TRAVAUX DIRIGÉS : COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES - VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS (RÉPONSES - INDICATIONS)

Exercice 1. Dans le sens direct, c'est un résultat du cours! Pour la réciproque, supposons que $\operatorname{cov}(X,Y)=0$. Vérifier tout d'abord que $[X=1]$ et $[Y=1]$ sont indépendants, puis que $[X=x]$ et $[Y=y]$ sont indépendants pour tout $(x,y)\in[\![0,1]\!]^2$, et en déduire que X et Y sont indépendantes.

Exercice 2. Remarquons tout d 'abord que $(U,V)(\Omega)\subset[\![-1,1]\!]\times[\![0,2]\!]$. De plus, la loi de (U,V) est donnée par la liste :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P([U=0]\cap[V=-1]) & = & 0 \\ P([U=0]\cap[V=0]) & = & q^2 \\ P([U=0]\cap[V=1]) & = & 0 \\ P([U=1]\cap[V=-1]) & = & pq \\ P([U=1]\cap[V=0]) & = & 0 \\ P([U=1]\cap[V=1]) & = & pq \\ P([U=2]\cap[V=-1]) & = & 0 \\ P([U=2]\cap[V=0]) & = & p^2 \\ P([U=2]\cap[V=1]) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Par transfert ou par bilinéarité de la covariance, on trouve que $\operatorname{cov}(U,V)=0$. Cependant, U et V ne sont pas indépendantes. Pour voir, il suffit de comparer $P([U=0]\cap[V=-1])$ et $P(U=0)P(V=-1)$, et de conclure.

Exercice 3.

(1) On trouve que $a=\dfrac{1}{1+e}$.

(2) On obtient que $X\hookrightarrow\mathcal{G}\left(\dfrac{e}{1+e}\right)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(1)$. Vérifier ensuite l'indépendance de X et Y.

(3) On trouve que $E(X)=1+\dfrac{1+e}{e}$ et $V(X)=1+\dfrac{1+e}{e^2}$.

Exercice 4.

(1) A l'aide du théorème de Fubini, on trouve que $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

(2) X et Y ne sont pas indépendantes (comparer pour cela $P([X=0]\cap[Y=0])$ et $P(X=0)P(Y=0)$).

(3) Par transfert, on trouve que $E(2^{X+Y})=2e$.

Exercice 5.

(1) La loi du couple (X,Y) est donnée par : $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $P([X=i]\cap[Y=j])=\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si} \quad i=j \\ \dfrac{1}{n(n-1)} & \text{si} \quad i\neq j \end{array}\right.$.

Pour les lois marginales, on en déduit que X et Y suivent la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

(2) X et Y ne sont pas indépendantes (comparer pour cela $P([X=1]\cap[Y=1])$ et $P(X=1)P(Y=1)$).

(3) En utilisant le théorème de transfert, on trouve que $\rho_n=-\dfrac{1}{n-1}$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n=0$.

Exercice 6. On a $S\hookrightarrow\mathcal{B}\left(n+m,\dfrac{1}{2}\right)$, $P([X=Y])=\dbinom{n+m}{n}\dfrac{1}{2^{n+m}}$ et $P([X\neq Y])=1-\dbinom{n+m}{n}\dfrac{1}{2^{n+m}}$.

Exercice 7. On a $E(Z)=p\lambda$, $V(Z)=p\lambda+p\lambda^2-p^2\lambda^2$ et la loi de Z est donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad P(Z=k)=\left\{\begin{array}{ll} q+pe^{-\lambda} & \text{si} \quad k=0 \\ \dfrac{pe^{-\lambda}\lambda^k}{k!} & \text{si} \quad k>0 \end{array}\right. .$$

Exercice 8.

(1) On trouve que $E(X+Y)=n+1$ et $V(X+Y)=\dfrac{n^2-1}{6}$.

(2) Procéder par convolution discrète.

