

TRAVAUX DIRIGÉS : ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

RÉPONSES - INDICATIONS

Exercice 1. A traiter avec le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 2. Vérifier que $\ker(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont orthogonaux, puis conclure avec le théorème du rang.

Exercice 3.

- (1) Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il est symétrique.
- (2) On trouve que $f \circ f = \text{Id}$, $\text{Sp}(f) = \{-1, 1\}$, $E_1(f) = S_n(\mathbb{R})$ et $E_{-1}(f) = A_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.

- (1) A faire!
- (2) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$, puis qu'il est symétrique en effectuant une IPP (dériver $t \mapsto (t^2 - 1)P'(t)$). Conclure que f est diagonalisable (d'après quel résultat?).
- (3) Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on trouve que :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

- (4) On obtient que $\text{Sp}(f) = \{k(k+1), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et f est diagonalisable.

Exercice 5.

- (1) Montrer que f est un endomorphisme de E , puis qu'il est symétrique.
- (2) On trouve que $\text{Sp}(f) = \{1, 1 + \alpha\|u\|^2\}$, $E_1(f) = (\text{Vect}(u))^\perp$ et $E_{1+\alpha\|u\|^2}(f) = \text{Vect}(u)$. On en déduit que l'endomorphisme f est diagonalisable.
- (3) On trouve que l'endomorphisme f est une isométrie si et seulement si $2 + \alpha\|u\|^2 = 0$. Sous cette condition, on obtient que $\ker(f - \text{Id}_E) = (\text{Vect}(u))^\perp$ et $\ker(f + \text{Id}_E) = \text{Vect}(u)$, et donc f est la symétrie sur $(\text{Vect}(u))^\perp$ parallèlement à $\text{Vect}(u)$.
- (4) (a) Utiliser l'identité de polarisation.
(b) Calculer $\langle h(x), h(y) \rangle$ en termes matriciels, et vérifier que ${}^tX{}^tPPY = {}^tXY$ pour tous vecteurs colonnes X, Y si et seulement si ${}^tPP = I_n$.

Exercice 6. Si l'on suppose que f est une contraction, alors il suffit de calculer $\|f(x)\|$ si x est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ , et on obtient que $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$. Réciproquement, supposons que l'endomorphisme f soit symétrique et que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, on ait $|\lambda| \leq 1$. On se donne une base orthonormée $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de f (laquelle existe d'après le théorème spectral). Il suffit alors de calculer $\|f(x)\|^2$ en exprimant le vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7.

- (1) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$
- (2) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$
- (3) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
- (4) $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

$$(5) \text{ mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 9 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 9 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$(6) \text{ mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(7) \text{ mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Montrer tout d'abord que $F = (\text{Vect}(u))^{\perp}$, puis que $p_{F^{\perp}}(x) = \frac{\langle x, u \rangle u}{\|u\|^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Conclure en utilisant le fait que $p_F(x) = x - p_{F^{\perp}}(x)$ et que la distance d se calcule à l'aide de $p_F(x)$.

Exercice 9. Utiliser le théorème sur la projection orthogonale pour justifier l'existence de ce minimum. De plus, on trouve après calculs que :

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - at - b)^2 e^{-t} dt = 360,$$

et que le projeté orthogonal de $x \mapsto x^3$ sur $\text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ est le polynôme $P_0 : x \mapsto 18x - 12$.

Exercice 10. Utiliser le théorème sur la projection orthogonale pour justifier l'existence de la distance d . De plus, on trouve après calculs que $d = 6$ et $p_{\mathbb{R}_2[x]}(x \mapsto x^3) = (x \mapsto 3x^2 - 3x + 1)$.

Exercice 11. Comme ${}^tM = M$, la matrice M est diagonalisable d'après le théorème spectral. Comme $M^2 = 0$, le polynôme $x \mapsto x^2$ est annulateur de M , et donc 0 est la seule valeur propre de M . Il suffit alors de conclure.

Exercice 12. Montrer tout d'abord que les seules valeurs propres possibles de A sont $-1, 1$. Conclure alors que $A^2 = I_n$ en utilisant le théorème spectral. Si maintenant $A^p = 0$, on montre de même que $A = 0$.

Exercice 13.

(1) Citer le théorème spectral.

(2) On a : $\text{Sp}(A) = \{0, 3, 6\}$, $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $E_6(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

Une base orthonormale de vecteurs propres de A est donnée par :

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

(3) On trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \frac{6^n - 2(3^n)}{18} A^2 + \frac{4(3^n) - 6^n}{6} A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4(3^n) + 6^n & -2(3^n) - 2(6^n) & -4(3^n) + 2(6^n) \\ -2(3^n) - 2(6^n) & (3^n) + 4(6^n) & 2(3^n) - 4(6^n) \\ -4(3^n) + 2(6^n) & 2(3^n) - 4(6^n) & 4(3^n) + 4(6^n) \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. La matrice A est diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral. De plus, on trouve que $A = PDP^{-1}$, où P et D sont les matrices orthogonale et diagonale suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15.

