Lycée Clemenceau **2025-26**
ECG 2

Devoir Maison de Mathématiques n^o5 :
DL - Diagonalisation - Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

(1) (a) Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
(b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 0, ainsi que la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

(2) (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 2 en 1.
(c) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f en 1, ainsi que la position relative de la courbe de f par rapport à sa tangente au voisinage de 1.

Exercice 2. A l'aide des développements limités, calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) + 3x^2}{1-\cos(x)}$.

Exercice 3. Soit n un entier ≥ 2. On considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une matrice M de rang 1. On note C la première colonne de M et on suppose que C est non nulle.

(1) Donner la dimension de $\ker(f)$ et en déduire une valeur propre de f.

(2) (a) Montrer qu'il existe une matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $M = CL$.
(b) Vérifier que $\mathrm{Tr}(M) = LC$.
(c) Etablir l'égalité $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$.

(3) Montrer que $\mathrm{Tr}(M)$ est une valeur propre de f.

(4) On suppose que $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

(5) On suppose que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$. A l'aide des questions précédentes, déterminer les valeurs propres de f et montrer que f est diagonalisable.

A présent, on se fixe trois réels a, b, c non nuls, et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/b \\ a & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Par la suite, on suppose que A n'est pas inversible.

(1) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés trois réels a, b, c non nuls, construit et affiche la matrice A.

(2) (a) En considérant le système $AX = 0$, où $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, établir par un raisonnement par l'absurde que $ac = b$.
(b) En déduire le rang de A.

(3) (a) Conclure que g est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A^n appartient à $\mathrm{Vect}(A)$.

Problème 1. Soit r un entier ≥ 2. Une urne contient r boules numérotées de 1 à r. On pioche indéfiniment les boules avec remise, chaque boule pouvant être piochée de façon équiprobable. Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, on désigne par Y_i le nombre de pioches nécessaires pour obtenir i boules distinctes. Par convention, on pose $Y_1 = 1$. De même, on désigne par X_r le nombre de pioches nécessaires pour obtenir les r boules numérotées. Il est clair que $X_r = Y_r$. Par exemple, en supposant que $r = 4$ et si les boules piochées portent les numéros : $3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 2, 4, 1, ...$, alors on voit que : $Y_1 = 1$, $Y_2 = 4$, $Y_3 = 8$, $Y_4 = X_4 = 11$.

(1) **Partie I : résultats préliminaires.**

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

(a) Ecrire une fonction en Python qui, à partir d'un entier $n \geq 1$, calcule et affiche u_n.
(b) A l'aide d'un développement limité, montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
(c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1}(u_n - u_{n+1})$, puis établir la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$.

(2) **Partie II : étude de la variable X_r.**

(a) Etude du cas $r = 3$.

Dans cette question, on suppose que $r = 3$, c'est-à-dire que l'urne contient 3 boules numérotées $1, 2, 3$ pouvant être piochées avec probabilité $\frac{1}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par C_n l'événement "les n premières pioches fournissent des boules portant toutes le même numéro".

(i) Comparer les événements $[Y_2 > n]$ et C_n, puis calculer la probabilité $P(C_n)$.

(ii) En déduire la valeur de $P([Y_2 > n])$, puis donner la loi de Y_2.

(iii) Justifier que, pour tout $n \geq 1$, on ait : $P([Y_3 - Y_2 = n]) = \sum_{k=2}^{+\infty} P([Y_3 = n+k] \cap [Y_2 = k])$.

(iv) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\forall k \geq 2$, $P([Y_3 = n + k] \cap [Y_2 = k]) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(v) En déduire la loi de la variable aléatoire $Y_3 - Y_2$.

(b) Loi de $Y_{i+1} - Y_i$ pour tout $i \in \{1, ..., r-1\}$.

Dans toute la suite du problème, r désigne un entier ≥ 2.

(i) Justifier que $Y_i(\Omega) = \{i, i+1, ...\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., i-1\}$ et $(Y_{i+1} - Y_i)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

(ii) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $\forall k \geq i$, $P_{[Y_i = k]}([Y_{i+1} - Y_i = n]) = \left(\frac{i}{r}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{i}{r}\right)$.

(iii) En déduire que $Y_{i+1} - Y_i$ suit une loi usuelle que l'on donnera, puis que :

$$E(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{r}{r-i} \quad \text{et} \quad V(Y_{i+1} - Y_i) = \frac{ri}{(r-i)^2}.$$

(c) Espérance et variance de X_r.