(3) Toujours par convolution discrète, on trouve que : $\forall k \in [\![n+2, 2n]\!]$, $P(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
(4) Appliquer la formule des probas totales à l'événement $[X+Y=Z]$ et au s.c.e. $([Z=k])_{1 \leq k \leq n}$.

Exercice 9.

(1) Les lois de U, V, W sont données respectivement par :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![2, +\infty[\![, & P(U=k) = (k-1)p^2 q^{k-2} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, & P(V=k) = \dfrac{p^2 q^{|k|}}{1-q^2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, & P(W=k) = (1-q^2)q^{2k-2} \end{cases}.$$

(2) On trouve que $\text{cov}(U,V) = 0$. De plus, les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes (comparer pour cela $P([U=2] \cap [V=0])$ et $P(U=2)P(V=0)$).

Exercice 10.

(1) X_1, X_2, X_3 suivent la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$ et $X_1 + X_2$ la loi $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{2}{3}\right)$.
(2) On trouve que $V(X_1 + X_2) = \dfrac{2n}{9}$ et $\text{cov}(X_1, X_2) = -\dfrac{n}{9}$.

Exercice 11.

(1) $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $E(X) = np$, $V(X) = npq$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-q^2)$, $E(X) = n(1-q^2)$, $V(X) = nq^2(1-q^2)$.
(2) Y est le nombre de personnes ayant atteint la cible au deuxième tir mais pas au premier. De plus, on obtient que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq)$, $E(Y) = npq$, $V(Y) = npq(1-pq)$.
(3) X et Y ne sont pas indépendantes (comparer pour cela $P([X=n] \cap [Y=n])$ et $P(X=n)P(Y=n)$).
(4) Partant du fait que $Y = Z - X$, on trouve que $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$. Comme on connaît les lois de X, Y, Z, on en déduit après calculs la covariance de X, Y.

Exercice 12.

(1) Sachant $[N=j]$, on voit que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(j,p)$.
(2) La loi conjointe du couple (X,N) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [N=j]) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > j \\ \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^j p^i q^{j-i}}{i!(j-i)!} & \text{si} \quad 0 \leq i \leq j \end{cases}.$$

(3) On en déduit que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$, $E(X) = \lambda p$, $V(X) = \lambda p$.
(4) Montrer tout d'abord que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda q)$, puis vérifier l'indépendance de X et Y par le calcul.
(5) On trouve que $\text{cov}(X,N) = \lambda p$.
(6) On obtient que $\rho(X,N) = \sqrt{p}$.
(7) Utiliser la question précédente pour voir que N ne peut pas être une fonction affine de Y.

Exercice 13.

(1) On trouve que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$, $E(Y_n) = p^2$, $V(Y_n) = p^2(1-p^2)$.
(2) On obtient que $E(S_n) = np$, $V(S_n) = npq$, $E(V_n) = np^2$.
(3) Etablir que $\text{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3 q$ et $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ pour tous i, j tels que $i < j-1$.
(4) On en déduit que $V(V_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3 q$.

Exercice 14.

(1) Avec la formule de l'espérance totale, on trouve que $E(Y) = E(X)E(N)$.
(2) De même, on a $E(Y^2) = V(X)E(N) + E(X)^2 E(N^2)$.
(3) On en déduit que $V(Y) = V(X)E(N) + E(X)^2 V(N)$.
(4) Si Y est le nombre de piles obtenus, alors on a :

$$E(Y) = \frac{p(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{pq(n+1)}{2} + \frac{p^2(n^2-1)}{12}.$$

Exercice 15.

(1) A faire!

(2) La loi de Z est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Z=k) = \frac{(k+1)a^k}{(1+a)^{k+2}}.$$

De plus, on obtient par transfert que $E(S) = \dfrac{1}{1+a}$ et $E(R) = \dfrac{a}{2(1+a)}$.

