

TRAVAUX DIRIGÉS : PRODUIT SCALAIRE - ESPACES EUCLIDIENS

RÉPONSES - INDICATIONS

1. FORMES BILINÉAIRES ET PRODUITS SCALAIRES

Exercice 1.

- (1) φ est bilinéaire, pas symétrique, définie, positive.
- (2) φ est bilinéaire, symétrique, pas définie, positive.
- (3) φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive.
- (4) φ est bilinéaire, pas symétrique, pas définie, pas positive.
- (5) φ est bilinéaire, symétrique, pas définie, pas positive.
- (6) φ est bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Exercice 2.

- (1) Vérifier que E est non vide, inclus dans $\mathbb{R}_n[x]$ et stable par combinaisons linéaires.
- (2) Commencer par faire une IPP pour montrer que $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt$, puis passer à la démonstration.
- (3) $\|P\| = \sqrt{\int_0^1 (P'(t))^2 dt}$.

Exercice 3. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $x = (\sqrt{1}, \dots, \sqrt{n})$ et $y = (1, \dots, 1)$.

Exercice 4. Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On trouve que : $(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1)$.

Exercice 5. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)g(t)dt}{1+t^2}$ et aux fonctions f et 1. On a alors égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 6. Pour montrer que φ est définie, raisonner par l'absurde sur le degré de P . Le reste est classique.

Exercice 7. Montrer que $\ker(f) = \ker(g)$ par double inclusion et en utilisant l'écriture matricielle du produit scalaire en base orthonormée, puis conclure avec le théorème du rang.

Exercice 8. Refaire la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le polynôme :

$$P(t) = E \left(\left(t\sqrt{X} - \frac{1}{\sqrt{X}} \right)^2 \right).$$

On a alors égalité si et seulement si X est constante presque sûrement.

2. ORTHOGONALITÉ

Exercice 9.

- (1) Par polarisation, on trouve que : $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$.
- (2) (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, avec $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Exercice 10.

- (1) Ecrire $Q(x)$ comme une somme de carrés.
- (2) Poser $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$, puis que N est la norme associée à φ .
- (3) (f_1, f_2) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, avec $f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $f_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

Exercice 11.

- (1) A faire!
- (2) $\left(x \mapsto 1, x \mapsto \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2}\right), x \mapsto \sqrt{180} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 12. La famille $((1, 1, 1), (1, -2, 1), (1, 0, -1))$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, mais pas une base orthonormale. De plus, la famille $((0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 1, 0))$ n'est même pas orthogonale.

Exercice 13.

- (1) A faire en utilisant le fait qu'un polynôme de degré $\leq n$, ayant au moins $n + 1$ racines distinctes, est le polynôme nul.
- (2) Classique, à savoir faire!
- (3) Utiliser la question (2).

$$(4) \text{ On trouve que : } \text{mat}_{(L_0, \dots, L_n)}(P) = \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.

- (1) (a) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que T_n est de degré n et de coefficient dominant $a_n = 2^{n-1}$.
- (b) Effectuer une récurrence double!
- (c) Utiliser la question (1)(b) pour montrer que l'ensemble S_n des racines de T_n est donné par :

$$S_n = \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

- (2) (a) A vérifier avec les formules d'addition pour cos.
- (b) Avec la question précédente, on trouve que :

$$I_{p,q} = \begin{cases} \pi & \text{si } p = q = 0 \\ \pi/2 & \text{si } p = q \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}.$$

- (3) (a) Se ramener à l'aide du changement de variable $t = \cos(u)$ à l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, puis conclure!
- (b) A faire!
- (c) Utiliser le changement de variable $t = \cos(u)$.
- (d) On trouve que : $\langle x \mapsto x^n, T_n \rangle = \frac{\pi}{2^n}$.

3. ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 15. Si A est la matrice du produit scalaire dans une base donnée et si X est un vecteur colonne, montrer que $AX = 0 \implies X = 0$, puis conclure.

Exercice 16.

- (1) A faire!
- (2) Procéder par double inclusion!
- (3) Utiliser la question (2), le fait que $E = F + G$ et les résultats sur la dimensions des orthogonaux.

