(u)) = \{0_E\} \oplus \ker(Q_1(u)) = \ker(Q_1(u)).$$

Dès lors, il s'ensuit que $E = \ker(Q_1(u))$, et donc $Q_1(u)$ est identiquement nul sur E, ou en d'autres termes $Q_1(u) = 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{Q_1(u) = 0 \text{ si et seulement si } 1 \text{ n'est pas valeur propre de } u.}$$

(4) On suppose dans cette question que $Q : x \longmapsto (x-1)(x+1)^2$, que E est de dimension 3 et que 1 est valeur propre de u ; on note E_1 l'espace propre de u associé à la valeur propre 1. Montrons que, si la dimension de E_1 est ≥ 2, alors u est diagonalisable. Pour ce faire, on procède à une distinction de cas :

Premier cas : $\dim E_1 = 3$.

Dans ce cas, comme $E_1 \subset E$ et que $\dim E = 3$, on voit que $E = E_1 = \ker(u - I)$. En particulier, l'endomorphisme $(u - I)$ est identiquement nul sur E, ce qui entraine que $u = I$, et donc u est diagonalisable (vu que toute base de E est une base de vecteurs propres de u pour la valeur propre 1).

Deuxième cas : $\dim E_1 = 2$.

Dans ce cas, on obtient avec la formule de Grassmann appliquée à la question précédente que :

$$\dim E = 3 = \dim E_1 + \dim \ker(Q_1(u)),$$

et donc $\dim \ker(Q_1(u)) = 1$. De plus, par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in \ker(Q_1(u))$:

$$Q_1(u)(u(x)) = (Q_1(u) \circ u)(x) = (u \circ Q_1(u))(x) = u(Q_1(u)(x)) = u(0_E) = 0_E.$$

En particulier, le vecteur $u(x)$ appartient à $\ker(Q_1(u))$ pour tout $x \in \ker(Q_1(u))$, et donc $\ker(Q_1(u))$ est stable par u. Si (x_1) désigne une base de $\ker(Q_1(u))$, alors $u(x_1)$ est un multiple de x_1 (vu que $u(x_1)$ appartient à $\ker(Q_1(u))$), et donc il existe un réel μ tel que $u(x_1) = \mu x_1$. En particulier, le vecteur x_1 est un vecteur propre de u pour une valeur propre μ. Comme $E = E_1 \oplus \ker(Q_1(u))$, on obtient que, si (x_2, x_3) désigne une base de E_1, alors la concaténation (x_1, x_2, x_3) est une base de E, laquelle est formée de vecteurs propres de u. En particulier, l'endomorphisme u est diagonalisable.

Par conséquent, on en déduit que, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ est diagonalisable.}}$$

Corrigé de l'exercice 7. Soit n un entier ≥ 2 et soit A une matrice non nulle donnée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que la trace d'une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée $\mathrm{Tr}(B)$, est la somme des éléments diagonaux de B, et l'on considère l'application f définie pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A.$$

(1) Montrons que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $f(M)$ est une combinaison linéaire de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M)$ appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc f est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Reste à vérifier que f est linéaire. Soient M_1, M_2 des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient λ_1, λ_2 des réels. Par linéarité de la trace, on trouve que :

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= \mathrm{Tr}(A)(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) - \mathrm{Tr}(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)A \\
&= \lambda_1 \mathrm{Tr}(A)M_1 + \lambda_2 \mathrm{Tr}(A)M_2 - (\lambda_1 \mathrm{Tr}(M_1) + \lambda_2 \mathrm{Tr}(M_2))\, A \\
&= \lambda_1 \mathrm{Tr}(A)M_1 + \lambda_2 \mathrm{Tr}(A)M_2 - \lambda_1 \mathrm{Tr}(M_1)A - \lambda_2 \mathrm{Tr}(M_2)A \\
&= \lambda_1 \left[\mathrm{Tr}(A)M_1 - \mathrm{Tr}(M_1)A\right] + \lambda_2 \left[\mathrm{Tr}(A)M_2 - \mathrm{Tr}(M_2)A\right] \\
&= \lambda_1 f(M_1) + \lambda_2 f(M_2),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que f est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(2) Montrons que f n'est pas l'endomorphisme nul. Pour ce faire, on procède à une distinction de cas :

Premier cas : $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Dans ce cas, comme $A \neq 0$, on trouve par des calculs simples que :

$$f(I_n) = \mathrm{Tr}(A)I_n - \mathrm{Tr}(I_n)A = 0 \times I_n - nA = -nA \neq 0,$$

et donc $f(I_n) \neq 0$, ce qui entraine que f n'est pas l'endomorphisme nul.