(3) (a) On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(X \leq n) = 1 - \left(\dfrac{a}{1+a}\right)^{n+1}$.

(b) Partir du fait que $P(T \geq n) = P(X \geq n)P(Y \geq n)$...

Exercice 16.

(1) On a pour tout $n \in (X_1+X_2)(\Omega)$ et pour tout $k \in [\![0, n_1]\!]$: $P_{[X_1+X_2=n]}(X_1 = k) = \dfrac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$.

(2) On obtient que $E(X_1 | [X_1+X_2=n]) = \dfrac{n_1\binom{n_1+n_2-1}{n-1}}{\binom{n_1+n_2}{n}} = \dfrac{nn_1}{n_1+n_2}$.

1. Exercices supplémentaires

Exercice 17.

(1) La loi du couple (X,Y) est donnée par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P([X=i] \cap [Y=j]) = \begin{cases} \dfrac{1}{ni} & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

(2) On voit que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$, $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$, $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.

(3) La loi de Y est donnée par : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=j) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}$.

(4) X et Y ne sont pas indépendantes (comparer pour cela $P([X=n] \cap [Y=n])$ et $P(X=n)P(Y=n)$).

(5) Par transfert et avec la question (1), on trouve que $E(Y) = \dfrac{n+3}{4}$ et $V(Y) = \dfrac{7n^2+6n-13}{144}$.

Exercice 18.

(1) Si $q = 1-p$, on trouve que $P([X=k] \cap [Y=l]) = p^k q^l$ pour tout $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$. De plus, X suit la loi $\mathcal{G}(q)$ et Y suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

(2) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

(3) On trouve que $P([X=Y]) = \dfrac{pq}{1-pq}$.

Exercice 19.

(1) On trouve que $\lambda = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.

(2) (a) On obtient que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = P(Y=i) = \dfrac{2i}{n(n+1)}$. De plus : $E(X) = E(Y) = \dfrac{2n+1}{3}$.

(b) Vérifier que X et Y sont indépendantes, et donc la covariance de (X,Y) est nulle.

(3) On trouve que $\lambda = \dfrac{1}{e}$. De plus, on obtient que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X=i) = P(Y=i) = \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{e}i!2^i}.$$

Après calculs, on trouve que : $E(X) = E(Y) = \dfrac{1}{2}$. Par transfert, on obtient que $E(XY) = \dfrac{3}{4}$. Par Koenig-Huygens, il s'ensuit que $\mathrm{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, et donc X, Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 20.

(1) On peut représenter une façon de vider le sac par une succession de n cases. On représente par 2 croix dans ces cases les instants où on a tiré les 2 boules blanches. On a donc un choix favorable et $\dbinom{n}{2}$ façons de choisir 2 cases parmi n, sans ordre et sans répétition, d'où le résultat!

(2) Les lois de X et de Y sont données par :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!], \quad P(X=i) = \dfrac{2(n-i)}{n(n-1)} \\ \\ \forall j \in [\![2, n]\!], \quad P(Y=j) = \dfrac{2(j-1)}{n(n-1)} \end{cases}.$$

(3) Après calculs et notamment par transfert, on trouve que :

$$E(X) = \frac{n+1}{3}, \quad E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}, \quad E(X^2) = \frac{n(n+1)}{6}, \quad E(XY) = E(Y^2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{6}.$$

(4) Après calculs et notamment par Koenig-Huygens, on obtient que :

$$V(X) = V(Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}, \quad \operatorname{cov}(X,Y) = \frac{(n+1)(n-2)}{18}.$$

On en déduit que $\rho(X,Y) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 21.

(1) Si X suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, on trouve que $G_X(t) = (pt+q)^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(2) Par transfert, on voit que $G_X(t) = E(t^X)$ et $G_X'(1) = E(X)$.
(3) On trouve que : $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$.
(4) Utiliser la question (2) et le lemme des coalitions.

Exercice 22.