Exercice 17.

- (1) $\mathcal{B} = ((-2, 1, 0), (0, 0, 1))$.
- (2) $\mathcal{B} = ((2, -3, 1))$.
- (3) $\mathcal{B} = ((1, -2, 1))$.
- (4) $\mathcal{B} = \left(x \mapsto \frac{3}{5} - \frac{11}{5}x + x^2\right)$.
- (5) $\mathcal{B} = \left(x \mapsto -\frac{2}{5} + x^2, x \mapsto -\frac{3}{5} + x^3\right)$.

Exercice 18.

- (1) Evaluer l'égalité de départ en $x = e_i$.

- (2) On trouve que la norme est nulle.
 (3) Utiliser la question (2) pour montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E , puis conclure avec (1).

Exercice 19.

- (1) Pour le caractère défini, utiliser le fait que $P(1) = P'(1) = P^{(2)}(1) = P^{(3)}(1) = 0 \implies 1$ est racine de P de multiplicité ≥ 4 .
 (2) On trouve que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2) = \left(x \mapsto 1, x \mapsto x - 1, x \mapsto \frac{(x-1)^2}{2}\right)$.
 Pour la deuxième partie de la question, calculer $\varphi(P, e_0)$, $\varphi(P, e_1)$, $\varphi(P, e_2)$ et conclure.

Exercice 20.

- (1) On trouve que $\varphi(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$ si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.
 (2) Utiliser la question (1) pour montrer que φ est un produit scalaire.
 (3) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 (4) Montrer par Analyse-Synthèse que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, puis que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux avec les propriétés de la trace.

Exercice 21.

- (1) On trouve que $\langle e_i, e_j \rangle = 1$ si $i = j$ et $\langle e_i, e_j \rangle = 1/2$ si $i \neq j$.
 (2) Calculer le rang de A et montrer qu'il est égal à n , puis conclure.
 (3) Partant de la relation $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$, calculer le produit scalaire de cette expression avec e_k pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et conclure avec la question (2).

Exercice 22.

- (1) Calculer $\|v\|^2$ et montrer que $\|v\|^2 \leq \|u\|^2$. Conclure.
 (2) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$ (*). A l'aide de la question (1), on peut supposer que $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Calculer alors le produit scalaire de la relation (*) avec e_{n+1} et conclure.

Exercice 23. On voit que ${}^tP = P^{-1}$. Pour l'inégalité à démontrer, il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et aux vecteurs U et PU , où U est le vecteur colonne dont toutes les composantes sont égales à 1.

Exercice 24.

- (1) (a) Etablir la convergence de $\varphi(P, Q)$ en utilisant la linéarité de l'intégrale et la fonction Gamma d'Euler.
 (b) A faire!
 (2) (a) Montrer que $U(P)(t) = (1-t)P'(t) + tP''(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en déduire que $U \in \mathcal{L}(E)$.
 (b) Vérifier par une IPP que $\langle U(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} t e^{-t} P'(t) Q'(t) dt$, et conclure.
 (3) (a) Utiliser la question (2)(a)!
 (b) Calculer la matrice de U_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$. On trouve que :

$$\text{Sp}(U_n) = \{-k, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Conclure que U_n est diagonalisable.

- (4) (a) On trouve que : $P_k(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^i \frac{k!}{i!} t^i$.
 (b) A l'aide de la question (4)(a), montrer que $U(P_k) = -kP_k$, puis conclure.

4. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 25.

- (1) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $u = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
 (2) On a égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 26.

- (1) A faire!
- (2) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$.

Exercice 27.

- (1) A l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer tout d'abord que :

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|u_k\|.$$

Appliquer ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$ et $(\|u_1\|, \dots, \|u_n\|)$.

- (2) Utiliser la question (1) et raisonner par l'absurde.

Exercice 28.