Deuxième cas : $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Dans ce cas, on pose :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Par construction, on voit que $N \neq 0$ et $\mathrm{Tr}(N) = 0$, et l'on obtient par des calculs simples que :

$$f(N) = \mathrm{Tr}(A)N - \mathrm{Tr}(N)A = \mathrm{Tr}(A)N - 0 \times A = \mathrm{Tr}(A)N \neq 0,$$

d'où il s'ensuit que $f(N) \neq 0$, et donc f n'est pas l'endomorphisme nul.

Par conséquent, on en déduit que, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ n'est pas identiquement nul.}}$$

(3) Pour écrire une fonction en Python qui, étant donnée une matrice carrée M, calcule et affiche sa trace, on commencera par calculer la taille de la matrice, puis on utilisera une boucle `for` de la façon suivante :

```
import numpy as np

def trace(m):
    s=0
    n=np.shape(m)[0]
    for i in range(n):
        s=s+m[i,i]
    return s
```

(4) Pour écrire une fonction en Python qui, étant donnée deux matrices carrées A et M de même taille, calcule et affiche la matrice $f(M)$, on utilisera la fonction précédente comme suit :

```
import numpy as np

def endo(a,m):
    b=trace(a)
    c=trace(m)
    f=c*a-b*m
    return f
```

(5) (a) Etablissons que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)f(M)$. Par des calculs simples et par linéarité de la trace, on trouve que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} (f \circ f)(M) &= \mathrm{Tr}(A)f(M) - \mathrm{Tr}(f(M))A \\ &= \mathrm{Tr}(A)f(M) - \mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A)A \\ &= \mathrm{Tr}(A)f(M) - [\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(M) - \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A)]\,A \\ &= \mathrm{Tr}(A)f(M) - 0 \times A. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{(f \circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)f(M).}$$

(b) Donnons les valeurs propres possibles de f. D'après la question précédente, on sait que $(f\circ f)(M) = \mathrm{Tr}(A)f(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc $(f\circ f) = \mathrm{Tr}(A)f$ ou encore $(f\circ f) - \mathrm{Tr}(A)f = 0$. En particulier, le polynôme $P : x \longmapsto x^2 - \mathrm{Tr(A)}x$ est annulateur de f, ce qui entraine que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } f \text{ sont } 0 \text{ et } \mathrm{Tr}(A).}$$

(6) Montrons que 0 est valeur propre de f. Par des calculs simples, on trouve que :

$$f(A) = \mathrm{Tr}(A)A - \mathrm{Tr}(A)A = 0 = 0 \times A.$$

Comme la matrice A est non nulle par définition, on en déduit que :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } f.}$$

(7) Montrons que, si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors f n'est pas diagonalisable. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que f est diagonalisable. Comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on voit avec la question $(3)(b)$ que 0 est la seule valeur propre possible de f. De plus, d'après la question (4), on obtient que 0 est effectivement la seule valeur propre de f. Comme f est supposé diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (M_1, ...M_{n^2})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de f. Or, pour tout $i \in \{1, ..., n^2\}$, on obtient que :

$$f(M_i) = 0 \times M_i = 0.$$

En particulier, l'endomorphisme f est nul sur la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui entraine que f est identiquement nul sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (vu qu'un endomorphisme est complètement déterminé par l'image d'une base et que seul l'endomorphisme nul envoie tout vecteur sur le vecteur nul). Mais ceci contredit le résultat de la question (2). Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } \mathrm{Tr}(A) = 0, \text{ alors } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

(8) On suppose dans cette question que la trace de A est non nulle.

