Lycée Clemenceau **Jeudi 22 janvier 2026**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Corrigé du devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 5$

1. Corrigé du sujet EDHEC-EML

Corrigé de l'exercice 1. Dans tout l'exercice, on désigne par n un entier ≥ 2. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont égaux à $-n$, les autres étant tous égaux à 1. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1 et I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Exprimons tout d'abord A en fonction de I et J. Par des calculs simples, on trouve que :

$$A = \begin{pmatrix} -n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & -n \end{pmatrix} = (-1-n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A = (-1-n)I + J.}$$

A présent, écrivons A^2 comme combinaison linéaire de I et J. Comme les matrices I et J commutent, on obtient par des calculs simples que :

$$A^2 = [(-1-n)I + J]^2 = (1+n)^2 I^2 + J^2 - 2(n+1)JI = (1+n)^2 I + J^2 - 2(n+1)J.$$

Comme $J^2 = nJ$, il s'ensuit que :

$$A^2 = (1+n)^2 I + J^2 - 2(n+1)J = (1+n)^2 I + nJ - 2(n+1)J = (1+n)^2 I - (n+2)J.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A^2 = (1+n)^2 I - (n+2)J.}$$

(2) Déterminons tout d'abord un polynôme annulateur de A. Partant du fait que $J = A + (n+1)I$, on obtient par des calculs simples que :

$$J^2 = [(1+n)I + A]^2 = (1+n)^2 I^2 + A^2 + 2(n+1)AI = (1+n)^2 I + A^2 + 2(n+1)A.$$

Comme $J^2 = nJ$, ceci entraine que :

$$J^2 = (1+n)^2 I + A^2 + 2(n+1)A = nJ = n[(n+1)I + A] = n(n+1)I + nA.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$0 = (1+n)^2 I + A^2 + 2(n+1)A - n(n+1)I - nA = A^2 + (n+2)A + (1+n)I.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P : x \longmapsto x^2 + (n+2)x + (n+1) \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

A présent, donnons les valeurs propres possibles de A. Comme toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A, il suffit de déterminer les racines de P. Par des calculs simples, on a $\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2 + 4n + 4 - 4n - 4 = n^2$, et donc les racines de P sont données par :

$$x_1 = \frac{-n-2+n}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-n-2-n}{2} = -n-1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1 \text{ et } -n-1.}$$

(3) Montrons que la matrice A est inversible. D'après la question précédente, -1 et $-n-1$ sont les seules valeurs propres possibles de A, et donc 0 n'est pas valeur propre de A car $n \geq 2$. Comme une matrice est inversible si et seulement si 0 n'en est pas valeur propre, on en déduit que :

$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

Par la suite, on considère un espace euclidien E de dimension $n+1$, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $\|\ \|$. On désigne par $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E, et l'on pose :

$$u = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![0, n]\!], \ \ e_i = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right).$$

(1) Calculons la norme du vecteur u. Comme la famille $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$ est orthonormée, tous les vecteurs ε_i sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux. Dès lors, on obtient avec le théorème de Pythagore que :

$$\|u\|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} \|\varepsilon_k\|^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit en passant à la racine carrée que :

$$\boxed{\|u\| = 1.}$$

(2) (a) Montrons que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a : $\|e_i\| = 1$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\|e_i\|^2 &= \langle e_i, e_i\rangle \\
&= \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right), \sqrt{\frac{n+1}{n}} \left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right) \right\rangle \\
&= \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^2 \langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\rangle \\
&= \frac{n+1}{n} \langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\rangle \\
&= \frac{n+1}{n} \left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_i\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle u, \varepsilon_i\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_i, u\rangle\langle u, u\rangle\right] \\
&= \frac{n+1}{n} \left[\|\varepsilon_i\|^2 - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_i, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_i, u\rangle\|u\|^2\right] \\
&= \frac{n+1}{n} \left[\|\varepsilon_i\|^2 - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle^2 + \langle \varepsilon_i, u\rangle^2\|u\|^2\right].
\end{aligned}$$

