

TRAVAUX DIRIGÉS : ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

Exercice 1. Soit E un espace euclidien, soient a, b deux vecteurs non nuls de E et soit φ l'endomorphisme de E défini par $\varphi(x) = x + \langle x, a \rangle b$. Montrer que φ est symétrique si et seulement si la famille (a, b) est liée.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . Montrer que $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, c'est-à-dire le produit scalaire défini pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$.

- (1) Montrer que $f : A \mapsto {}^tA$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (2) Calculer $f \circ f$, et en déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Exercice 4. Pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$, et on considère l'application f définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ par : $f(P) : x \mapsto 2xP'(x) + (x^2 - 1)P''(x)$.

- (1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- (2) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[x]$. Qu'en déduit-on sur f ?
- (3) Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (4) En déduire le spectre de f , et retrouver le résultat de la question (2).

Exercice 5. (Isométries d'un espace euclidien) Soit E un espace euclidien, soit u un élément non nul de E , soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et soit $f : E \rightarrow E$ l'application définie pour tout $x \in E$ par $f(x) = x + \alpha \langle x, u \rangle u$. On dit qu'un endomorphisme g de E est une *isométrie* s'il conserve les distances, c'est-à-dire si : $\forall x \in E, \|g(x)\| = \|x\|$.

- (1) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E .
- (2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
- (3) Déterminer à quelle condition sur u et α l'endomorphisme f est une isométrie. Sous cette condition, calculer $\ker(f - \text{Id}_E)$ et $\ker(f + \text{Id}_E)$, et caractériser l'endomorphisme f .
- (4) Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . On pose : $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(h)$.
 - (a) Montrer que h est une isométrie si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, \langle h(x), h(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
 - (b) En déduire que h est une isométrie si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Exercice 6. (Contractions d'un espace euclidien) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Un endomorphisme f de E est appelé une *contraction* si : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$. Montrer qu'un endomorphisme symétrique f de E est une contraction si et seulement si : $\forall \lambda \in \text{Sp}(f), |\lambda| \leq 1$.

Exercice 7. Déterminer la matrice dans la base canonique de E de la projection orthogonale sur F , et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \text{Vect}((1, 2))$.
- (2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}((3, 1, 2))$.
- (3) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}((1, 2, 1), (1, 1, 0))$.
- (4) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 1))$.
- (5) $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y - z + 2t = 0\}$.
- (6) $E = \mathbb{R}_2[x]$ (muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$) et $F = \text{Vect}(x \mapsto x - 1)$.
- (7) $E = \mathbb{R}_2[x]$ (muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$) et $F = \text{Vect}(x \mapsto x, x \mapsto x^2)$.

Exercice 8. Soient $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $a = (a_1, \dots, a_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $a \neq (0, \dots, 0)$, et considérons le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ donné par $F = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Montrer que la distance d de u à F est donnée par :

$$d = \frac{|a_1u_1 + \dots + a_nu_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$

Exercice 9. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$ pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_3[x])^2$. Existence et calcul de $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - at - b)^2 e^{-t} dt$.

Exercice 10. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^3 P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_3[x])^2$. Calculer la distance de $R : x \mapsto x^3$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tM = M$ et $M^2 = 0$.

Exercice 12. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, s'il existe un entier $p > 0$ tel que $A^p = I_n$, alors $A^2 = I_n$. Que peut-on dire de A si l'on suppose maintenant qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $A^p = 0$?

Exercice 13. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

- (1) Justifier que la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (2) Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de A .
- (3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Justifier que $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, puis la diagonaliser en base orthonormée.

Exercice 15. Etudier le signe de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$, et ce dans chacun des cas suivants :

- (1) $q(x, y) = x^2 + xy + y^2$, (2) $q(x, y) = x^2 - 3xy - 2y^2$, (3) $q(x, y, z) = x^2 + 2xy - xz + y^2 + z^2$.

Exercice 16. (Matrices de Gram) Soit E un espace euclidien E de dimension ≥ 1 . Pour toute famille $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs de E , on définit la matrice de Gram de $(e_1, \dots, e_n)$ par $G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- (1) Soit X un vecteur colonne de composantes $x_1, \dots, x_n$. Calculer tXGX en fonction de $\sum_{i=1}^n x_i e_i$.
- (2) En déduire que la matrice G est symétrique et à valeurs propres ≥ 0 .
- (3) Soit λ_1 la plus petite valeur propre de G . Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXGX \geq \lambda_1 {}^tXX$.
- (4) En déduire que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si la matrice G est inversible.

Exercice 17. (QSP HEC 2012) Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E . On suppose qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \alpha \|x\|$. Montrer que $f^2 = \alpha^2 \text{Id}_E$.