(a) Déterminons la dimension de $\ker(\mathrm{Tr})$. Comme la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, son image est contenue dans $\mathbb{R}$. Comme de plus $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$, l'image de la trace est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit au vecteur nul, et donc $\mathfrak{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ (vu que $\dim \mathbb{R} = 1$). Dès lors, d'après le théorème du rang appliqué à la trace, on trouve que :

$$\dim \ker(\mathrm{Tr}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \mathfrak{Im}(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\dim \ker(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1.}$$

(b) Montrons que f est diagonalisable. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $M \in \ker(\mathrm{Tr})$:

$$f(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A = \mathrm{Tr}(A)M - 0 \times A = \mathrm{Tr}(A)M.$$

En particulier, on obtient que $\ker(\mathrm{Tr})$ est contenu dans le sous-espace propre $E_{\mathrm{Tr}(A)}(f)$ associé à la valeur propre $\mathrm{Tr}(A)$. D'après la question $(4)(a)$, ceci nous donne en passant aux dimensions que :

$$\dim E_{\mathrm{Tr}(A)}(f) \geq \dim \ker(\mathrm{Tr}) = n^2 - 1.$$

Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et que 0 est valeur propre de f d'après la question (4), on voit aussi que :

$$\dim E_0(f) \geq 1.$$

Par sommation et au vu de la question $(3)(b)$, on obtient que :

$$\dim E_{\mathrm{Tr}(A)}(f) + \dim E_0(f) \geq n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad (*)$$

En outre, on sait d'après le cours que :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E_{\mathrm{Tr}(A)}(f) + \dim E_0(f) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad (**)$$

Avec les inégalités $(*)$ et $(**)$, on trouve que :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E_{\mathrm{Tr}(A)}(f) + \dim E_0(f) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } \mathrm{Tr}(A) \neq 0, \text{ alors } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Corrigé du problème 1. (EDHEC)

Partie I

Dans cette partie , la lettre r désigne un entier naturel et x est un réel fixé de $]0,1[$.

(1) (a) Montrer que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tous $n, r \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq r \leq n$:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!}.$$

Fixons l'entier r. Alors l'expression $n(n-1)...(n-r+1)$ est un polynôme en n, de terme dominant égal à n^r (ce que l'on voit en développant le polynôme en question). Comme un polynôme est équivalent à son terme dominant en $+\infty$, il s'ensuit d'après les règles de calcul sur les équivalents que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$:

$$\boxed{\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}.}$$

(b) Donnons la valeur de $\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n$. Comme x appartient à $]0,1[$, on obtient d'après les règles de croissance comparée que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^{r+2}x^n = 0.}$$

(c) Montrons que la série $\sum_n \binom{n}{r}x^n$ est convergente. Comme $\binom{n}{r} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{r!}$ d'après la question (1), on obtient d'après les propriétés des équivalents que :

$$n^2\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{r+2}}{r!}x^n.$$

D'après la question précédente, on sait que $n^{r+2}x^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui entraine que :

$$n^2\binom{n}{r}x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, ceci nous donne que, lorsque n est au voisinage de $+\infty$:

$$n^2\binom{n}{r}x^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge d'après le cours, le critère de négligeabilité des séries entraine que :

$$\boxed{\sum_n \binom{n}{r}x^n \text{ converge.}}$$

(2) Pour tout entier naturel r, on pose $S_r = \sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}x^n$.

(a) Donnons la valeur de S_0. Comme $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que $S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. En particulier, S_0 est la somme de la série géométrique de raison x. D'après le cours, il s'ensuit que :

$$\boxed{S_0 = \frac{1}{1-x}.}$$

(b) Etablissons que $(1-x)S_{r+1} = xS_r$. Par linéarité de la somme pour les séries, on trouve que :

$$(1-x)S_{r+1} = (1-x)\sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n = \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}(1-x)x^n = \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}(x^n - x^{n+1}).$$

Comme la série $\sum_n \binom{n}{r+1}x^n$ converge, la série $\sum_n \binom{n}{r+1}x^{n+1}$ converge aussi par linéarité. Dès lors, toujours par linéarité, on obtient que :

$$(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}(x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty}\binom{n}{r+1}x^{n+1}.$$

Si l'on effectue le changement d'indice $k = n + 1$ dans la deuxième somme de droite, alors on a :

$$(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k-1}{r+1} x^k = \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n-1}{r+1} x^n.$$

Comme $\binom{r-1}{r+1} = 0$ par convention, on trouve que :

$$(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n}{r+1} x^n - \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n-1}{r+1} x^n.$$

Dès lors, on obtient par linéarité que :

$$(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r+1}^{+\infty} \left[\binom{n}{r+1} - \binom{n-1}{r+1} \right] x^n.$$