(1) q est positive sur $\mathbb{R}^2$, (2) q change de signe sur $\mathbb{R}^2$, (3) q change de signe sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16.

(1) On trouve que ${}^tXGX = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|^2$.

(2) Utiliser la question (1) et la symétrie du produit scalaire.

- (3) Ecrire X dans une base orthonormée de vecteurs propres de G et faire les calculs, puis la minoration.
- (4) Utiliser les questions (1) et (3).

Exercice 17. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de f , montrer que α et $-\alpha$ sont les seules valeurs propres possibles de f . En déduire que α^2 est la seule valeur propre de f , et conclure.

Exercice 18.

- (1) Vérifier par le calcul que : ${}^tXAX = \sum_{i=1}^n (a_{i,i} - 1)x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$. Conclure.
- (2) La matrice A est diagonalisable d'après le théorème spectral. De plus, elle est inversible car ses valeurs propres sont > 0 , et donc 0 n'appartient pas à $\text{Sp}(A)$.

Exercice 19.

- (1) On trouve que $\text{rg}(M) = 2$ et $\ker(f) = \text{Vect}(A, B)^\perp$.
- (2) Montrer que f est symétrique.
- (3) (a) Montrer que f envoie E_1 dans E_1 .
 (b) On trouve que : $\text{mat}_{(A,B)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \langle A, B \rangle & \|B\|^2 \\ \|A\|^2 & \langle A, B \rangle \end{pmatrix}$.
 (c) On trouve que : $\text{Sp}(\varphi) = \{\langle A, B \rangle - \|A\| \cdot \|B\|, \langle A, B \rangle + \|A\| \cdot \|B\|\}$.
 (d) L'endomorphisme φ est symétrique par restriction, et donc il est diagonalisable.
 (e) On en déduit que : $\text{Sp}(f) = \{0, \langle A, B \rangle - \|A\| \cdot \|B\|, \langle A, B \rangle + \|A\| \cdot \|B\|\}$.

Exercice 20. Comme $N^tN = {}^tNN$, montrer que $({}^tNN)^p = {}^t(N^p)(N^p) = 0$. On peut alors vérifier que $M = {}^tNN$ est symétrique et conclure avec l'exercice 12. Sinon, il suffit de calculer ${}^tX{}^tNNX$ pour tout vecteur colonne X , afin d'obtenir que $N = 0$.

Exercice 21.

- (1) A faire!
- (2) Supposons que A soit positive. On écrit alors que $A = PDP^{-1}$, où P est orthogonale et D est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si l'on pose $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est la matrice diagonale, de coefficients diagonaux $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$, alors il reste à vérifier que ${}^tBB = A$.
 Pour la réciproque, calculer ${}^tX{}^tBBX$ et conclure.
- (3) Procéder comme à la question (2) et vérifier que la matrice B est symétrique.
- (4) Supposons que A soit symétrique positive inversible. On commence par établir que toutes les valeurs propres de A sont > 0 . Il reste à vérifier que, si $A = S^2$, alors on a $A^{-1} = (S^{-1})^2$ et on conclut.

1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 22.

- (1) (a) A faire par le calcul!
- (b) On trouve que :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Vérifier que $f \circ f = \text{Id}_E$, et en déduire que $\text{Sp}(f) \subset \{-1, 1\}$,
- (d) Etablir que $\langle f(P), Q \rangle = \sum_{i=0}^n a_{n-i}b_i$, puis conclure. On en déduit que f est diagonalisable d'après le théorème spectral.
- (e) Remarquer que la trace de f (qui est aussi celle de M) est égale à la somme des valeurs propres de f (comptées avec multiplicités). Par ailleurs, on voit que $\text{Tr}(M) = 1$ si n est pair, et $\text{Tr}(M) = 0$ si n est impair. A partir de là, on peut vérifier que 1 et -1 sont bien valeurs propres de f . Qui plus est, on obtient avec la trace que $\dim E_1(f) = \frac{n}{2} + 1$ et $\dim E_{-1}(f) = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $\dim E_1(f) = \frac{n+1}{2}$ et $\dim E_{-1}(f) = \frac{n+1}{2}$ si n est impair.
- (2) (a) On trouve que $\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n+1}}(1 + x + \dots + x^n)\right)$ est une base orthonormée de $H^\perp$.
 (b) Si d est la distance de e_1 à H , on obtient après calculs que $d = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Exercice 23.

- (1) (a) On trouve que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 0, 1)\right)$ est une base orthonormée de F .