Exercice 18. (QSP HEC 2014) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} > 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- (1) Montrer que, pour tout vecteur colonne non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tXAX > 0$.
- (2) Justifier que la matrice A est diagonalisable et inversible. Que dire du signe de ses valeurs propres?

Exercice 19. (ESCP 2017) Soit n un entier ≥ 3 . On pose $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on identifie avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Soient A, B deux éléments non colinéaires de E et posons $M = A^tB + B^tA$. Enfin, on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M (c'est-à-dire $f : X \mapsto MX$), et l'on pose $E_1 = \text{Vect}(A, B)$.

- (1) Déterminer le rang de M ainsi que le noyau de f .
- (2) Justifier que l'endomorphisme f est diagonalisable.
- (3) (a) Montrer que la restriction de f à E_1 induit un endomorphisme de E_1 noté φ .
 (b) Donner la matrice de φ dans la base (A, B) de E_1 .
 (c) Déterminer les valeurs propres de φ .
 (d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable? Justifier.
 (e) En déduire les valeurs propres de f .

Exercice 20. (QSP HEC 2023) Soit N un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $N^k = 0$ pour un certain entier $k \geq 1$. On suppose de plus que $N^tN = {}^tNN$. Montrer que $N = 0$ (indication : vérifier que ${}^tNN = 0$).

Exercice 21. (Matrices symétriques positives) Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles de taille n . Une matrice symétrique (réelle) est dite *positive* si la forme quadratique associée est positive sur $\mathbb{R}^n$.

- (1) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont ≥ 0 .
- (2) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = {}^tBB$.
- (3) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est positive si et seulement si : $\exists S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A = S^2$.
- (4) En déduire que, si A est symétrique positive inversible, alors son inverse est aussi positive.

1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 22. Soit n un entier ≥ 2 . On désigne par $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, et on munit $\mathbb{R}_n[x]$ du produit scalaire défini pour tous $P : x \mapsto \sum_{i=0}^n a_i x^i$ et $Q : x \mapsto \sum_{i=0}^n b_i x^i$ par $\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n a_i b_i$.

- (1) Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(P)(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
 - (b) Calculer la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
 - (c) Calculer $f \circ f$, et en déduire les valeurs propres possibles de f .
 - (d) Montrer que l'endomorphisme f est symétrique. Qu'en déduit-on sur f ?
 - (e) A l'aide de la trace, déterminer le spectre de f , ainsi que les dimensions des sous-espaces propres de f en fonction de la parité de n .
- (2) Dans cette question, on pose $H = \{P \in E, P(1) = 0\}$.
 - (a) Déterminer une base orthonormée de $H^\perp$.
 - (b) En déduire la distance de e_1 à H .

Exercice 23. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

- (1)
 - (a) Déterminer une base orthonormée de F .
 - (b) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
 - (c) Calculer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F .
 - (d) En déduire la distance du vecteur $x = (1, 0, 0, 0)$ à F .
- (2) Reprendre les questions précédentes avec $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

Exercice 24. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique $(A, B) \mapsto \text{Tr}(^tAB)$, on désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Enfin, on considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (2) Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (3) On suppose ici que $n = 3$. Calculer la distance de M au sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 25. Justifier que la matrice M est diagonalisable, puis la diagonaliser en base orthonormée, et ce dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned} (1) \quad M &= \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, & (2) \quad M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (3) \quad M &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, & (4) \quad M &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 26. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (1) On suppose que A est symétrique, et on désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. En calculant $\text{Tr}(^tAA)$ de deux façons, montrer que :

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

- (2) Montrer que, pour tout espace vectoriel E de dimension finie et pour tout projecteur p de E , on a :

$$\text{rg}(p) = \text{Tr}(p).$$

- (3) En déduire que, si E est un espace euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et si p est un projecteur orthogonal de E , alors :

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \text{rg}(p).$$

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^t M M^t M M = I_n$.

Exercice 28. Etudier le signe de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1) \quad q(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz, \quad (2) \quad q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - yz.$$

Exercice 29. (Polynômes de Jacobi) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt.$$

- (1) Justifier que l'intégrale ci-dessus converge.
- (2) Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- (3) On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $\varphi(P) : x \mapsto (x^2 - 1)P''(x) + (2x + 1)P'(x)$.
 - (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
 - (b) L'endomorphisme φ est-il inversible? Justifier.
 - (c) Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable.
 - (d) Montrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]$, on a :

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 (1-t)^{3/2}(1+t)^{1/2}P'(t)Q'(t)dt$$

- (e) Retrouver ainsi le fait que φ soit diagonalisable.