Mais comme $\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r+1} = \binom{n}{r+1}$ d'après la formule du triangle de Pascal, on trouve que :

$$(1-x)S_{r+1} = \sum_{n=r+1}^{+\infty} \binom{n-1}{r} x^n.$$

Si l'on effectue le changement d'indice $k = n - 1$ dans la somme de droite, alors on a :

$$(1-x)S_{r+1} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k+1}.$$

Par linéarité de la somme, on trouve alors que :

$$(1-x)S_{r+1} = x \left[\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k \right].$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(1-x)S_{r+1} = xS_r.}$$

(c) Montrons que, pour tout $x \in [0, 1[$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{r+1} = \frac{x}{1-x} S_r.$$

En particulier, la suite $(S_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$, et donc on a pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$S_r = \left(\frac{x}{1-x} \right)^r S_0.$$

Comme $S_0 = \frac{x}{1-x}$ d'après la question $(2)(a)$, on trouve que, pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$S_r = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [0, 1[$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}.}$$

(d) Donnons enfin la valeur de $\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\boxed{\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}.}$$

Partie II

On désigne par α et p deux réels de $]0,1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches. Avant chaque manche, y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question (on dit qu'il est disqualifié et c'est définitif) et une probabilité $(1-\alpha)$ d'y être autorisé, et ce indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et il perd un euro avec la probabilité $(1-p)$. Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié et on suppose que les manches jouées sont jouées de façon indépendante. On note :

— X le nombre de manches auquelles a participé ce joueur avant d'être disqualifié.
— Y le nombre de manches gagnées par ce joueur.
— G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y, G sont des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) (a) Donnons la loi de X. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. En effet, le nombre de manches auxquelles a participé le joueur avant d'être disqualifié est un entier ≥ 0, et donc $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[X = k]$ peut être réalisé si le joueur est autorisé à jouer lors des k premières manches et ne l'est pas lors de la $(k+1)$-ème. En d'autres termes, X peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}$, et donc :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}.$$

A présent, fixons un entier $k \in \mathbb{N}$. Si l'on désigne par D_i l'événement "le joueur ne joue pas la i-ème manche", alors on constate que l'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si le joueur est autorisé à jouer lors des k premières manches et ne l'est pas lors de la $(k+1)$-ème, c'est-à-dire si les événements $\overline{D_1}, ..., \overline{D_k}, D_{k+1}$ sont simultanément réalisés, et donc :

$$[X = k] = \overline{D_1} \cap ... \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}.$$

D'après la formule des probabilités composées, on trouve que :

$$P([X = k]) = P(\overline{D_1} \cap ... \cap \overline{D_k} \cap D_{k+1}) = P(\overline{D_1}) P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) ... P_{\overline{D_1} \cap ... \cap \overline{D_k}}(D_{k+1}).$$

Comme le fait d'être disqualifié est indépendant de la manche, on obtient que :

$$P([X = k]) = (1-\alpha) \times ... \times (1-\alpha) \times \alpha = (1-\alpha)^k \alpha.$$

Par conséquent, on en déduit que la loi de X est donnée par :

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P([X = k]) = (1-\alpha)^k \alpha.}$$

(b) On pose $T = X + 1$. Reconnaissons tout d'abord la loi de T. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $T = X + 1$, on voit que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve avec la question précédente que :

$$P([T = k]) = P([X + 1 = k]) = P([X = k - 1]) = (1-\alpha)^{k-1} \alpha.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha).}$$

A présent, calculons l'espérance de X. Comme T suit la loi géométrique de raison α, on sait que T admet une espérance donnée par :

$$E(T) = \frac{1}{\alpha}.$$

Comme $X = T - 1$ par définition, on voit que X admet une espérance. De plus, on obtient par linéarité de l'espérance que :

$$E(X) = E(T - 1) = E(T) - 1 = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha}.}$$

(c) Déterminons également la valeur de $V(X)$. Comme T suit la loi géométrique de raison α, on sait que T admet une variance donnée par :

$$V(T) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.$$

Comme $X = T - 1$ par définition, on voit que X admet une variance, laquelle est donnée d'après les propriétés de la variance par :

$$V(X) = V(T-1) = V(T) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{V(X) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}.}$$