Comme $\|u\| = 1$ d'après la question précédente, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\|e_i\|^2 &= \frac{n+1}{n} \left[\|\varepsilon_i\|^2 - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle^2 + \langle \varepsilon_i, u\rangle^2\|u\|^2\right] \\
&= \frac{n+1}{n} \left[\|\varepsilon_i\|^2 - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle^2 + \langle \varepsilon_i, u\rangle^2\right] \\
&= \frac{n+1}{n} \left[\|\varepsilon_i\|^2 - \langle \varepsilon_i, u\rangle^2\right]. \quad (*)
\end{aligned}$$

Comme la famille $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$ est orthonormée, tous les vecteurs ε_i sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux. Dès lors, on trouve par bilinéarité du produit scalaire que :

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_i, u\rangle &= \left\langle \varepsilon_i, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_k\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} [0 + ... + 0 + 1 + 0 + ... + 0] \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

En particulier, on obtient avec la relation $(*)$ que :

$$\begin{aligned}
\|e_i\|^2 &= \frac{n+1}{n}\left[\|\varepsilon_i\|^2 - \langle \varepsilon_i, u\rangle^2\right] \\
&= \frac{n+1}{n}\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2\right] \\
&= \frac{n+1}{n}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \\
&= \frac{n+1}{n}\left[\frac{n}{n+1}\right] \quad = \quad 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit en passant à la racine carrée que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$\boxed{\|e_i\| = 1.}$$

(b) Montrons que, pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a : $\langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}$. Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\langle e_i, e_j\rangle &= \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right), \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u\rangle u\right)\right\rangle \\
&= \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)^2 \langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, \varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u\rangle u\rangle \\
&= \frac{n+1}{n} \langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, \varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u\rangle u\rangle \\
&= \frac{n+1}{n}\left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - \langle \varepsilon_j, u\rangle\langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle u, \varepsilon_j\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\langle u, u\rangle\right] \\
&= \frac{n+1}{n}\left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\|u\|^2\right] \\
&= \frac{n+1}{n}\left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\|u\|^2\right].
\end{aligned}$$

Comme $\|u\| = 1$ d'après la question précédente, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\langle e_i, e_j\rangle &= \frac{n+1}{n}\left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\|u\|^2\right] \\
&= \frac{n+1}{n}\left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - 2\langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\right] \\
&= \frac{n+1}{n}\left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\right].
\end{aligned}$$

Comme la famille $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$ est orthonormée, tous les vecteurs ε_i sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux. Dès lors, on trouve que :

$$\langle e_i, e_j\rangle = \frac{n+1}{n}\left[\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\right] = -\frac{n+1}{n}\langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle. \quad (*)$$

Comme précédemment, on obtient par bilinéarité du produit scalaire que, pour tout $l \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_l, u\rangle &= \left\langle \varepsilon_l, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\langle \varepsilon_l,\varepsilon_k\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left[0+...+0+1+0+...+0\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}.\end{aligned}$$

En particulier, on trouve avec la relation $(*)$ que :

$$\begin{aligned}\langle e_i, e_j\rangle &= -\frac{n+1}{n}\langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle \\ &= -\frac{n+1}{n}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}}\times\frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad = \quad -\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\boxed{\langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}.}$$

(c) Montrons que les vecteurs $e_0, ..., e_n$ appartiennent tous au sous-espace $F = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}$ de E. Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}\langle e_i, u\rangle &= \left\langle \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u\right), u\right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, u\rangle \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left[\langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle u, u\rangle\right]\end{aligned}$$

Comme $\langle u, u\rangle = \|u\|^2 = 1$ d'après la question (2)(a) de la première partie, on a pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:

$$\langle e_i, u\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left[\langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\right] = 0.$$

