Lycée Clemenceau **Jeudi 22 janvier 2026**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 5$

Remarques : *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits. Tous les étudiants auront le choix entre un sujet de type EDHEC-EML et un autre de type HEC-ESSEC Maths I. Ils indiqueront lisiblement sur leur première copie le sujet qu'ils auront choisi, et ne pourront traiter que les questions de ce sujet.*

1. Sujet type EDHEC-EML

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on désigne par n un entier ≥ 2. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Exprimer A en fonction de I et J, puis écrire A^2 comme combinaison linéaire de I et J.
(2) En déduire un polynôme annulateur de A, puis donner les valeurs propres possibles de A.
(3) Montrer que la matrice A est inversible.

Par la suite, on considère un espace euclidien E de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $\|\ \|$. On désigne par $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E, et l'on pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!], \ \ e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right).$$

(1) Calculer la norme du vecteur u.
(2) (a) Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a : $\|e_i\| = 1$.
  (b) Montrer aussi que, pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a : $\langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}$.
  (c) Montrer que les vecteurs $e_0, ..., e_n$ appartiennent tous au sous-espace $F = (\text{Vect}(u))^{\perp}$ de E.
  (d) A l'aide de la question (3) de la première partie, montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de F.
(3) On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in F \times F$ par :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.$$

  (a) Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique.
  (b) Déterminer $f(e_i, e_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ en distinguant les cas $i = j$ et $i \neq j$.
  (c) En déduire que, pour tout $(x, y) \in F \times F$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.$$

  (d) En déduire également que, pour tout $x \in F$, on a :

$$\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Exercice 2. Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, il se place de façon équiprobable sur les points d'abscisses $0, 1, ..., n$. Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$). On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(1) (a) Déterminer la loi de X_n pour tout entier $n \neq 0$.
  (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet une espérance et une variance et les donner.
(2) On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
  (a) Exprimer l'événement $[Y = n]$ à l'aide de $X_1, ..., X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
  (b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
  (c) Vérifier par le calcul que l'on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
  (d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance?

(3) (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \dfrac{1}{k}$.
(b) En déduire que : $\forall j \geq 2$, $\ln(j) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$.
(c) Conclure alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \to +\infty}{\sim} \ln(j)$.

(4) On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
(a) Déterminer pour tout $i \geq j$ la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$.
(b) Etablir que, pour tout $i \leq j-1$, on a : $P_{[Y=i]}(Z = j) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.
(c) Ecrire pour tout entier $j \geq 2$ la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
(d) La variable aléatoire Z admet-elle une espérance?