- (1) A faire!
- (2) On trouve que $a_{0,0} = 3$, $a_{0,1} = a_{1,0} = 0$, $a_{0,2} = a_{2,0} = 2$, $a_{1,1} = 2$, $a_{1,2} = a_{2,1} = 0$, $a_{2,2} = 2$.
- (3) Par le procédé de Gram-Schmidt, on trouve que $\mathcal{B} = (x \mapsto 1/\sqrt{3}, x \mapsto x/\sqrt{2}, x \mapsto (x^2 - 2)/\sqrt{6})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$.
- (4) Vérifier que les vecteurs $x \mapsto 1 + x$ et $x \mapsto 1 - x^2$ sont orthogonaux à $x \mapsto x - x^2$.

Exercice 29.

- (1) A faire comme à l'exo 2.
- (2) Par le procédé de Gram-Schmidt, on trouve que $\mathcal{B} = (x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto (x^2 - x)/\sqrt{3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[x]$.
- (3) Après calculs, on obtient que $\mathcal{F} = (x \mapsto 1, x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - x)$ est une base de $F^\perp$.

Exercice 30.

- (1) On trouve que $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ est une base orthonormée de $F^\perp$.
- (2) On trouve que $\mathcal{B} = ((-1, 1, 1, 0), (-1, -1, 0, 2))$ est une base orthonormée de $F^\perp$.
- (3) On trouve que $\mathcal{B} = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4))$ est une base orthonormée de $F^\perp$.
- (4) On trouve que $\mathcal{B} = (x \mapsto 1 + x + x^2)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.

Exercice 31.

- (1) (a) On trouve que $L_0 : x \mapsto 1$, $L_1 : x \mapsto x$, $L_2 : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.
- (b) On trouve que L_n est de degré n , de coefficient dominant $a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.
- (c) A faire avec les degrés échelonnés!
- (2) A faire!
- (3) (a) Utiliser une IPP.
- (b) Procéder par une récurrence finie à l'aide de la question (3)(a).
- (4) (a) D'après la question (1)(c), on sait que $(L_0, \dots, L_{m-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{m-1}[x]$. De plus, on peut montrer à l'aide de la question (3) que L_i est orthogonal à L_m pour tout $i \leq m-1$. Conclure.
- (b) Utiliser la question précédente.

Exercice 32.

- (1) Soient f et g deux éléments de E .
- (a) Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on voit que $(|f(t)| - |g(t)|)^2 \geq 0$, et donc $2|f(t)g(t)| \leq f^2(t) + g^2(t)$.
- (b) Avec la question précédente, conclure sur la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$ par linéarité et comparaison d'intégrales de fonctions positives.
- (c) Vérifier avec les questions précédentes que E est stable par somme et par produit par une constante.
- (2) A faire!
- (3) (a) Penser aux intégrales exponentielles!
- (b) On trouve que $\langle f_k, f_l \rangle = \frac{1}{2(k+l)}$ pour tous $k, l \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Après calculs, on trouve que $\mathcal{B} = (2f_1, \sqrt{72}(f_2 - \frac{2}{3}f_1))$ est une base orthonormée de F .

Exercice 33.

- (1) On voit que $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, et donc $2|ab| \leq a^2 + b^2$. En particulier, on a $|a + b|^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

- (2) Avec la question précédente, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Conclure sur la convergence de $\sum |u_n v_n|$ par linéarité et comparaison des séries à termes positifs.

- (3) Vérifier avec l'indication donnée que $l^2(\mathbb{N})$ est stable par somme et par produit par une constante.
- (4) (a) A faire!
- (b) A faire! Conclure que F n'est pas de dimension finie car il contient une famille libre infinie.
- (c) A faire en partant de la définition de F .
- (d) On trouve que $F^\perp = \{0\}$ et $F \oplus F^\perp = F \neq l^2(\mathbb{N})$ (car $l^2(\mathbb{N})$ contient la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$, qui n'appartient pas à F). Enfin, on obtient que $(F^\perp)^\perp = l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 34.