(1) On voit que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
(2) On trouve que $P([X_1 = k] \cap [X_2 = l]) = \binom{l}{n}\binom{k}{n-l} p^{k+l} q^{2n-2k-l}$ pour tous k, l.
(3) On obtient que $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq)$.
(4) On trouve que $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-q^2)$.
(5) Plus généralement, on montre que $X_1 + ... + X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-q^k)$.

Exercice 23.

(1) On trouve que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(na, \dfrac{1}{n}\right)$, $E(X_i) = a$ et $V(X_i) = \dfrac{a(n-1)}{n}$.
(2) Comme $X_1 + ... + X_n = na$, on voit que $V(X_1 + ... + X_n) = 0$. En développant cette variance et comme toutes les covariances qui apparaissent sont égales par un argument de symétrie, il s'ensuit que $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -\dfrac{a}{n}$ si $i \neq j$.
(3) On obtient que $\rho(X_1, X_2) = -\dfrac{1}{n-1}$. En particulier, on voit que $\rho(X_1, X_2) = -1$ si $n = 2$, ce qui n'est étonnant car alors $X_2 = 2a - X_1$, et donc X_2 est une fonction affine de X_1.

Exercice 24.

(1) A vérifier par récurrence sur q!
(2) (a) On trouve que $P(I_n > k) = \dfrac{\binom{m-k}{n}}{\binom{m}{n}}$ pour tout $k \in [\![1, m-n+1]\!]$, et le reste s'en déduit.
(b) A l'aide des questions (1) et (2)(a), on trouve que $E(I_n) = \dfrac{m+1}{n+1}$.
(3) (a) On trouve que $P(S_n \leq k) = \dfrac{\binom{k}{n}}{\binom{m}{n}}$ pour tout $k \in [\![n, m]\!]$, et le reste s'en déduit.
(b) A l'aide des questions (1) et (3)(a), on trouve que $E(S_n) = \dfrac{n(m+1)}{n+1}$.

Exercice 25.

(1) La loi de L_1 est donnée par : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(L_1 = k) = p^k q + p q^k$.
(2) Vérifier que L_1 admet un moment d'ordre 2 par transfert, en utilisant les séries géométriques et leurs dérivées. De plus, on trouve que :

$$E(L_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.$$

(3) La loi du couple (L_1, L_2) est donnée par :

$$\forall (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad P([L_1 = k] \cap [L_2 = l]) = p^{k+1} q^l + q^{k+1} p^l.$$

(4) En utilisant la formule des probas totales, on obtient que : $\forall l \in \mathbb{N}^*$, $P(L_2 = l) = p^2q^{l-1} + q^2p^{l-1}$.
(5) Procéder comme à la question (2). On trouve que $E(L_2) = 2$.
(6) On vérifie que la loi conjointe de (L_1, L_2, L_3) est donnée par :

$$\forall (i,j,k) \in (\mathbb{N}^*)^3, \quad P([L_1 = i] \cap [L_2 = j] \cap [L_3 = k]) = p^{i+k}q^{j+1} + q^{i+k}p^{j+1}.$$

En utilisant la formule des probas totales avec le s.c.e. $([L_1 = i] \cap [L_2 = j])_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, on trouve que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(L_3 = k) = p^kq + pq^k.$$

(7) Vérifier que L_1, L_2 admettent un moment d'ordre 2, et en déduire l'existence de $\text{cov}(L_1, L_2)$.
(8) Par transfert, on trouve que : $E(L_1L_2) = \dfrac{1}{pq}$. De plus, on obtient d'après Koenig-Huygens que :

$$\text{cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{pq} - 2\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) = \frac{-2(2p-1)^2}{pq} \leq 0.$$

Exercice 26.

