TRAVAUX DIRIGÉS : VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ - LOIS CONTINUES CLASSIQUES

1. Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x > 1$ et par $f(x) = 0$ sinon.

(1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X, et donner la fonction de répartition de X.
(2) Soit n un entier ≥ 2, et soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de densité f.
   (a) Les variables aléatoires X_i admettent-elles une espérance? une variance? Justifier.
   (b) On pose $Y = \min\{X_1, ..., X_n\}$. Déterminer la loi de Y.
   (c) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance et la calculer.
   (d) On pose $Z = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Déterminer la loi de Z.
   (e) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance? une variance? Justifier.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et admettant une densité f continue sur $[0, +\infty[$. On suppose de plus que X admet une espérance.

(1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_0^x tf(t)dt = -xP([X \geq x]) + \int_0^x P([X \geq t])dt$.
(2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $0 \leq xP([X \geq x]) \leq \int_x^{+\infty} tf(t)dt = E(X) - \int_0^x tf(t)dt$.
(3) En déduire que $\lim_{x\to+\infty} xP([X \geq x]) = 0$.
(4) Montrer que $\int_0^{+\infty} P([X \geq t])dt$ converge et est égale à $E(X)$.

Exercice 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

(1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X, et donner une densité de X.
(2) Montrer que X admet des moments de tous ordres, puis calculer l'espérance de X.
(3) Déterminer la fonction de répartition de $Y = \frac{e^X - 1}{e^X + 1}$.
(4) En déduire que Y est une variable à densité, et donner une densité de Y.
(5) Montrer que Y admet une espérance que l'on calculera.

Exercice 4. (Loi exponentielle bilatérale) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \alpha e^{-|x|}$.

(1) (a) Trouver α pour que f soit une densité d'une variable aléatoire Z, puis calculer F_Z.
   On dit que la variable aléatoire Z suit la loi exponentielle bilatérale.
   (b) Soient Z_1, Z_2 deux variables aléatoires indépendantes de densité f. Calculer une densité de $Z_1 + Z_2$.
(2) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X, Y indépendantes à densité, de même densité g nulle sur $\mathbb{R}_-$ et telle que $g(x) = e^{-x}$ pour tout $x > 0$, et l'on pose $Z = X - Y$ et $T = |Z|$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition et une densité de $-Y$.
   (b) Calculer une densité de Z, ainsi que son espérance.
   (c) Montrer que T et X suivent la même loi, et en déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 5. (Loi de Rayleigh) Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$ si $t \geq 0$.

(1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.
(2) Déterminer la fonction de répartition de X.
(3) Justifier que X admet des moments de tous ordres.
(4) Calculer l'espérance et la variance de X.
(5) Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 6. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = F(x + 1) - F(x)$ est une densité de probabilité.

Exercice 7. (Loi de Cauchy - QSP HEC 2010) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{a}{x^2 + 1}$.

(1) Déterminer a pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.
(2) La variable aléatoire X admet-elle une espérance? Justifier.
(3) Montrer que X et $\frac{1}{X}$ ont même loi (*indication : calculer leurs fonctions de répartition*).

Exercice 8. (Loi d'Euler - ESCP 2012) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = \dfrac{2}{\pi(e^x + e^{-x})}$.

(1) Montrer que g est une densité d'une variable aléatoire X.
(2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
(3) Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.
(4) (a) Montrer que $Y = e^X$ est une variable à densité et déterminer une densité de Y.
  (b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? Justifier.
(5) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi que Y. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \sup(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ et $Z_n = \frac{n}{M_n}$.
  (a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.
  (b) Calculer $\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (*indication : calculer* $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$ *si* $x > 0$).

2. Lois continues classiques

Exercice 9. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $]0, 1]$.

(1) Déterminer la loi de $X = 2U + 3$.
(2) Calculer la loi de $Y = \ln(U)$, puis celle de $Z = \ln\left(\frac{1}{V}\right)$.
(3) On pose $T = \frac{U}{V}$. Déterminer la loi de $\ln(T)$, puis celle de T.

Exercice 10. Soient $U_1, ..., U_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes, définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = \min\{U_1, ..., U_n\}$ et $Y = \max\{U_1, ..., U_n\}$.

(1) Déterminer une densité de X, son espérance et sa variance.
(2) Déterminer une densité de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer la loi de $Y = \tan(X)$. La variable aléatoire Y admet une espérance? une variance? Justifier.

