# Programme de colles en Mathématiques
# ECG 2 (semaine 16 : 26 janvier 2026)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. *Comme il y a beaucoup de démonstrations au programme cette semaine, il n'y aura exceptionnellement pas d'exercice de début de colle.* Le programme portera sur le produit scalaire et les espaces euclidiens, ainsi que sur les endomorphismes et matrices symétriques, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Produit scalaire - Orthogonalité - Espaces euclidiens:**
Définition d'une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel $E$.
Définition d'une forme bilinéaire symétrique, définie, positive sur $E$.
Définition d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ et de la norme euclidienne associée $\|.\|$ sur $E$.
Produits scalaires canoniques et normes euclidiennes associées sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Formule $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ **(*)** - Identité de polarisation.
Inégalité de Cauchy-Schwarz **(*)**.
Propriétés de la norme euclidienne - Inégalité triangulaire **(*)**.
Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs - Théorème de Pythagore.
Définition d'une famille orthogonale et d'une famille orthonormée de vecteurs.
"Toute famille orthogonale de $E$ ne contenant pas le vecteur nul est libre".
"Toute famille orthonormée de $E$ est libre".
Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.
Définition de l'orthogonalité de deux sous-espaces vectoriels.
Définition et propriétés de base d'un espace euclidien $E$ de dimension $n$.
Définition d'une base orthonormée d'un espace euclidien $E$ de dimension $n$.
Existence d'une base orthonormée pour tout espace euclidien de dimension $n > 0$.
Théorème de la base incomplète orthonormée.
Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.
Expression matricielle du produit scalaire en base orthonormée.
Définition de la matrice du produit scalaire dans une base quelconque.
Expression matricielle du produit scalaire dans une base quelconque.
Définition d'une matrice orthogonale de taille $n$.
"Toute matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale".
Définition de l'orthogonal $F^{\perp}$ d'un sous-espace vectoriel $F$ d'un espace euclidien $E$.
"L'orthogonal de $F$ (dans $E$) est un sous-espace vectoriel de $E$" **(*)**.
"Tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ et son orthogonal sont supplémentaires dans $E$".
"En dimension finie, pour tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$, on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$".

(2) **Endomorphismes et matrices symétriques:**
Définition et propriétés d'un endomorphisme symétrique $f$ d'un espace euclidien $E$.
Définition et propriétés d'une matrice symétrique (réelle) $A$ de taille $n$.
"L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$".
"Si un sous-espace $F$ est stable par $f$, son orthogonal est stable par $f$" **(*)**.
"Toute famille de vecteurs propres de $f$ pour des valeurs propres $\neq$ est orthogonale" **(*)**.
"Les sous-espaces propres de $f$ (resp. $A$) sont 2 à 2 orthogonaux".
Définition et propriétés du projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel $F$ de $E$.
Expression du projecteur orthogonal de $x$ sur $F$ à l'aide du produit scalaire et d'une base orthonormée de $F$ **(*)**.
"Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique".
"Le projeté orthogonal de $x$ sur $F$ est l'unique vecteur qui minimise la distance de $x$ à $F$".
Problème des moindres carrés (pour les matrices colonnes).
Réduction des endomorphismes et matrices symétriques - Théorème spectral.
Définition d'une forme quadratique $q$ sur $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une matrice symétrique $A$.
Expression d'une forme quadratique $q$ à l'aide de l'endomorphisme symétrique $f$ associé.
Expression d'une forme quadratique $q$ dans une base de vecteurs propres de $f$.
Détermination du signe de $q$ en fonction du signe des valeurs propres de $f$.