(5) Informatique
On rappelle qu'en Python, la commande `rd.randint(a,b+1)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a, b]\!]$.
(a) Ecrire une fonction en Python calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n-ème déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur.
(b) Compléter la fonction en Python suivante pour qu'elle permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul():
    n=0
    a=0
    while a<2:
        n=n+1
        if rd.randint(0,n+1)==0:
            a=a+1
            if a==1:
                y=n
    return ........
```

Problème 1.

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Trouver en fonction de I_3 et de A deux matrices P_1 et P_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P_1 + P_2 = I_3$ et $4P_1 + 9P_2 = A$. Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et de P_2.
(2) (a) Calculer les matrices $P_1^2, P_1P_2, P_2P_1, P_2^2$.
(b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.
(3) Trouver au moins une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.
(4) Quelles sont les valeurs propres de A? Justifier.

Dans toute la suite du problème, on désigne par E un espace vectoriel de dimension finie ≥ 1 et par f un endomorphisme de E. On note e l'endomorphisme identité de E et $\widetilde{0}$ l'endomorphisme nul de E. On suppose qu'il existe un entier $m \geq 1$, des réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes non nuls $p_1, ..., p_m$ de E tels que : $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$. Enfin, on considère les polynômes :

$$N : x \longmapsto \prod_{l=1}^{m} (x - \lambda_l) \quad \text{et pour tout } i \in [\![1, m]\!],\ M_i : x \longmapsto \prod_{1 \leq l \leq m,\ l \neq i} (x - \lambda_l) \ \text{ et } \ L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

Partie II : Etude des puissances de f

(1) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_m[x]$, on a : $P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$.
(2) En déduire l'égalité : $N(f) = \widetilde{0}$.
(3) (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon.

(b) En déduire que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a : $L_i(f) = p_i$.

(4) (a) Montrer que : $e = \sum_{i=1}^m p_i$.

(b) En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathfrak{Im}(p_1), ..., \mathfrak{Im}(p_m)$.

(5) Soit i un élément de $[\![1, m]\!]$.

(a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $N(x) = M_i(\lambda_i)(x - \lambda_i)L_i(x)$.

(b) En déduire à l'aide de la question (2) que : $\mathfrak{Im}(p_i) \subset \ker(f - \lambda_i e)$.

(6) Déduire des questions précédentes que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ et que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, le sous-espace propre de f associé à λ_i est égal à $\mathfrak{Im}(p_i)$.

(7) (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a : $p_i \circ p_j = \widetilde{0}$.

(b) En déduire, en utilisant le résultat de la question (4)(a), que : $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $p_i \circ p_i = p_i$.

(c) Etablir que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a : $p_i \circ f = \lambda_i p_i$.

(8) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k = \sum_{i=0}^m \lambda_i^k p_i$. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$: $P(f) = \sum_{i=0}^m P(\lambda_i) p_i$.

Partie III : Intervention de produits scalaires

Dans cette partie, on munit l'espace vectoriel E d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$, et on considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in E \times E$ par :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^m \langle p_i(x), p_i(y) \rangle.$$

(1) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

(2) Montrer que, pour tous $x, y \in E$, on a : $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f(y))$.

2. Sujet type HEC-ESSEC Maths I

Problème 2. Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie, ainsi que la décomposition de Frobenius d'un élément de $\mathcal{L}(E)$. Dans tout le problème :

- n est un entier ≥ 2;
- E est un espace vectoriel de dimension n;
- $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E;
- on rappelle qu'une **homothétie** est une application du type $\lambda \mathrm{Id}_E$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;
- un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par un endomorphisme u de E si, pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$. On note alors $u_{|F}$ l'endomorphisme de F défini pour tout $x \in F$ par $u_{|F}(x) = u(x)$. Cet endomorphisme est appelé **l'endomorphisme de F induit par u**;
- si u est un endomorphisme de E et si e est un vecteur de E, on note $E_u(e)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

  $$E_u(e) = \mathrm{Vect}\left(u^k(e) | k \in [\![0, n-1]\!]\right) = \mathrm{Vect}\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right).$$

  Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{B}(e, k)$ la famille $\left(e, u(e), ..., u^{k-1}(e)\right)$.
- on dit qu'un endomorphisme u de E est **cyclique** s'il existe $e \in E$ tem que $E = E_u(e)$; on considèrera qu'en dimension 1, tout endomorphisme est cyclique;
- soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est **une matrice de Frobenius** ou **matrice compagnon** s'il existe des réels $a_0, ..., a_{n-1}$ tels que :

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

  et de plus, le polynôme $P_A : x \longmapsto x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0$ est appelé le **polynôme caractéristique** de A;
- on dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, $r = \min\{k \in \mathbb{N}^* |\ u^k = 0\}$ est appelé **l'indice de nilpotence** de u;
- enfin, on admet que toute partie non vide et majorée A de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément; cet élément est appelé le **maximum** de A et noté $\max\{k \in A\}$.

Le problème comporte trois parties. Dans la première partie, on étudie les premières propriétés des endomorphismes cycliques et on traite quelques exemples. Dans la seconde partie, on étudie le cas des endomorphismes diagonalisables et nilpotents. Enfin, dans la troisième partie, on obtient une décomposition d'un endomorphisme, appelée **décomposition de Frobenius**, et on en déduit quelques propriétés élémentaires; on montre en particulier que toute matrice carrée est semblable à sa transposée.