Dès lors, tous les vecteurs e_i sont orthogonaux à u. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les vecteurs } e_0, ..., e_n \text{ appartiennent tous à } F = (\mathrm{Vect}(u))^{\perp}.}$$

(d) Montrons que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de F. D'après la question précédente, on sait que les vecteurs $e_1, ..., e_n$ appartiennent tous à F. De plus, d'après les propriétés de l'orthogonal, on voit que :

$$\dim F = \dim(\mathrm{Vect}(u))^{\perp} = \dim E - \dim \mathrm{Vect}(u) = n+1-\dim\mathrm{Vect}(u).$$

Comme u est de norme 1 d'après la question (1) de la deuxième partie, le vecteur u est non nul. En particulier, la famille (u) est libre. Mais comme elle est génératrice dans $\mathrm{Vect}(u)$ par définition, la famille (u) est une base de $\mathrm{Vect}(u)$, et donc :

$$\dim F = n+1-\dim\mathrm{Vect}(u) = n+1-1 = n.$$

Comme la famille $(e_1, ..., e_n)$ est de cardinal n, il suffit de montrer que cette famille est libre pour obtenir que c'est une base de F. Pour ce faire, considérons des réels $x_1, ..., x_n$ tels que :

$$x_1 e_1 + ... + x_n e_n = 0_E.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$:

$$x_1\langle e_1, e_j\rangle + ... + x_n\langle e_n, e_j\rangle = \langle x_1 e_1 + ... + x_n e_n, e_j\rangle = \langle 0_E, e_j\rangle = 0.$$

D'après les questions (2)(a) et (2)(b) de la deuxième partie, on obtient que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$x_1\langle e_1, e_j\rangle + ... + x_n\langle e_n, e_j\rangle = -\frac{1}{n}x_1 - ... + x_j - ... - \frac{1}{n}x_n = 0.$$

En multipliant cette égalité par $-n$, on trouve que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$x_1 + ... + x_{j-1} - nx_j + x_{j+1} ... + x_n = 0.$$

En particulier, si X est le vecteur colonne de composantes $x_1, ..., x_n$, alors on voit avec les relations ci-dessus que $AX = 0$, où A est la matrice donnée dans la première partie. Comme A est inversible d'après la question (3) de la première partie, le système $AX = 0$ admet 0 comme unique solution, et donc $x_1 = ... = x_n = 0$. Par conséquent, la famille $(e_1, ..., e_n)$ est libre, et donc :

$$\boxed{(e_1, ..., e_n) \text{ est une base de } F.}$$

(3) On considère l'application f de $F \times F$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in F \times F$ par :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.$$

(a) Montrons que f est une forme bilinéaire symétrique. Commençons par établir la symétrie. Par symétrie du produit scalaire, on trouve que, pour tout $(x, y) \in F \times F$:

$$\begin{aligned} f(y, x) &= \sum_{k=0}^{n} \langle y, e_k\rangle\langle x, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle y, x\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle \quad = \quad f(x, y), \end{aligned}$$

et donc f est symétrique. Dès lors, pour montrer que f est bilinéaire, il suffit de vérifier que f est linéaire à gauche. Pour ce faire, considérons des vecteurs $x_1, x_2, y \in F$ et des réels λ_1, λ_2. Par bilinéarité du produit scalaire et par linéarité de la somme, on obtient que :

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \sum_{k=0}^{n} \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{n} [\lambda_1\langle x_1, e_k\rangle + \lambda_2\langle x_2, e_k\rangle]\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}[\lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle] \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^{n} \langle x_1, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle + \lambda_2 \sum_{k=0}^{n} \langle x_2, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \lambda_1\frac{n+1}{n}\langle x_1, y\rangle - \lambda_2\frac{n+1}{n}\langle x_2, y\rangle \\ &= \lambda_1 \left[\sum_{k=0}^{n} \langle x_1, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x_1, y\rangle\right] + \lambda_2 \left[\sum_{k=0}^{n} \langle x_2, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x_2, y\rangle\right] \\ &= \lambda_1 f(x_1, y) + \lambda_2 f(x_2, y). \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que f est linéaire à gauche. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est une forme bilinéaire symétrique.}}$$

