Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 13 : 5 janvier 2026)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les couples de variables aléatoires discrètes et les vecteurs aléatoires discrets, ainsi que sur des révisions de base en Python, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Couples de variables aléatoires discrètes:**
Définition d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
Définition du support d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes.
Système complet d'événements associé à un couple de variables aléatoires.
Définition et propriétés de la loi conjointe d'un couple de variables aléatoires discrètes.
Définition et propriétés des lois marginales d'un couple de variables aléatoires discrètes.
Définition et propriétés de la loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant $[Y = k]$.
Définition et propriétés de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.
Définition et propriétés d'une fonction de deux variables aléatoires discrètes.
Loi d'une somme de deux variables aléatoires discrètes - Produit de convolution discret.
Stabilité par addition de la loi binomiale (*) et de la loi de Poisson (*).
Théorème de transfert pour les fonctions de deux variables aléatoires discrètes.
Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance, existence par domination.
" Si X, Y admettent une espérance et sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$".
Définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.
Propriétés de la covariance (symétrie, bilinéarité) - Formule de Koenig-Huygens.
Expression de la variance d'une somme de deux variables aléatoires.
"Deux variables aléatoires discrètes indépendantes ont une covariance nulle".
Variance d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.
Définition et propriétés du coefficient de corrélation linéaire.
"Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est compris entre -1 et 1, et égal à ± 1 si et seulement s'il existe des réels a, b tels que $Y = aX + b$ presque sûrement" (*).

(2) **Vecteurs aléatoires discrets:**
Définition et propriétés d'un vecteur aléatoire discret.
Système complet d'événements associés à un vecteur aléatoire discret.
Définition de la loi conjointe et des lois marginales d'un vecteur aléatoire discret.
Définition et propriétés de l'indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires discrètes.
Suite de variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes.
Définition d'une fonction d'un vecteur aléatoire discret.
Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance.
Lemme des coalitions - Linéarité de l'espérance.
Expression de la variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes (*).
Expression de la variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes.
Stabilité par addition de la loi binomiale et de la loi de Poisson.

(3) **Programmation de base en Python (révisions):**
Utilisation des commandes de base de la bibliothèque `numpy.linalg`.
Savoir écrire un vecteur et une matrice avec les commandes à connaître : `np.array`, `np.linspace`, `np.arange`, `np.zeros`, `np.ones`, `np.eye`.
Opérations de base : extraction d'un élément, d'un sous-vecteur, d'une sous-matrice.
Commandes à connaître : `np.dot`, `np.transpose`, `np.shape`, `np.min`, `np.max`, `np.sum`, `np.cumsum`, `al.inv`, `al.matrix_rank`, `al.matrix_power`.
Utilisation des commandes de base de la bibliothèque `matplotlib.pyplot`.
Savoir écrire une fonction d'une variable avec la commande `def` et en tracer la courbe représentative avec les commandes `plt.plot` et `plt.show`.

<u>Exercices de début de colle</u>:

Exercice 1. On considère n personnes qui se répartissent au hasard dans 3 hôtels H_1, H_2, H_3. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on désigne par X_i le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

(1) Déterminer les lois de X_1, X_2, X_3 et $X_1 + X_2$.
(2) Donner la variance de $X_1 + X_2$, et en déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(m, \frac{1}{2}\right)$. Rappeler la loi de $S = X + Y$, puis calculer $P([X = Y])$.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes, telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer l'espérance et la variance de $Z = XY$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$ respectivement, dont la loi conjointe est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a^i}{j!}.$$

(1) Calculer la valeur de a pour que cela définisse bien une loi conjointe.
(2) Déterminer les lois de X et de Y, puis vérifier que X et Y sont indépendantes.
(3) Calculer l'espérance et la variance de $S = X + Y$.

Exercice 5. Soit n un entier ≥ 2 donné au préalable. Ecrire une commande en Python qui crée le vecteur $(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n})$. Compléter cette commande pour qu'elle calcule et affiche la somme :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 6. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 2$, retourne la matrice $H = (h_{i,j})$, où $h_{i,j}$ est donné pour tout $(i,j) \in \{1, ..., n\}^2$ par :

$$h_{i,j} = \frac{1}{i + j - 1}.$$