Exercice 12. Soient X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes à densité, qui suivent toutes la loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

(1) Justifier que $-\ln(X)$ est une variable aléatoire à densité, et en donner une densité.
(2) Calculer une densité de $\ln(X) + \ln(Y) + \ln(Z)$.
(3) En déduire une densité de XYZ.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y = -\sqrt{X}$. Que vaut $Y(\Omega)$? Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y.

Exercice 14. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$, et en déduire l'espérance et la variance de Y_n.

Exercice 15. Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Calculer une densité de $X + Y$. Même question si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Exercice 16. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi gamma de paramètre $\frac{1}{2}$.

(1) A l'aide de la loi normale centrée réduite, donner sans calcul la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.
(2) A l'aide du changement de variable $u = \frac{t^2}{2}$, montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
(3) Déterminer le moment $m_k(X)$ d'ordre k de X.

Exercice 17. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $4X - 3Y + 1$.

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

(1) Justifier que X admet des moments de tous ordres.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $E(X^{n+2})$ en fonction de $E(X^n)$ et de n.
(3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$E(X^n) = \begin{cases} \frac{(2p)!}{2^p p!} & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit X une variable exponentielle de paramètre 1 et soit Y une variable binomiale de paramètres $n, \frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que $Z = \frac{X}{Y+1}$ est une variable à densité et calculer une densité de Z.

Exercice 20. Soit U une variable uniforme sur $]0,1]$, et soit $q \in]0,1[$. Trouver la loi de $X = 1 + \left\lfloor \frac{\ln(U)}{\ln(q)} \right\rfloor$.

Exercice 21. (QSP HEC 2010) Soit n un entier ≥ 2, et soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$.

(1) Déterminer une densité de $Y_k = -\max\{X_1, ..., X_k\}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
(2) En déduire la valeur de $P([X_n \geq X_1] \cap ... \cap [X_n \geq X_{n-1}])$.

Exercice 22. (QSP HEC 2012) Soit X une variable aléatoire à densité telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^*$.

(1) Montrer que, si $X + \frac{1}{X}$ admet une espérance, alors X admet aussi une espérance.
(2) La réciproque est-elle vraie? Justifier (*indication : considérer une variable uniforme*).

Exercice 23. (QSP HEC 2013) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ et $Z = X - Y$.

(1) Montrer que Y est une variable aléatoire et déterminer sa loi. Que dire de $Y + 1$?
(2) Montrer que Z est une variable aléatoire et déterminer sa loi.
(3) Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes?

Exercice 24. (Loi du χ^2 de Pearson - ESCP 2019) On rappelle que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi du χ^2 à r degrés de liberté (notation : $X \hookrightarrow \chi^2(r)$) si X admet une densité donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^{(r/2)-1}e^{-x/2}}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

(1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\chi^2(r)$. On pose $Z = \frac{X}{2}$ et $\nu = \frac{r}{2}$.
  (a) Déterminer la loi de Z.
  (b) En déduire l'espérance et la variance de X.
(2) (a) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} e^{\lambda - t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

  (b) Soit Y_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi $\chi^2(2n)$. Montrer que $P([X_{2n} > 2\lambda]) = P([Y_\lambda < n])$.
  (c) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés un entier $n \geq 1$ et un réel $x > 0$, calcule et affiche la valeur de $P([X_{2n} > x])$.
(3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, ..., X_k$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
  (a) Déterminer la loi de X_1^2.
  (b) En déduire la loi de $\sum_{i=1}^n X_i^2$.
  (c) Soient r et s deux entiers tels que $2 < r < s$. Soient T_r et T_s deux variables aléatoires qui suivent respectivement la loi $\chi^2(r)$ et la loi $\chi^2(s)$. Tracer sur un même graphique l'allure des fonctions de répartition de T_r et T_s (*indication : comparer $P([T_r \leq x])$ et $P([T_s \leq x])$*).

Exercice 25. (QSP HEC 2021) Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]0, +\infty[$ et telles que $\ln(X)$ et $\ln(Y)$ suivent la loi normale centrée réduite. Calculer une densité de $Z = (X.Y)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 26. (QSP HEC 2022) Soit N une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, et soit X une variable de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de N. On suppose qu'elles sont toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et l'on pose $R = 1 - 2X$.