(b) Déterminons $f(e_i, e_j)$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Pour ce faire, on distingue deux cas. Tout d'abord, si $i = j$, alors on obtient par définition de f que :

$$f(e_i, e_j) = f(e_i, e_i) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_i, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_i\rangle.$$

D'après les questions précédentes, on sait que $\langle e_i, e_k\rangle$ est égal à 1 si $k = i$ et à $-\frac{1}{n}$ si $k \neq i$. Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
f(e_i, e_i) &= \sum_{0\leq k\leq n,\ k\neq i} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_i, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle^2 - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{0\leq k\leq n,\ k\neq i} \left(-\frac{1}{n}\right)^2 + 1 - \frac{n+1}{n} \\
&= n\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 1 - \frac{n+1}{n} \\
&= \frac{1}{n} + 1 - \frac{n+1}{n} \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

A présent, si $i \neq j$, alors on obtient par définition de f que :

$$f(e_i, e_j) = \sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_j\rangle.$$

D'après les questions précédentes, on sait que $\langle e_i, e_k\rangle$ est égal à 1 si $k = i$ et à $-\frac{1}{n}$ si $k \neq i$. Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
f(e_i, e_j) &= \sum_{0\leq k\leq n,\ k\neq i,j} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle + \langle e_i, e_i\rangle\langle e_j, e_i\rangle + \langle e_i, e_j\rangle\langle e_j, e_j\rangle - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{0\leq k\leq n,\ k\neq i,j} \left(-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 \times -\frac{1}{n}\right) + \left(-\frac{1}{n} \times 1\right) - \left(\frac{n+1}{n} \times -\frac{1}{n}\right) \\
&= (n-1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n^2} \\
&= \frac{n-1+n+1}{n^2} - \frac{2}{n} \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$\boxed{f(e_i, e_j) = 0.}$$

(c) Montrons que, pour tout $(x, y) \in F \times F$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.$$

Au vu de l'expression de f, il suffit de montrer que $f(x, y) = 0$. Pour ce faire, considérons deux vecteurs quelconques x, y de F. D'après la question $(2)(d)$ de la deuxième partie, on sait que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de F. Dès lors, il existe des réels $a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j.$$

Comme f est bilinéaire d'après la question $(3)(a)$, on trouve avec la question précédente que :

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \times 0 = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in F \times F$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.}$$

(d) Montrons que, pour tout $x \in F$, on a :

$$\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.$$

Partant du résultat de la question précédente, on trouve en prenant $x = y$ que :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle x, e_k \rangle = \frac{n+1}{n} \langle x, x \rangle = \frac{n+1}{n} \|x\|^2.$$

Par conséquent, on en déduit en multipliant cette égalité par $\frac{n}{n+1}$ que, pour tout $x \in F$:

$$\boxed{\|x\|^2 = \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle^2.}$$

Corrigé de l'exercice 2. Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0. Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O. Le mobile se déplace selon la règle suivante : à l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, il se place de façon équiprobable sur les points d'abscisses $0, 1, ..., n$. Pour tout entier naturel n, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$). On admet que, pour tout entier naturel n, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on cherchera pas à déterminer. On admet aussi que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

(1) (a) Déterminons la loi de X_n pour tout entier $n \neq 0$. Comme le mobile se place de façon équiprobable sur les points d'abscisses $0, 1, ..., n$ à l'instant n et que X_n est la position du mobile à l'instant n, il s'ensuit que :

$$\boxed{X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!]).}$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet une espérance et une variance et donnons-les. Comme X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$ d'après ce qui précède, il s'ensuit d'après le cours que :

$$\boxed{X_n \text{ admet une espérance et une variance et de plus : } E(X_n) = \frac{n}{2},\ V(X_n) = \frac{n(n+2)}{12}.}$$