- (1) (a) A faire! Vérifier par télescopage que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n}$ converge, de somme 1.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que $u_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Vérifier par télescopage que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge, de somme 1.
- (2) (a) On peut proposer la fonction en Python suivante :

```
import numpy as np

def fact(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        p=1
        for k in range(1,n+1):
            p=p*k
        return p
```

- (b) On peut proposer la fonction en Python suivante :

```
import numpy as np

def suiteu(n):
    s=0
    for k in range(1,n+1):
        s=s+fact(k)
    return n/s
```

- (c) Penser aux séries exponentielles!
- (d) Comme les a_k sont ≥ 0 , on voit que $a_1 + \dots + a_n \geq a_n = n!$, et donc $u_n \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$.
- (e) Effectuer une comparaison avec une série exponentielle. On trouve que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq e$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = e - 1$, et on conclut!
- (3) (a) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et aux vecteurs $u = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{n}{\sqrt{a_n}}\right)$.
- (b) D'après le résultat précédent, on voit que :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq (a_1 + \dots + a_n) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k},$$

ce qui nous donne après division que :

$$\frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \left(\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

On conclut alors en remarquant que $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$!

- (c) Par sommation de l'inégalité précédente, puis par interversion des sommes et télescopage, on trouve que, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k} k^2 \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right).$$

Il n'y a plus qu'à conclure!

- (d) D'après la question précédente, on voit que, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}.$$

Comme la série $\sum \frac{1}{a_k}$ converge et est à termes positifs, on obtient que, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n}$ est majorée. Comme cette série est à termes positifs, il s'ensuit qu'elle converge. Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on voit alors que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Comme les a_k sont tous > 0 , on obtient que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{a_1 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 2 de part et d'autre pour établir l'inégalité (*).

Exercice 35.

- (1) Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n x_i u_i = 0$. Comme $(u_1, \dots, u_n)$ est μ -presque orthogonale, on voit que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 0$, ce qui entraîne que $x_1 = \dots = x_n = 0$, et donc $(u_1, \dots, u_n)$ est libre.
- (2) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de E . Si $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormale, alors on vérifie avec le théorème de Pythagore que $(u_1, \dots, u_n)$ est 1-presque orthogonale. Réciproquement, supposons que $(u_1, \dots, u_n)$ soit 1-presque orthogonale. Alors on voit que $\|u_i + u_j\|^2 = 2$ pour tous i, j tels que $i \neq j$. Comme les u_k sont de norme 1, on obtient par polarisation que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tous i, j tels que $i \neq j$. On en déduit que $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormale.
- (3) (a) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit x un vecteur de E et soient $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Par linéarité de f , on trouve que :

$$\|f(x)\| = \|f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| = \|x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n)\|$$

D'après l'inégalité triangulaire, on obtient que :

$$\|f(x)\| \leq |x_1| \|f(e_1)\| + \dots + |x_n| \|f(e_n)\|.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve que :

$$\|f(x)\| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \sqrt{\|f(e_1)\|^2 + \dots + \|f(e_n)\|^2}.$$

Avec le théorème de Pythagore, ceci entraîne que :

$$\|f(x)\| \leq \sqrt{\|f(e_1)\|^2 + \dots + \|f(e_n)\|^2} \|x\|.$$

Il suffit alors de poser $k = \sqrt{\|f(e_1)\|^2 + \dots + \|f(e_n)\|^2}$!

- (b) On applique le résultat de la question précédente à f et à f^{-1} . On trouve alors des constantes $k, k' > 0$ telle que $\|f(x)\| \leq k \|x\|$ et $\|f^{-1}(x)\| \leq k' \|x\|$ pour tout $x \in E$. En remplaçant x par $f(x)$ dans la deuxième inégalité, on obtient que $\|x\| \leq k' \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$, et donc :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{k'} \|x\| \leq \|f(x)\| \leq k \|x\|.$$

Il suffit alors de choisir $\lambda = \max\{k, 1/k'\}$!