Partie I : Premières propriétés.

Soit u un endomorphisme de E et soit e un vecteur non nul de E.

Section A : Etude des sous-espaces $E_u(e)$.

(1) Justifier que la famille $\mathcal{B}(e, n+1)$ est liée.
(2) On pose $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* |\ \mathcal{B}(e,k) \text{ est libre}\}$. Justifier l'existence de $d(e)$.
(3) Montrer qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, ..., a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e).$$

Montrer alors que, pour tout entier $k \geq d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\left(e, u(e), ..., u^{d(e)-1}(e)\right)$. En déduire que $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$.
(4) Montrer que $E_u(e)$ est stable par l'endomorphisme u.
Montrer également que tout sous-espace vectoriel F de E contenant e et stable par u contient $E_u(e)$.
(5) A quelle condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier $d(e)$, le vecteur e est-il un vecteur propre pour u?
(6) Montrer que u est une homothétie si et seulement si, pour tout vecteur non nul e de E, on a $d(e) = 1$ (*indication : calculer* $u(e_i + e_j)$ *pour deux vecteurs distincts d'une base* $(e_1, ..., e_n)$ *de* E).
(7) Montrer que u est un endomorphisme cyclique si et seulement s'il existe un vecteur non nul e de E tel que $d(e) = n$.

Section B : Premières propriétés des endomorphismes cycliques.

On suppose dans cette section que u est un endomorphisme cyclique de E, et donc qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = E_u(e)$.
(1) On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$ de E. Vérifier que A est une matrice de Frobenius.
(2) On note $P_A : x \longmapsto x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0$ son polynôme caractéristique.
Que vaut $(P_A(u))(e)$?
Calculer $(P_A(u))\left(u^k(e)\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Montrer que P_A est un polynôme annulateur de u.
(3) Vérifier que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.
(4) En déduire que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal.
(5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A et vérifier que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est de dimension 1.
(6) En déduire une caractérisation portant sur P_A pour que u soit diagonalisable.

Section C : Un premier exemple.

Dans cette section, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_3$ la base canonique de E. On note aussi f et g les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}_3$ sont respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On admet que f est diagonalisable, et on notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant.
(1) Déterminer une base de diagonalisation (V_1, V_2, V_3) de f telle que, pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $f(V_i) = \lambda_i V_i$ et telle que la première coordonnée de V_i dans la base $\mathcal{B}_3$ soit 1.
(2) On pose $V = V_1 + V_2 + V_3$. Déterminer $d(V)$ et en déduire que f est cyclique.
(3) Déterminer un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal.
L'endomorphisme g est-il cyclique?
(4) Vérifier que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de g.

Partie II : Etude de deux cas particuliers.

Section A : Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques.

Dans cette section, on considère un endomorphisme u de E et on suppose que u diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ une liste des valeurs propres distinctes de u.

(1) En considérant son action sur une base de vecteurs propres de u, établir que l'endomorphisme $v = (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ est l'endomorphisme nul.
(2) En déduire que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^p)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$.
(3) Quelle est la valeur de p si u est cyclique?

On suppose jusqu'à la fin de cette section que $p = n$, et on note $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de u telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

(4) Soit $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Montrer que la famille $\mathcal{B}(e, n)$ est libre, et conclure que u est cyclique.
(5) On reprend dans cette question seulement l'exemple de la section C de la partie I et, pour tout réel α, on pose $u_\alpha = g + \alpha f$. Montrer que u_α est diagonalisable et discuter, en fonction des valeurs de α, les cas où u_α est cyclique.

Section B : Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques.

Dans cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence r.

(1) Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(e, u(e), ..., u^{r-1}(e)\big)$ est libre dans E.
(2) En déduire que $r \leq n$ et montrer que $r = n$ si et seulement si u est cyclique.
Dans le cas $r = n$, écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$.

Section C : Un second exemple.

Dans cette section, E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré $\leq n-1$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note X^k la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^k$ et on rappelle que $(X^k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est une base de E.

(1) Soit $P \in E$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$ converge et montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$ appartient à E.
On note $u : P \in E \longmapsto u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$.
(2) Vérifier que u est un endomorphisme de E.
(3) Soit $P \in E$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$.
(4) En déduire que, pour tout $P \in E$, on a : $u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$.
(5) Soit $P \in E$. A l'aide d'un changement de variable, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds.$$
(6) Montrer que, pour tout $P \in E$, la fonction $x \longmapsto \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer alors que $u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(u(P))' = u(P) - P$.
En déduire que $(u(P))' = u(P')$.
(7) Déterminer la matrice de u dans la base $(X^k)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ de E, et en déduire le spectre de u.
(8) On pose $v = u - \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\mathfrak{Im}(v)$ est le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de degré $\leq n-2$.