(2) On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Exprimons l'événement $[Y = n]$ à l'aide de $X_1, ..., X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition, l'événement $[Y = n]$ est réalisé si et seulement si le mobile ne revient à l'origine qu'à l'instant n et jamais auparavant, c'est-à-dire si les événements $[X_1 \neq 0], ..., [X_{n-1} \neq 0], [X_n = 0]$ sont simultanément réalisés, et donc :

$$\boxed{[Y = n] = [X_1 \neq 0] \cap ... \cap [X_{n-1} \neq 0] \cap [X_n = 0].}$$

(b) Montrons que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. Remarquons tout d'abord que Y ne peut prendre que des valeurs entières > 0 par construction, et donc $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. De plus, comme $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, k]\!])$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et que les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes par hypothèse, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P(Y = n) &= P([X_1 \neq 0] \cap ... \cap [X_{n-1} \neq 0] \cap [X_n = 0]) \\
&= P([X_1 \neq 0])...P([X_{n-1} \neq 0])P([X_n = 0]) \\
&= (1 - P([X_1 = 0]))\,...\,(1 - P([X_{n-1} = 0]))\,P([X_n = 0]) \\
&= \left(1 - \frac{1}{1+1}\right) ... \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) ... \left(\frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Dès lors, ceci entraine par télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Comme toutes ces probabilités sont non nulles, il s'ensuit que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la loi de } Y \text{ est donnée par : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y=n) = \frac{1}{n(n+1)}.}$$

(c) Vérifions par le calcul que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1$. Comme $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve par télescopage que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{p} P(Y=n) = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{p+1}.$$

Comme le terme de droite dans l'égalité ci-dessus tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} P(Y=n) = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n) = 1.}$$

(d) Montrons que la variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance. Par définition, la variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} nP(Y=n)$ converge absolument, c'est-à-dire converge (puisqu'elle est à termes positifs). Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que :

$$nP(Y=n) = n \times \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

Comme la série harmonique diverge d'après le cours, on obtient par décalage que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge, et donc $\sum_{n\geq 1} nP(Y=n)$ diverge aussi. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } Y \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

(3) (a) Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$. Comme la fonction ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le théorème des accroissements finis entraine l'existence d'un réel $c \in]k, k+1[$ tel que :

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{k+1-k} = \frac{1}{c}.$$

Comme $k < c < k+1$, on voit que $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{k}$, et donc on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.}$$

(b) Montrons que : $\forall j \geq 2$, $\ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$. Par sommation sur k de l'égalité ci-dessus, on trouve que, pour tout $j \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{j-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.$$

Par télescopage, ceci nous donne que, pour tout $j \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(j) - \ln(1) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.$$

En effectuant le changement d'indice $l = k+1$ dans la somme de gauche et sachant que $\ln(1) = 0$, il vient que, pour tout $j \geq 2$:

$$\sum_{l=2}^{j} \frac{1}{l} \leq \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.$$

A noter que l'on peut réécrire cet encadrement sous la forme suivante, pour tout $j \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{j} \leq \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.$$

En scindant cet encadrement en deux inégalités, on trouve que, pour tout $j \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{j} \leq \ln(j) \quad \text{et} \quad \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.$$

En réécrivant la première inégalité, on obtient que, pour tout $j \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j} \quad \text{et} \quad \ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}.$$

En rassemblant à nouveau ces deux inégalités, on en déduit que, pour tout $j \geq 2$:

$$\boxed{\ln(j) \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}.}$$

(c) Montrons que : $\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \to +\infty}{\sim} \ln(j)$. Partant de l'encadrement de la question précédente, on obtient par division que, pour tout $j \geq 2$:

$$1 \leq \frac{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(j)} - \frac{1}{j\ln(j)}.$$

Comme $\frac{1}{\ln(j)}$ et $\frac{1}{j\ln(j)}$ tendent vers 0 quand j tend vers $+\infty$, il s'ensuit d'après le théorème des gendarmes que :

$$\frac{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k}}{\ln(j)} \underset{j \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \to +\infty}{\sim} \ln(j).}$$