(1) Par convolution discrète, on trouve que la loi de U est donnée par :

$$\forall k \in [\![2, +\infty[\![, \quad P(U = k) = (k-1)p^2q^{k-2}.$$

(2) On trouve que, pour tout $[\![1, n-1]\!]$, $P_{[U=n]}(X_1 = k) = \dfrac{1}{n-1}$.
(3) Sachant $[U = n]$, X_1 suit la loi uniforme sur $[\![1, n-1]\!]$, et donc $E(X_1 | [U = n]) = \dfrac{n}{2}$. D'après la formule de l'espérance totale, on en déduit que $E(X_1) = \dfrac{1}{2}E(U) = \dfrac{1}{p}$.
(4) La loi de V est donnée par : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(V = k) = \dfrac{p^2q^{|k|}}{1-p^2}$.
(5) On trouve que $\text{cov}(U, V) = 0$.
(6) U et V ne sont pas indépendantes (comparer pour cela $P([U = 2] \cap [V = 0])$ et $P(U = 2)P(V = 0)$).

Exercice 27.

(1) A faire!
(2) On trouve que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$. De plus, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes (comparer pour cela $P([X = 0] \cap [Y = 0])$ et $P(X = 0)P(Y = 0)$).
(3) Sachant $[X = n]$, on a $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
(4) On trouve que : $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda pq)$.
(5) Vérifier par le calcul que les variables aléatoires Y et Z sont indépendantes.

Exercice 28.

(1) Tout d'abord, l'intégrale u_n est faussement impropre en 0. Par comparaison avec une intégrale de Riemann en $+\infty$, on en déduit que l'intégrale u_n converge. De plus, on trouve par IPP et avec le résultat admis début d'exercice que :

$$u_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(2) (a) Effectuer le changement de variable $u = st$.
(b) Avec l'indication donnée et la question précédente, on trouve que : $u_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
(3) (a) On obtient que $E(S_n) = 0$ et $V(S_n) = n$.
(b) Par transfert, on trouve que $E(\sin(X_1t)) = 0$ et $E(\cos(X_1t)) = \cos(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(c) Pour l'hérédité de la récurrence, on utilise la formule d'addition pour cos, le lemme des coalitions et la question précédente, de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
E(\cos(S_{n+1}t)) &= E\left(\cos(S_nt)\cos(X_{n+1}t) - \sin(S_nt)\sin(X_{n+1}t)\right) \\
&= E\left(\cos(S_nt)\right)E\left(\cos(X_{n+1}t)\right) - E\left(\sin(S_nt)\right)E\left(\sin(X_{n+1}t)\right) \\
&= E\left(\cos(S_nt)\right) \times \cos(t) - E\left(\sin(S_nt)\right) \times 0 \\
&= \cos^n(t) \times \cos(t) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \cos^{n+1}(t),
\end{aligned}$$

et là, on peut conclure!

(d) D'après la question (2)(a), on a :

$$|S_n| = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(S_n t)}{t^2}dt.$$

Dès lors, on trouve par linéarité de l'intégrale et par transfert que :

$$\begin{aligned}
E(|S_n|) &= \sum_{-n\le k\le n} |k|P(S_n=k)\\
&= \sum_{-n\le k\le n} \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(kt)}{t^2}dtP(S_n=k)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sum_{-n\le k\le n}\frac{1-\cos(kt)}{t^2}P(S_n=k)dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\sum_{-n\le k\le n}\cos(kt)P(S_n=k)}{t^2}dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-E(\cos(S_n t))}{t^2}dt\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos^n(t)}{t^2}dt \quad = \quad \frac{2}{\pi}u_n.
\end{aligned}$$

Exercice 29.

(1) On trouve que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $P([Z_n\ge k]) = (q_1...q_n)^{k-1}$. On en déduit que : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q_1...q_n)$.

(2) Après calculs et télescopage, on trouve que :

$$q_1...q_n = \prod_{i=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \prod_{i=2}^{n+1}\left(\frac{(i-1)(i+1)}{i^2}\right) = ... = \frac{n+2}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n=k) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 30.