(9) Montrer que v est nilpotent. L'endomorphisme v est-il cyclique?

Partie III : Décomposition de Frobenius et applications.

Dans cette partie, on se propose de démontrer, pour tout endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$, la propriété suivante notée $(\mathcal{R})$:

il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et des sous-espaces vectoriels non nuls $F_1, ..., F_p$ de E, stables par u, tels que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_{\vert F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i.

Section A : Cas d'une homothétie.

(1) Démontrer que la propriété $(\mathcal{R})$ est réalisée si u est une homothétie.

Section B : Cas où u n'est pas une homothétie.

(1) Justifier qu'il existe un vecteur e non nul de E tel que $d(e) \neq 1$.

Pour le reste de la section, on choisit un vecteur non nul e de E tel que $d = d(e)$ soit maximal (donc $d \geq 2$) et on note, pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $e_k = u^k(e)$. On note toujours $\mathcal{B}(e,d) = (e_0, e_1, ..., e_{d-1})$ ainsi que des réels $a_0, a_1, ..., a_{d-1}$ tels que :

$$u^d(e) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i(e).$$

Enfin, on pose : $F_1 = E_u(e)$.

(2) Justifier que la propriété $(\mathcal{R})$ est réalisée si $d = n$.

Dans la suite de cette section, on suppose que $d \in [\![2, n-1]\!]$ (et donc $n \geq 3$). On complète la famille $\mathcal{B}(e,d)$ en une base $\mathcal{B} = (e_0, e_1, ..., e_{d-1}, e_d, ..., e_{n-1})$ de E.

(3) Montrer que l'application $\varphi : x = \sum_{i=0}^{n-1} x_k e_k \in E \longmapsto x_{d-1}$ est une forme linéaire non nulle de E.

On considère l'application $\Phi : x \in E \longmapsto \big(\varphi(u^{d-1}(x)), \varphi(u^{d-2}(x)), ..., \varphi(u(x)), \varphi(x)\big) \in \mathbb{R}^d$.

(4) Vérifier que Φ est linéaire. On note $G = \ker(\Phi)$ et $\widetilde{\Phi}$ la restriction de Φ à F_1.

(5) Calculer $\Phi(e_0)$ et $\Phi(e_1) = \Phi(u(e_0))$.
Plus généralement, justifier que, pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, il existe des réels $\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, ..., \beta_{k-1,k}$ tels que $\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, ..., \beta_{k-1,k}, 1, 0, ..., 0)$.

(6) Ecrire alors la matrice de $\widetilde{\Phi}$ de la base $\mathcal{B}(e,d)$ de F_1 vers la base canonique de $\mathbb{R}^d$, et justifier que $\widetilde{\Phi}$ est bijectif.

(7) Montrer alors que $E = F_1 \oplus G$, et justifier que G est stable par u.

(8) Dire pourquoi $u_{|F_1}$ est bien un endomorphisme cyclique de F_1.

(9) Justifier que, pour tout vecteur non nul e' de G, on a $d(e') \leq d$.

(10) Démontrer que la propriété $(\mathcal{R})$ est bien réalisée.

Section C : Première application (décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents).

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et $F_1, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E non nuls et stables par u tels que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $\mathcal{B}_{F_k}$ une base de F_k. Soit $\mathcal{B}$ la concaténation des bases $\mathcal{B}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_2}, ..., \mathcal{B}_{F_p}$. On rappelle que $\mathcal{B}$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$?

(2) Soit u un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence p. A l'aide de la propriété $(\mathcal{R})$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de u est triangulaire inférieure et telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $t_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $t_{i,i-1} \in \{0, 1\}$ et tous les autres coefficients de T sont nuls.

Section D : Deuxième application (toute matrice carrée est semblable à sa transposée).

Dans cette section, on pose $E = \mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M. On se propose de montrer que M vérifie la propriété suivante, notée $(\mathcal{S})$:

$$\boxed{\text{il existe deux matrices symétriques } V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ avec } W \text{ inversible, telles que } M = VW.}$$

(1) *Cas où u est cyclique :* il existe donc $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$. On note toujours $\mathcal{B}(e,n)$ la base $\big(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\big)$ de E et $A = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u)$. Il s'agit de la matrice de Frobenius associée aux réels

$a_0, a_1, ..., a_{n-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On considère :

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & \iddots & -a_{n-1} & 1 & 0 \\ -a_3 & \cdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & 0 \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & \iddots & \iddots & (0) & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de E tel que S est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}(e,n)$. On a donc :

$$f(e) = -\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e) \quad , \quad f\left(u(e)\right) = -\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e)\right) + u^{n-2}(e)$$

et plus généralement :

$$\forall j \in [\![0, n-2]\!], \quad f\left(u(e)\right) = -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e)\right) + u^{n-j-1}(e)$$

et enfin $f\left(u^{n-1}(e)\right) = e$.

Calculer $u(f(e)), u(f(u(e)))$ et plus généralement, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, $u(f(u^j(e)))$ et enfin $u(f(u^{n-1}(e)))$.

(2) En déduire que l'on a :

$$AS = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & (0) & \vdots \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par la suite, on pose $S_1 = AS$.

(3) Justifier que S est inversible. On note alors $S_2 = S^{-1}$ et on a donc $A = S_1 S_2$, où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques.

(4) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_n$ vers la base $\mathcal{B}(e,n)$. Vérifier que :

$$M = PS_1({}^tP)({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}$$

et conclure que M vérifie la propriété $(\mathcal{S})$.

(5) Montrer alors que ${}^tM$ et M sont semblables. Plus précisément, déterminer une matrice symétrique inversible Q telle que ${}^tM = Q^{-1}MQ$.

(6) Cas général : en s'appuyant sur le cas précédent et la propriété $(\mathcal{R})$, montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices ${}^tM$ et M sont semblables.