(4) On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie elle aussi sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Déterminons pour tout $i \geq j$ la probabilité $P_{[Y=i]}(Z = j)$. Pour ce faire, supposons que l'événement $[Y = i]$ soit réalisé. Alors le premier retour à l'origine se fait à l'instant i, et il est impossible que le deuxième se fasse à un instant $j \leq i$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall i \geq j, \ \ P_{[Y=i]}(Z = j) = 0.}$$

(b) Etablissons que, pour tout $i \leq j - 1$, on a : $P_{[Y=i]}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}$. Pour ce faire, on commence par exprimer l'événement $[Y = i] \cap [Z = j]$ à l'aide de $X_1, ..., X_j$. Par définition, l'événement $[Y = i] \cap [Z = j]$ est réalisé si et seulement si le mobile revient une première fois à l'origine à l'instant i, puis ne repasse pas par l'origine aux instants $i+1, ..., j-1$ et enfin revient à l'origine à l'instant j, c'est-à-dire si les événements $[X_1 \neq 0], ..., [X_{i-1} \neq 0], [X_i = 0], [X_{i+1} \neq 0], ..., [X_{j-1} \neq 0], [X_j = 0]$ sont simultanément réalisés, et donc :

$$[Y = i] \cap [Z = j] = \bigcap_{k=1}^{i-1} [X_k \neq 0] \cap [X_i = 0] \cap \bigcap_{k=i+1}^{j-1} [X_k \neq 0] \cap [X_j = 0].$$

Comme $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,k]\!])$ pour tout $k \in [\![i+1,j]\!]$ et que les variables aléatoires $X_1,...,X_j$ sont indépendantes par hypothèse, on voit que, pour tout $i \leq j-1$:

$$\begin{aligned}
P([Y=i]\cap[Z=j]) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{i-1}[X_k\neq 0]\cap[X_i=0]\cap\bigcap_{k=i+1}^{j-1}[X_k\neq 0]\cap[X_j=0]\right)\\
&= \prod_{k=1}^{i-1}P([X_k\neq 0])P([X_i=0])\prod_{k=i+1}^{j-1}P([X_k\neq 0])P([X_j=0])\\
&= P([Y=i])\prod_{k=i+1}^{j-1}P([X_k\neq 0])P([X_j=0])\\
&= P([Y=i])\prod_{k=i+1}^{j-1}\left(1-P([X_k=0])\right)P([X_j=0])\\
&= P([Y=i])\prod_{k=i+1}^{j-1}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{j+1}\\
&= P([Y=i])\prod_{k=i+1}^{j-1}\left(\frac{k}{k+1}\right)\frac{1}{j+1}.
\end{aligned}$$

Dès lors, ceci entraine par télescopage que, pour tout $i \leq j-1$:

$$P([Y=i]\cap[Z=j]) = P([Y=i])\left(\frac{i+1}{j}\right)\frac{1}{j+1} = P([Y=i])\frac{i+1}{j(j+1)}.$$

En particulier, ceci nous donne après division que, pour tout $i \leq j-1$:

$$P_{[Y=i]}(Z=j) = \frac{P([Y=i]\cap[Z=j])}{P([Y=i])} = \frac{i+1}{j(j+1)}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $i \leq j-1$:

$$\boxed{P_{[Y=i]}(Z=j) = \frac{i+1}{j(j+1)}.}$$

(c) Ecrivons pour tout entier $j \geq 2$ la probabilité $P(Z=j)$ comme une somme finie. D'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[Z=j]$ et au système complet d'événements $([Y=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$, on trouve que, pour tout $j \geq 2$:

$$P(Z=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y=i)P_{[Y=i]}(Z=j).$$

Comme $P_{[Y=i]}(Z=j) = 0$ pour tout $i \geq j$ d'après la question $(4)(a)$, on a pour tout $j \geq 2$:

$$P(Z=j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(Y=i)P_{[Y=i]}(Z=j).$$