- (b) On obtient que $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1)\right)$ est une base orthonormée de $F^\perp$.
 (c) Après calculs, on trouve que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Si d est la distance du vecteur $x = (1, 0, 0, 0)$ à F , on trouve que : $d = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 (2) Après calculs (et notamment utilisation du procédé d'orthonormalisation de Schmidt), on obtient que $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -4, 3)\right)$ est une base orthonormée de F et $\left(\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2\sqrt{5}}(-3, -1, 1, 3)\right)$ est une base orthonormée de $F^\perp$. De plus, on a :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad d = \sqrt{\frac{7}{10}}.$$

Exercice 24.

- (1) Vérifier par Analyse-Synthèse que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, puis montrer que $\text{Tr}(SA) = 0$ si S est symétrique et A est antisymétrique, et conclure.
 (2) Avec la question précédente, on trouve que $p(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.
 (3) Si d est la distance de M à $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, on obtient que $d = 1$.

Exercice 25. Utiliser le théorème spectral. Par ailleurs, on trouve que :

$$(1) \quad M = PD^tP \text{ avec } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \quad M = PD^tP \text{ avec } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \quad M = PD^tP \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \quad M = PD^tP \text{ avec } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26.

- (1) Exprimer $\text{Tr}({}^tAA)$ en fonction des $a_{i,j}$ par un calcul direct, puis utiliser le théorème spectral pour calculer $\text{Tr}({}^tAA)$ en fonction des λ_k .
 (2) Calculer la trace de p en utilisant une base adaptée à la décomposition $E = \mathcal{I}\mathfrak{m}(p) \oplus \ker(p)$.
 (3) Appliquer les résultats des questions (1) et (2) à la matrice A de l'endomorphisme p dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 27. Si $M^tMM^tMM = I_n$, vérifier tout d'abord que M est symétrique, et en déduire que $M^5 = I_n$. A l'aide du théorème spectral, montrer alors que $M = I_n$.

Exercice 28. On trouve que la première forme quadratique change de signe sur $\mathbb{R}^3$, et que la seconde est positive sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 29.

- (1) Il suffit de montrer que cette intégrale converge absolument. Pour ce faire, on utilise le changement de variable $u = 1 + t$, puis on effectue une comparaison par rapport à une intégrale de la forme $\int_0^2 \frac{M}{\sqrt{u}} du$.
 (2) A faire!
 (3) (a) Vérifier que φ est linéaire et que $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
 (b) L'endomorphisme φ n'est pas inversible (calculer $\varphi(x \mapsto 1)$).

- (c) Calculer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ et en déduire le spectre de φ .
- (d) Procéder par IPP!
- (e) Vérifier que φ est symétrique, et conclure.

Exercice 30. Calculer $\langle f(x), x \rangle$ en exprimant le vecteur x dans une base orthonormée de vecteurs propres de f , puis conclure.

Exercice 31.

- (1) Cf. cours!
- (2) (a) Si $x \in E$, remarquer que $\langle \varphi(x), x \rangle = -\langle x, \varphi(x) \rangle$, et conclure par symétrie du produit scalaire.
- (b) Procéder comme à l'exo 2.
- (c) Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E stable par φ . Alors on a $\langle \varphi(x), y \rangle = 0$ pour tout $x \in F$ et pour tout $y \in F^\perp$. Par antisymétrie de φ , on a $\langle x, \varphi(y) \rangle = 0$ pour tout $x \in F$ et pour tout $y \in F^\perp$, et donc $\varphi(y)$ appartient à $F^\perp$ pour tout $y \in F^\perp$.
- (d) Vérifier l'inclusion $\ker(\varphi) \subset \ker(\varphi^2)$. Pour l'inclusion inverse, supposons que $x \in \ker(\varphi^2)$. Par antisymétrie de φ , on trouve que :

$$\langle \varphi^2(x), x \rangle = 0 = -\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle.$$

Conclure alors avec le caractère défini du produit scalaire que $\varphi(x) = 0$, et donc $x \in \ker(\varphi)$.

- (e) Supposons le spectre de φ non vide, et soit λ une valeur propre de φ , pour un vecteur propre x . En utilisant l'antisymétrie de φ et le fait que $\varphi(x) = \lambda x$, on trouve en calculant $\langle \varphi(x), x \rangle$ que $\lambda \|x\|^2 = -\lambda \|x\|^2$, et donc $\lambda = 0$ car $x \neq 0$.
- (3) Soit λ une valeur propre de φ^2 , pour un vecteur propre x . En utilisant l'antisymétrie de φ et le fait que $\varphi^2(x) = \lambda x$, vérifier que $\langle \varphi(x), \varphi(x) \rangle = -\lambda \langle x, x \rangle$, et conclure.
- (4) (a) Si x_1 est un vecteur unitaire de F , vérifier que $(x_1, \frac{1}{\alpha} u(x_1))$ est une base orthonormée de F , puis que la matrice de u dans cette base est égale à A_α .
- (b) Procéder par une récurrence forte sur p comme indiqué. Pour ce faire, on utilise le fait que, si x_1 est un vecteur non nul de F , alors le sous-espace vectoriel $G = \text{Vect}(x_1, u(x_1))$ est de dimension 2 et est stable par u . Qui plus est, $G^\perp$ est stable par u d'après la question (2)(c). On peut alors appliquer la question (4)(a) à la restriction de u à G et l'hypothèse de récurrence à la restriction de u à $G^\perp$.