(1) Déterminer la loi de R.
(2) On pose $Y = RN$. Montrer que $\text{cov}(N, Y) = 0$.
(3) Les variables aléatoires N et Y sont-elles indépendantes?

3. Exercices supplémentaires

Exercice 27. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$.

(1) Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
(2) Calculer la fonction de répartition de X.
(3) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 28. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$.

(1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X (*indication : poser* $u = e^{-t/2}$).
(2) Calculer la fonction de répartition de X.
(3) La variable aléatoire X admet-elle une espérance et une variance? Justifier.
(4) Soit n un entier ≥ 2 et soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
  (a) Déterminer la loi de $Y_n = \max\{X_1, ..., X_n\}$.
  (b) La variable aléatoire Y_n admet-elle une espérance? Justifier.

Exercice 29. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$.

(1) Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
(2) Calculer la fonction de répartition de X.
(3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
(4) La variable aléatoire X admet-elle une variance? Justifier.

Exercice 30. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité, et ce dans chacun des cas suivants :

$$(1)\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin]1,2] \\ \dfrac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si} \quad t \in]1,2] \end{cases} \quad , \quad (2)\ f(t) = ae^{-t^2-2t}, \quad , \quad (3)\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{a}{t\sqrt{t}} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}.$$

Exercice 31. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4}{3}(1-x)^{1/3}$ si $0 \leq x \leq 1$, et par $f(x) = 0$ sinon.

(1) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
(2) Déterminer la fonction de répartition de X, puis construire sa courbe représentative.
(3) Calculer l'espérance de X, ainsi que la probabilité de l'événement $[7/8 \leq X]$.
(4) Soit n un entier ≥ 2 et soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X.
  (a) Déterminer la loi de $Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$.
  (b) Montrer que la variable aléatoire Y_n admet une espérance et la calculer.

Exercice 32. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\ln(x)$ si $x \in]0,1[$, et par $f(x) = 0$ sinon.

(1) Déterminer l'unique réel α tel que αf soit une densité d'une variable aléatoire X.
(2) Calculer $E(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 33. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$ si $x \geq 0$, et par $f(x) = 0$ sinon.

(1) Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
(2) A l'aide d'une majoration simple de $-t^2/2$, montrer que $x^n f(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(3) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
(4) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 34. Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité f est définie par $f(x) = e^{-|x|}$ si $-\ln(2) \leq x \leq \ln(2)$, et par $f(x) = 0$ sinon.

(1) Déterminer la fonction de répartition F de X.
(2) On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition G de Y.
(3) Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y.

Exercice 35. Etant donné des réels a, b, on pose $F(x) = \dfrac{a(x-2)}{b+x}$ si $x \geq 2$, et $F(x) = 0$ sinon.

(1) A quelles conditions sur a, b F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité?
(2) Sous ces conditions, calculer une densité de X. La variable aléatoire X admet-elle une espérance?

Exercice 36. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit X une variable aléatoire admettant une densité f telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(a-x) = f(x)$. On suppose de plus que X admet une espérance. Calculer alors cette espérance.

Exercice 37. Soit X une variable aléatoire admettant une densité f. On suppose que X est à valeurs positives, et on pose $Y = \lfloor X \rfloor$.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F de X.
(2) Montrer que $E(Y)$ existe si et seulement si $E(X)$ existe.
(3) Montrer que, si $E(X)$ existe, alors on a : $E(Y) \leq E(X) \leq E(Y) + 1$.

Exercice 38. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

(1) Donner la loi, l'espérance et la variance de $Y = 1 - X$.
(2) Déterminer la loi de $U = \min\{X, Y\}$. Que vaut $E(U)$?
(3) Déterminer la loi de $V = \max\{X, Y\}$. Que vaut $E(V)$?
(4) Donner la loi de $U + V$.

Exercice 39. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = 1 - |x|$ si $x \in [-1, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

(1) Montrer que f est une densité de probabilité.
(2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, telles que X admette f pour densité et Y suive la loi uniforme sur $[-1, 1]$.
  (a) Déterminer la loi de $Z = -Y$.
  (b) Calculer une densité h de $T = X - Y$.

Exercice 40. Soit X une variable uniforme sur $[-1, 2]$. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 41. Soit X une variable uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = e^{1/X}$.

