Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 14 : 12 janvier 2026)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les vecteurs aléatoires discrets, ainsi que sur les formules de Taylor et les développements limités, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Vecteurs aléatoires discrets:**
Définition et propriétés d'un vecteur aléatoire discret.
Système complet d'événements associés à un vecteur aléatoire discret.
Définition de la loi conjointe et des lois marginales d'un vecteur aléatoire discret.
Définition et propriétés de l'indépendance (mutuelle) de n variables aléatoires discrètes.
Suite de variables aléatoires discrètes (mutuellement) indépendantes.
Définition d'une fonction d'un vecteur aléatoire discret.
Espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes admettant une espérance.
Lemme des coalitions - Linéarité de l'espérance.
Expression de la variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes **(*)**.
Expression de la variance d'une somme de n variables aléatoires discrètes indépendantes.
Stabilité par addition de la loi binomiale et de la loi de Poisson.

(2) **Formules de Taylor - Développements limités (révisions):**
Formule de Taylor avec reste intégral - Inégalité de Taylor-Lagrange.
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Définition du développement limité d'une fonction à l'ordre n en un réel a.
Opérations sur les développements limités (somme, produit, substitution, etc).
Développements limités usuels de e^x, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
Applications des développements limités : recherche de limites et d'équivalents, allure locale du graphe d'une fonction au voisinage d'un point.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. On considère n personnes qui se répartissent au hasard dans 3 hôtels H_1, H_2, H_3. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on désigne par X_i le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i.

(1) Déterminer les lois de X_1, X_2, X_3 et $X_1 + X_2$.
(2) Donner la variance de $X_1 + X_2$, et en déduire la covariance de X_1 et X_2.

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et soit $p \in]0,1[$. Dans un bureau de poste, on suppose que le nombre N de personnes qui se présentent suit une loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que tout personne vient avec une probabilité p pour poster un envoi, et avec une probabilité $q = 1 - p$ pour effectuer une autre opération. Enfin, on suppose que chaque personne n'effectue qu'une opération, et qu'elles font ces opérations indépendamment les unes des autres. On désigne par X le nombre de personnes qui viennent poster une lettre, et par Y le nombre de celles qui viennent pour une autre opération.

(1) Déterminer la loi de X sachant $[N = j]$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
(2) Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).
(3) En déduire la loi, l'espérance et la variance de X, ainsi que celles de Y.
(4) Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $Y_k = X_k X_{k+1}$ et $V_n = Y_1 + ... + Y_n$.

(1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n pour tout $n \geq 1$, puis calculer $E(V_n)$.
(2) Calculer $\operatorname{cov}(Y_i, Y_{i+1})$, puis $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j)$ pour tous i, j tels que $i < j - 1$.
(3) En déduire l'expression de la variance de V_n en fonction de n.