(2) (a) Déterminons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi de Y conditionnellement à l'événement $[X = n]$. Pour ce faire, supposons que l'événement $[X = n]$ soit réalisé. Alors cela signifie que le joueur participe à n manches avant d'être disqualifié. Considérons alors l'expérience aléatoire suivante "le joueur participe à une manche", laquelle a deux issues A : "le joueur gagne la manche" et B : "le joueur ne gagne pas la manche". On répète cette expérience aléatoire n fois dans les mêmes conditions, et la probabilité de succès de l'issue A est égale à p. Comme $Y_{[X=n]}$ est le nombre de manches gagnées par le joueur, $Y_{[X=n]}$ est le nombre de succès de l'issue A, et donc on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{Y_{[X=n]} \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$$

(b) Déterminons la loi de Y. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. En effet, le nombre de manches gagnées par le joueur avant d'être disqualifié est un entier ≥ 0, et donc $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[Y = k]$ peut être réalisé si le joueur gagne les k premières manches et est disqualifié à la $(k+1)$-ème. En d'autres termes, Y peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}$, et donc :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}.$$

A présent, fixons un entier $k \in \mathbb{N}$. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ d'après la question $(1)(a)$ de la partie II, la famille $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. Dès lors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$ et à l'événement $[Y = k]$, on trouve que :

$$P([Y=k]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X=n]) P_{[X=n]}([Y=k]).$$

Comme $Y_{[X=n]}$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ d'après la question précédente, on voit que $P_{[X=n]}([Y=k]) = 0$ si $k > n$ et que $P_{[X=n]}([Y=k]) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ si $0 \leq k \leq n$. Dès lors, d'après la question $(1)(a)$ de la partie II, on obtient par linéarité que :

$$\begin{aligned}
P([Y=k]) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P([X=n]) P_{[X=n]}([Y=k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^n \alpha \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-\alpha)^k p^k \alpha \binom{n}{k} q^{n-k} (1-\alpha)^{n-k} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} (p(1-\alpha))^k \alpha \binom{n}{k} (q(1-\alpha))^{n-k} \\
&= (p(1-\alpha))^k \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (q(1-\alpha))^{n-k}.
\end{aligned}$$

D'après la question $(2)(d)$ de la partie I, il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([Y=k]) = (p(1-\alpha))^k \alpha \times \frac{1}{(1-q(1-\alpha))^{k+1}}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ P([Y=k]) = \frac{(p(1-\alpha))^k \alpha}{(1-q(1-\alpha))^{k+1}}.}$$

(3) Calculons tout d'abord l'espérance de Y. Pour ce faire, on pose :

$$r = \frac{p(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)}.$$

Par des calculs simples, on trouve que :

$$1 - r = 1 - \frac{p(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)} = \frac{1-q(1-\alpha)-p(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)} = \frac{1-(p+q)(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)}.$$

Comme $p+q=1$, on obtient que :

$$1 - r = \frac{1-(p+q)(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)} = \frac{1-(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)} = \frac{\alpha}{1-q(1-\alpha)}.$$

Posons maintenant $Z = Y + 1$. Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $Z = Y + 1$, on voit que $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve avec la question précédente que :

$$P([Z=k]) = P([Y+1=k]) = P([Y=k-1]) = \left(\frac{p(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)}\right)^{k-1} \frac{\alpha}{1-q(1-\alpha)} = r^{k-1}(1-r).$$

Dès lors, il s'ensuit que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(1-r)$, et donc :

$$E(Z) = \frac{1}{1-r}.$$

Comme $Y = Z - 1$ par définition, on voit que Y admet une espérance. De plus, on obtient par linéarité de l'espérance que :

$$E(Y) = E(Z-1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{1-(1-r)}{1-r} = \frac{r}{1-r}.$$

Dès lors, on obtient par définition de r et d'après les calculs faits plus haut que :

$$E(Y) = \frac{r}{1-r} = \frac{\frac{p(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)}}{\frac{\alpha}{1-q(1-\alpha)}} = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\boxed{E(Y) = \frac{p(1-\alpha)}{\alpha}.}$$