(i) Justifier l'égalité $X_r = 1 + \sum_{i=1}^{r-1} (Y_{r-i+1} - Y_{r-i})$. Ensuite, en admettant que les variables $Y_2 - Y_1, Y_3 - Y_2, ..., Y_r - Y_{r-1}$ sont indépendantes, montrer que :

$$E(X_r) = r \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad V(X_r) = r^2 \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i^2} \right) - r \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i} \right).$$

(ii) Ecrire une fonction en Python qui, à partir d'un entier $r \geq 1$, calcule et affiche la matrice $M_r \in \mathcal{M}_{2,r}(\mathbb{R})$ dont les lignes sont $L_1 = (E(X_1), ..., E(X_r))$ et $L_2 = (V(X_1), ..., V(X_r))$, puis qui trace dans le plan l'ensemble des points $M_k = (E(X_k), V(X_k))$ pour $k \in [\![1, r]\!]$.

(iii) A l'aide de la partie I, montrer qu'il existe deux réels α, β tels que :

$$E(X_r) \underset{r \to +\infty}{=} r \ln(r) + \alpha r + o(r) \quad \text{et} \quad V(X_r) \underset{r \to +\infty}{\sim} \beta r^2.$$

(3) **Partie III : loi de X_r et déviation asymptotique par rapport à sa moyenne.**

Pour tout entier $m > 0$ et pour tout entier $k \in \{1, ..., r\}$, on considère les événements $A_{k,m}$: "le numéro k n'a pas été pioché durant les m premières pioches" et $B_{k,m}$: "k numéros fixés au départ n'ont pas été piochés durant les m premières pioches". Enfin, on admet la formule du crible pour n événements $A_1, ..., A_n$, à savoir :

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) \right).$$

(a) Détermination de la loi de X_r.

(i) Calculer successivement la probabilité de l'événement $A_{k,m}$, puis celle de l'événement $B_{k,m}$.

(ii) Justifier que $P([X_r > m]) = P(A_{1,m} \cup A_{2,m} \cup ... \cup A_{r,m})$.

(iii) A l'aide de la formule du crible, montrer que : $P([X_r > m]) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \binom{r}{k} \left(1 - \frac{k}{r}\right)^m$.

(iv) En déduire la loi de X_r.

(b) Comportement asymptotique de X_r au delà de sa moyenne.

Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on désigne par M_r la partie entière de $(1+\varepsilon) r \ln(r)$, c'est-à-dire l'unique entier relatif M_r tel que $M_r \leq (1+\varepsilon) r \ln(r) < M_r + 1$.

(i) Montrer par récurrence sur m que, pour toute famille $(D_1, ..., D_m)$ d'événements, on a :

$$P(D_1 \cup ... \cup D_m) \leq P(D_1) + ... + P(D_m).$$

(ii) Démontrer que, pour tout réel x, on a : $e^x \geq 1 + x$. En déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \{1, ..., r\}, \quad P(A_{k,m}) \leq e^{-\frac{m}{r}}.$$

(iii) Comparer les événements $[X > M_r]$ et $[X > (1+\varepsilon) r \ln(r)]$, et en déduire que :

$$P([X_r > (1+\varepsilon) r \ln(r)]) \leq \frac{e}{r^{\varepsilon}}.$$

(c) Distribution de X_r autour de sa moyenne.

Pour tout réel t fixé, on désigne par m_r la partie entière de $r \ln(r) + rt$, c'est-à-dire l'unique entier relatif m_r tel que $m_r \leq r\ln(r) + rt < m_r + 1$. De plus, on introduit la suite $(Z_r)_{r\geq 2}$ de variables aléatoires définies pour tout $r \geq 2$ par :

$$Z_r = \frac{X_r - r\ln(r)}{r}.$$

(i) Justifier l'existence d'un rang $r_0(t)$ tel que : $\forall r \geq r_0(t)$, $m_r \geq 1$.

(ii) Etablir alors l'égalité : $\forall r \geq r_0(t)$, $P([Z_r > t]) = P([X_r > m_r])$.

(iii) Soit $k \in \mathbb{N}$. A l'aide d'un développement limité, montrer que :

$$m_r \ln\left(1 - \frac{k}{r}\right) \underset{r\to+\infty}{=} -k\ln(r) - kt + o(1).$$

(iv) Montrer que $\binom{r}{k} \underset{r\to+\infty}{\sim} \frac{r^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en déduire que :

$$\lim_{r\to+\infty} \binom{r}{k}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{m_r} = \frac{e^{-kt}}{k!}.$$