Exercice 30. (QSP HEC 2017) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée notée $\| \cdot \|$. Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. On pose $\rho = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(f)\}$. Montrer que :

$$\rho = \sup \left\{ \frac{|\langle f(x), x \rangle|}{\|x\|^2}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\} \right\}.$$

Exercice 31. (Endomorphismes antisymétriques - HEC 2017) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Dans tout l'exercice, on considère un endomorphisme φ de E dit *antisymétrique*, c'est-à-dire tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle \varphi(x), y \rangle = -\langle x, \varphi(y) \rangle.$$

- (1) Question de cours : définition et propriétés d'un produit scalaire.
- (2)
 - (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, on a : $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$.
 - (b) Etablir que $\text{Im}(\varphi) = \ker(\varphi)^\perp$.
 - (c) Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par φ , alors $F^\perp$ est aussi stable par φ .
 - (d) Montrer que $\ker(\varphi^2) = \ker(\varphi)$.
 - (e) Etablir que le spectre de φ est soit vide, soit réduit à $\{0\}$.
- (3) Montrer que les valeurs propres de φ^2 sont négatives ou nulles.
- (4) Dans cette question, on considère un sous-espace vectoriel F de E de dimension $p \geq 2$, un réel $\alpha > 0$ et un endomorphisme antisymétrique u de F tel que $u^2 = -\alpha^2 \text{Id}_F$.
 - (a) On suppose que $p = 2$. Etablir l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de F telle que la matrice A_α de u dans la base $\mathcal{B}$ soit donnée par :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur p , montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de F telle que la matrice B_α de u dans la base $\mathcal{B}$ soit donnée par :

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & (0) & \cdots & (0) \\ (0) & A_\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & (0) & A_\alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 32. (ESCP 2021) Soit n un entier ≥ 3 et soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On désigne par u l'endomorphisme de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M . On munit E du produit scalaire canonique, qui fait de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée. En outre, on pose :

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), v_1 = v_n = \sum_{k=2}^{n-1} v_k = 0 \right\}.$$

- (1) La matrice M est-elle diagonalisable? Justifier.
- (2) Déterminer la dimension, puis une base du noyau de u .
- (3) Déterminer les valeurs propres de M , ainsi qu'une base de vecteurs propres pour chacun des sous-espaces propres de M autres que celui associé à la valeur propre 0.
- (4) Déterminer une base de V et une base de $V^\perp$.
- (5) Montrer que V et $V^\perp$ sont stables par u .
- (6) Montrer que, pour $n \geq 4$, il y a une infinité de droites vectorielles de E stables par u , ainsi qu'une infinité de plans vectoriels de E stables par u .

Exercice 33. (Décomposition polaire d'une matrice - ESCP 2021) Soit n un entier ≥ 2 et soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = {}^tMM$.

- (1) On suppose dans cette question que M est inversible.
 - (a) Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont toutes strictement positives.
 - (b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et des réels $\mu_1, \dots, \mu_n > 0$ tels que :

$$A = P \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n^2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- (c) En déduire qu'il existe une matrice symétrique S que l'on précisera telle que $A = S^2$.
- (d) Montrer que $T = MS^{-1}$ est une matrice orthogonale.

On admet que le résultat démontré dans la question (1) reste valable si M n'est pas inversible, c'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonale $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice symétrique $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = TS$. Cette écriture s'appelle la décomposition polaire d'une matrice.

- (2)
 - (a) Montrer que $\text{Tr}(A) \geq 0$, puis que $\text{Tr}(A) = 0$ si et seulement si M est la matrice nulle.
 - (b) En étudiant l'application $h : x \mapsto \text{Tr}({}^t(M + xI_n)(M + xI_n))$, montrer que : $(\text{Tr}(M))^2 \leq n\text{Tr}(A)$.
 - (c) Etudier les cas d'égalité dans l'inégalité montrée dans la question (2)(b).

Exercice 34. (Polynômes de Laguerre - ESCP 2022) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$, on pose (sous réserve de convergence) :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $f(P) : x \mapsto xP''(x) + (1-x)P'(x)$.

- (1) Pour tout $(k, l) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$, montrer que l'intégrale $\varphi(x \mapsto x^k, x \mapsto x^l)$ converge et donner sa valeur.
- (2) Montrer que l'application φ est bien définie et que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.
- (3) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (4) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (5) Déterminer le spectre de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable?
- (6) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire P_k de degré k tel que :

$$\ker(f + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[x]}) = \text{Vect}(P_k).$$

- (7) Montrer que l'endomorphisme f est symétrique.
- (8) Qu'en déduit-on sur la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$?

Exercice 35. (QSP HEC 2022) Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E . Déterminer à quelle condition sur x et y le projeté de x sur $\text{Vect}(y)$ est égal au projeté orthogonal de y sur $\text{Vect}(x)$. On pourra commencer par faire un dessin avec deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 36. (QSP HEC 2022) Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont données pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ par $a_{i,j} = \int_a^b f_i(t)f_j(t)dt$. Montrer que les valeurs propres de A sont toutes positives. A quelle condition sur $f_1, \dots, f_n$ sont-elles toutes strictement positives?