(1) Pour tout $(k,l)\in\mathbb{N}^2$, on voit que :

$$P([X=k]\cap[Y=l]) = P([X=k]\cap[N=k+l]) = P\left(\left[\sum_{i=1}^{k+l}U_i = k\right]\cap[N=k+l]\right).$$

Par stabilité par addition, on obtient que $\sum_{i=1}^{k+l}U_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k+l,p)$. D'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{k+l}U_i$ et N sont indépendantes, ce qui permet de conclure.

(2) Vérifier que X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda p)$, que Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda q)$, où $q=1-p$, puis que X et Y sont indépendantes.

(3) (a) En utilisant la question (1), exprimer $P([X=k+1]\cap[Y=l])$ et $P([X=k]\cap[Y=l+1])$ à l'aide de $k,l,p,q,P([N=k+l+1])$, puis conclure avec l'indépendance de X et Y et les propriétés des coefficients binomiaux.

$$(k+1)P(X=k+1)P(Y=l)(1-p) = (l+1)P(X=k)P(Y=l+1)p.$$

(b) A l'aide de la question précédente, on voit que l'expression $\dfrac{(k+1)P(X=k+1)}{P(X=k)}$ ne dépend que de l et non de k, et donc elle est constante égale à un certain réel $\alpha>0$. Par récurrence, on montre que $P(X=k) = \dfrac{\alpha^k}{k!}P(X=0)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En sommant tous les $P(X=k)$, on en déduit que $P(X=0)=e^{-\alpha}$, et donc X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$. De même, on vérifie que Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\beta)$ pour un certain réel $\beta>0$.

(c) Par stabilité par addition de la loi de Poisson, on trouve que $N\hookrightarrow\mathcal{P}(\alpha+\beta)$.

Exercice 31.

(1) On trouve que $X\hookrightarrow\mathcal{G}(1/3)$, $E(X)=3$ et $V(X)=6$.

(2) On trouve que $W\hookrightarrow\mathcal{G}(2/3)$, $E(W)=3/2$ et $V(W)=3/4$.

(3) Déterminer d'abord la loi du couple (X,Y), puis calculer $P_{[W=k]}(U=l)$ à l'aide de cette loi et conclure.

(4) Comme la loi de U sachant $[W = k]$ ne dépend pas de k, on voit que cette loi est aussi celle de U, et donc $U \hookrightarrow \mathcal{G}(1/3)$. Qui plus, les variables aléatoires U et W sont indépendantes.
(5) Vérifier que $U + W$ est égale à $\max\{X, Y\}$, et en déduire que $U + 2W = X + Y$.
(6) A l'aide de la question précédente et de l'indépendance de U et W, on trouve que $\operatorname{cov}(X, Y) = -3/2$. En fait, on voit que, si X est grand, alors il y a plus de chances que les premiers tirages aient donné une boule noire, et donc Y aura tendance à être petit. En d'autres termes, X et Y devraient varier en sens inverse, ce qui explique le signe négatif de la covariance.

Exercice 32.

(1) Soit I l'événement "M est inversible". Vérifier que M est non inversible si et seulement si $X_1^2 - Y X_2^2 = 0$. A l'aide de la formule des probabilités totales, on trouve alors que :
$$P(I) = \frac{8}{9} - \frac{4p}{45}.$$
(2) Soit D l'événement "M est diagonalisable". Vérifier que le spectre de M est égal à $\{X_1 - X_2, X_1 + X_2\}$ si $Y = 1$, à $\{X_1\}$ si $Y = -1$ et $X_2 = 0$, à $\emptyset$ si $Y = -1$ et $X_2 \neq 0$. Comme M est diagonale si $X_2 = 0$, on voit que M est diagonalisable si et seulement si $Y = 1$ ou si $Y = -1$ et $X_2 = 0$. A l'aide de la formule des probabilités totales, on trouve alors que :
$$P(D) = p + (1 - p)e^{-\lambda}.$$