Exercice 42. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
(2) Déterminer la densité de X^2, puis celle de X^3.
(3) Calculer $E(X^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(4) Calculer $P([\tan(X) > 0])$ et $E(e^{-X})$.

Exercice 43. Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, et posons $Y = X^2$. Déterminer une densité de Y, puis calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 44. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{E}(1)$.

(1) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-tX$.
(2) Montrer que la variable aléatoire $Y - tX$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{t+1} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ \dfrac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

(3) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = Y/X$.
(4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \frac{X}{X+Y}$.

Exercice 45. (Loi log-normale) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln(x)-1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

(1) (a) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X.
  (b) Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de celle de la loi normale centrée réduite.
  (c) Calculer l'espérance et la variance de X.
(2) Soit X une variable gaussienne de paramètres m et σ^2. On pose $Y = e^X$.
  (a) Déterminer une densité de Y.
  (b) Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 46. (Loi de Pareto) Soient $\alpha, a, x_0, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha, a > 0$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \left(\dfrac{a}{x - x_0} \right)^{\alpha+1} & \text{si} \quad x > x_0 + a \\ 0 & \text{si} \quad x \leq x_0 + a \end{cases}.$$

(1) Déterminer λ pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.
(2) Soit X une variable aléatoire de densité f, où λ est la valeur trouvée à la question (1).
  (a) Déterminer la fonction de répartition de X.
  (b) Etudier l'existence et les valeurs éventuelles de $E(X)$ et $V(X)$.
  (c) Déterminer la loi de $Z = \beta\gamma^T$, où $\beta > 0$, $\gamma > 1$ et $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\mu)$.

Exercice 47. (Entropie d'une variable à densité - ESCP 2015) Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires X à densité définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant un moment d'ordre 2 et telles qu'une densité f de X soit continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, et vérifie de plus la condition "$x \longmapsto x^2 f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$". On définit alors l'entropie de X par :

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln(f(x)) dx.$$

(1) Etudier les variations de la fonction $\eta : x \longmapsto -x\ln(x)$ sur $]0, \frac{1}{e}[$.
(2) Soit $X \in \mathcal{E}$. Montrer que $H(X)$ existe.
(3) Soit $Y_{\mu,\sigma}$ une variable normale d'espérance μ et de variance σ^2, et soit $g_{\mu,\sigma}$ une densité de $Y_{\mu,\sigma}$. Vérifier que $Y_{\mu,\sigma}$ appartient à $\mathcal{E}$ et calculer $H(Y_{\mu,\sigma})$.
(4) Soit X un élément de $\mathcal{E}$, de densité f. Pour tout $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$K_{\mu,\sigma}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln \left(\frac{f(x)}{g_{\mu,\sigma}(x)} \right) dx.$$

  (a) Montrer que cette quantité est bien définie.
  (b) Montrer que, pour tout $a > 0$, on a : $-\ln(a) \geq 1 - a$. En déduire que $K_{\mu,\sigma}(X) \geq 0$.
  (c) En déduire que $H(X) \leq H(Y_{m,s})$, où $m = E(X)$ et $s^2 = V(X)$.

Exercice 48. (ESCP 2017) Soit α un réel > 0 et soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\alpha$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et on désigne par g_n une densité de Z_n nulle $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) (a) Déterminer la fonction g_2.
  (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{n-1}$.
  (c) Calculer l'espérance de Z_n sous la forme d'une somme, puis donner un équivalent simple de $E(Z_n)$ quand n tend vers $+\infty$ (*indication : montrer que la suite* $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n))_{n \geq 1}$ *converge*).
  (d) Calculer la variance de Z_n sous la forme d'une somme, puis montrer que la suite $(V(Z_n))_{n \geq 1}$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \dfrac{1}{n} Z_n$.
  (a) Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.
  (b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(U_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V(U_n)$.

Exercice 49. (QSP HEC 2018) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

(1) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) e^{-x^2/2} \leq \sqrt{2\pi}\,(1 - \Phi(x)) \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

(*indication : utiliser des études de fonction*).
(2) Soit X une variable normale centrée réduite. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{[X \geq x]} \left(\left[X \geq x + \dfrac{1}{x} \right] \right)$.

Exercice 50. (QSP HEC 2024) Soient X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit Δ la droite du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation cartésienne $y = ax$. On note Y la variable aléatoire égale au carré de la distance de $M = (X_1, X_2)$ à Δ. Calculer l'espérance de Y.