- (4) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre de vecteurs unitaires de E . Fixons une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Alors il existe une unique endomorphisme f de E tel que $f(e_i) = u_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre, on trouve que f est de rang n , et donc f est un automorphisme de E . D'après la question précédente, il existe alors un réel $\lambda \geq 1$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{\lambda} \|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda \|x\|.$$

Pour tous réels $x_1, \dots, x_n$, on obtient en posant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et par définition et linéarité de f que :

$$\frac{1}{\lambda} \|x\| \leq \|x_1 u_1 + \dots + x_n u_n\| \leq \lambda \|x\|.$$

Comme la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, il s'ensuit avec le théorème de Pythagore que :

$$\frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \|x_1 u_1 + \dots + x_n u_n\|^2 \leq \lambda^2 \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

On en déduit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est μ -presque orthogonale, avec $\mu = \lambda^2$.

Exercice 36.

- (1) Suivre les indications données!
- (2) Vérifier tout d'abord que $\|y\| \leq \frac{2}{k} \|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ à l'aide de la question (1), puis faire un passage à la limite quand k tend vers $+\infty$.
- (3) Utiliser la question (2) et le théorème du rang.
- (4) (a) On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) = y$.
- (b) Suivre l'indication donnée et faire un télescopage. On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) = 0$.
- (c) Utiliser les questions (3), (4)(a) et (4)(b) pour montrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \text{Id})$ parallèlement à $\mathfrak{Im}(u - \text{Id})$.

Exercice 37.

- (1) A donner!
- (2) On trouve que : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.
- (3) Par linéarité de l'espérance et par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que :

$$E(\|U\|^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) \langle v_i, v_j \rangle.$$

Utiliser ensuite l'indépendance mutuelle des X_i et leur loi commune pour montrer que $E(\|U\|^2) = n$.

- (4) Raisonner par l'absurde et obtenir une contradiction avec la positivité de l'espérance.
- (5) Si $\mathcal{F}$ est orthogonale, alors on a d'après Pythagore :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

Réciproquement, supposons que :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

Posons alors $x = \varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n$ et $y = \varepsilon_1 v_1 + \dots - \varepsilon_i v_i + \dots + \varepsilon_n v_n$. Comme $\|x\| = \|y\| = \sqrt{n}$, on voit que $\|x\|^2 = \|y\|^2$, et donc on a d'après la question (2) :

$$\left\langle v_i, \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq i} \varepsilon_k v_k \right\rangle = 0.$$

En choisissant judicieusement les ε_k , montrer que $\langle v_i, v_k \rangle = 0$ pour tout $k \neq i$. Conclure.

- (6) On raisonne par l'absurde et on suppose que $\|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| \leq \sqrt{n}$ pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. Alors, on obtient par croissance de l'espérance que $E(\|U\|^2) \leq n$, et donc $E(\|U\|^2) = n$ d'après la question (3). Par positivité de l'espérance, l'égalité $E(\|U\|^2) = n$ entraîne que $\|U\|^2 = n$ presque sûrement, et donc :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \|\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_n v_n\| = \sqrt{n}.$$

Conclure avec la question (5) que $\mathcal{F}$ est orthogonale, d'où la contradiction recherchée.

Exercice 38.

- (1) Pour $n = 2$, on se fixe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E . Vérifier alors que $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ conviennent!
- (2) Dans le cas général, on voit avec la relation (1) que F et G sont en somme directe. Ensuite, on vérifie comme à l'exo 16 que $(F \oplus G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, ce qui entraîne avec la relation (4) que :

$$F \oplus G = (F^\perp \cap G^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E.$$

De la même manière, on obtient avec les relations (2) et (3) que $F^\perp \oplus G = E$. En particulier, on trouve en passant aux dimensions que :

$$\dim(F) = n - \dim(G) = \dim(F^\perp) = n - \dim(F),$$

d'où il s'ensuit que $n = 2 \dim(F)$, et donc n est pair. Pour un exemple, on se fixe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2p})$ de E , où $n = 2p$. Montrer alors que $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_1 + e_{p+1}, \dots, e_p + e_{2p})$ conviennent. Pour ce faire, on pourra vérifier par le calcul que $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ et $G^\perp = \text{Vect}(e_1 - e_{p+1}, \dots, e_p - e_{2p})$, puis que les relations (1) à (4) sont toutes satisfaites!