A présent, montrons que :

$$V(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}.$$

Comme Z suit la loi géométrique de raison $1-r$, on sait que Z admet une variance donnée par :

$$V(Z) = \frac{1-(1-r)}{(1-r)^2} = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Comme $Y = Z - 1$ par définition, on voit que Y admet une variance, laquelle est donnée d'après les propriétés de la variance par :

$$V(Y) = V(Z-1) = V(Z) = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

Dès lors, on obtient par définition de r et d'après les calculs faits plus haut que :

$$V(Y) = \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{\frac{p(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)}}{(\frac{\alpha}{1-q(1-\alpha)})^2} = \frac{\frac{p(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)}}{\frac{\alpha^2}{(1-q(1-\alpha))^2}} = \frac{p(1-\alpha)(1-q(1-\alpha))}{\alpha^2}.$$

Comme $q = 1-p$, il s'ensuit que :

$$V(Y) = \frac{p(1-\alpha)(1-(1-p)(1-\alpha))}{\alpha^2} = \frac{p(1-\alpha)(1-(1-p-\alpha+p\alpha))}{\alpha^2}.$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$\boxed{V(Y) = \frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2}.}$$

(4) (a) Exprimons G en fonction de X et Y. Par définition, X est le nombre de manches effectuées par le joueur avant d'être disqualifié et Y est le nombre de manches remportées par le joueur. Dès lors, le joueur gagne Y manches et perd $X-Y$ manches au cours du jeu. Comme le joueur gagne un euro à chaque manche remportée et perd un euro à chaque manche perdue, il s'ensuit que le joueur gagne $Y-(X-Y)$ euros en tout. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{G = 2Y - X.}$$

(b) Calculons l'espérance de G. D'après la question précédente, on a par linéarité de l'espérance que :

$$E(G) = E(2Y-X) = 2E(Y) - E(X) = \frac{2p(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$\boxed{E(G) = \frac{(2p-1)(1-\alpha)}{\alpha}.}$$

(c) On admet l'existence de $E(XY)$. Etablissons que :

$$E(XY) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.$$

D'après la formule de l'espérance totale appliquée à la variable aléatoire XY et au système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$, on trouve que :

$$E(XY) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(XY|[X=n])P([X=n]).$$

Comme $Y_{[X=n]}$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$ d'après la question $(2)(a)$ de la partie II, on obtient avec la linéarité de l'espérance (conditionnelle) et de la somme pour les séries que :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(XY|[X=n])P([X=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left((XY)_{[X=n]}\right) P([X=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left(nY_{[X=n]}\right) P([X=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} nE\left(Y_{[X=n]}\right) P([X=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(np)P([X=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} pn^2 P([X=n]) \\
&= p\left[\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P([X=n])\right].
\end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert appliqué à X^2, on voit que :

$$E(XY) = pE(X^2).$$

D'après la formule de Koenig-Huygens et les questions $(1)(b)$ et $(1)(c)$ de la partie II, on a :

$$E(XY) = p[V(X) + (E(X))^2] = p\left[\frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2\right] = p\left[\frac{1-\alpha}{\alpha^2} + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2}\right].$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$\boxed{E(XY) = \frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2}.}$$

(d) Déterminons la variance de G. Comme $G = 2Y - X$ d'après la question $(4)(a)$ de la partie II, on obtient avec les propriétés de la variance que :

$$V(G) = V(2Y - X) = 4V(Y) - 4\text{cov}(X, Y) + V(X).$$

D'après la formule de Koenig-Huygens et les questions précédentes, on trouve que :

$$\begin{aligned}
V(G) &= 4V(Y) - 4\text{cov}(X, Y) + V(X) \\
&= 4V(Y) - 4[E(XY) - E(X)E(Y)] + V(X) \\
&= 4V(Y) - 4E(XY) + 4E(X)E(Y) + V(X) \\
&= 4\frac{p(1-\alpha)(p+\alpha-p\alpha)}{\alpha^2} - 4\frac{p(1-\alpha)(2-\alpha)}{\alpha^2} + 4\frac{p(1-\alpha)}{\alpha}\frac{1-\alpha}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2} \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left[4p(p+\alpha-p\alpha) - 4p(2-\alpha) + 4p(1-\alpha) + 1\right] \\
&= \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left[4p(p+\alpha-p\alpha) - 4p + 1\right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{V(G) = \frac{1-\alpha}{\alpha^2}\left[4p(p+\alpha-p\alpha-1) + 1\right].}$$