Exercice 32.

- (1) Utiliser le théorème spectral!

(2) On trouve que $\dim \ker(u) = n - 2$ et $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\ker(u)$.

- (3) On obtient que $\text{Sp}(M) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$, où $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2}$. De plus, la famille

$$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{\lambda_1}(u), \text{ et la famille } \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_{\lambda_2}(u).$$

(4) On trouve que $\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de V et $\mathcal{B}_{V^\perp} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $V^\perp$.

- (5) Etablir que $V \subset \ker(u)$, et donc u envoie tout l'espace vectoriel V sur $\{0\}$. En outre, vérifier par le calcul que $\mathcal{B}_{V^\perp}$ s'envoie dans $V^\perp$ par u , et en déduire que $V^\perp$ est stable par u .
- (6) Supposons $n \geq 4$. D'après la question (2), on sait que $\dim \ker(u) \geq 2$, et donc toute droite vectorielle D de $\ker(u)$ est stable par u . En particulier, on a une infinité de telles droites. Qui plus est, si x_1 est un vecteur propre de u pour λ_1 et si D est une droite de $\ker(u)$, alors $P_D = D \oplus \text{Vect}(x_1)$ est un plan vectoriel de E stable par u . En outre, on peut vérifier que $P_D = P_{D'}$ si et seulement si $D = D'$. Il y a donc aussi une infinité de plans vectoriels stables par u (en faisant varier D dans $\ker(u)$).

Exercice 33.

- (1) (a) Vérifier que ${}^tA = A$ et conclure avec le théorème spectral. Calculer ensuite tXAX pour tout vecteur colonne X , et vérifier que les valeurs propres de A sont toutes ≥ 0 . Utiliser enfin le fait que M soit inversible pour établir que A l'est aussi, et donc ses valeurs propres sont toutes > 0 .
 (b) Utiliser la question précédente et le théorème spectral.
 (c) Procéder comme à l'exercice 20.
 (d) Calculer tTT .
- (2) (a) Calculer $\text{Tr}(A) = \text{Tr}({}^tMM)$ à l'aide des coefficients de M , puis conclure.
 (b) Développer h sous la forme d'un polynôme de degré 2, puis reproduire la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz en utilisant au passage le résultat de la question (2)(a).
 (c) On a égalité dans l'inégalité de la question (2)(b) si et seulement si M est un multiple de I_n .

Exercice 34.

- (1) Penser à la fonction Gamma d'Euler. On trouve que $\varphi(x \mapsto x^k, x \mapsto x^l) = (k+l)!$.
- (2) Utiliser la question précédente et la linéarité de l'intégrale pour montrer que φ est bien définie. Pour le reste, à faire!
- (3) Vérifier que f est linéaire et que $\deg(f(P)) \leq \deg(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$.
- (4) Si $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, on trouve que ;

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

- (5) D'après la question précédente, il s'ensuit que $\text{Sp}(f) = \{0, -1, -2, \dots, -n\}$. Comme f admet $n+1$ valeurs propres distinctes et que $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, on en déduit que f est diagonalisable.
- (6) Utiliser le fait que, comme f admet $n+1$ valeurs propres distinctes et que $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, tous les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.
- (7) Procéder par IPP en posant $u(t) = tP'(t)e^{-t}$ et $v(t) = Q(t)$.
- (8) On en déduit que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est orthogonale.

Exercice 35. Si u et v sont deux vecteurs non nuls de E et si $p_v(u)$ est le projeté orthogonal de u sur $\text{Vect}(v)$, montrer que :

$$p_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Utiliser ce résultat pour établir que $p_x(y) = p_y(x)$ si et seulement si soit x et y sont orthogonaux, soit $x = y$.

Exercice 36. Si X est le vecteur colonne de composantes $x_1, \dots, x_n$, vérifier que :

$${}^tXAX = \int_a^b (x_1 f_1(t) + \dots + x_n f_n(t))^2 dt.$$

Dès lors, la forme quadratique associée à A est positive, et donc les valeurs propres de A sont toutes positives. Vérifier de plus qu'elles sont toutes strictement positives si et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.