Comme $P_{[Y=i]}(Z=j) = \frac{i+1}{j(j+1)}$ et $P(Y=i) = \frac{1}{i(i+1)}$ pour tout $i \leq j-1$ d'après les questions $(2)(b)$ et $(4)(b)$, on trouve que, pour tout $j \geq 2$:

$$P(Z=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)} \times \frac{i+1}{j(j+1)}.$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que, pour tout $j \geq 2$:

$$\boxed{P(Z=j) = \frac{1}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}.}$$

(d) Montrons que la variable Z n'admet pas d'espérance. D'après la question (3)(c), on sait que :

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j\to+\infty}{\sim} \ln(j).$$

Comme un polynôme est équivalent au voisinage de $+\infty$ à son terme de plus haut degré, on voit que $j(j+1) \sim_{+\infty} j^2$. Dès lors, on trouve d'après les règles de calcul des équivalents et la question précédente que :

$$jP(Z=j) = \frac{j}{j(j+1)} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{j\ln(j)}{j^2} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(j)}{j}.$$

Comme $jP(Z=j) > 0$ pour tout $j \geq 2$, les séries $\sum_{j\geq 2} jP(Z=j)$ et $\sum_{j\geq 2} \frac{\ln(j)}{j}$ sont de même nature d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs. Par ailleurs, comme $\ln(j)$ tend vers $+\infty$ quand j tend vers $+\infty$, on voit que :

$$\frac{1}{j} \underset{j\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln(j)}{j}\right).$$

Si la série $\sum_{j\geq 2} \frac{\ln(j)}{j}$ à termes positifs convergeait, alors la série harmonique $\sum_{j\geq 2} \frac{1}{j}$ convergerait aussi d'après le critère de négligeabilité, ce qui est impossible. Dès lors, la série $\sum_{j\geq 2} \frac{\ln(j)}{j}$ diverge, ce qui entraine la divergence de la série $\sum_{j\geq 2} jP(Z=j)$, et donc :

$$\boxed{Z \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

(5) Informatique
On rappelle qu'en Python, la commande `rd.randint(a,b+1)` permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi uniforme à valeurs dans $[\![a,b]\!]$.

(a) Ecrivons une fonction en Python calculant et affichant la valeur de l'abscisse du mobile après son n-ème déplacement lorsque la valeur de n est entrée au clavier par l'utilisateur. Pour ce faire, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul1(n):
    x=rd.randint(0,n+1)
    return x
```

(b) Complétons la fonction en Python suivante pour qu'elle permette d'afficher dans cet ordre les valeurs prises par les variables aléatoires Y et Z.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul2():
    n=0
    a=0
    while a<2:
        n=n+1
        if rd.randint(0,n+1):
            a=a+1
            if a==1:
                y=n
    return ........
```

Pour ce faire, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul2():
    n=0
    a=0
    while a<2:
        n=n+1
        if rd.randint(0,n+1)==0:
            a=a+1
            if a==1:
                y=n
    return y,n
```

Corrigé du problème 1.

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Trouvons en fonction de I_3 et de A deux matrices P_1 et P_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $P_1 + P_2 = I_3$ et $4P_1 + 9P_2 = A$, puis explicitons les coefficients de P_1 et de P_2. Partant des relations $P_1 + P_2 = I_3$ et $4P_1 + 9P_2 = A$, on obtient en multipliant la première par 4 que $4P_1 + 4P_2 = 4I_3$ et $4P_1 + 9P_2 = A$. Par différence, on trouve que $5P_2 = A - 4I_3$, et donc :

$$P_2 = \frac{1}{5}A - \frac{4}{5}I_3.$$

De même, en multipliant la première relation par 9, on obtient que $9P_1 + 9P_2 = 9I_3$ et $4P_1 + 9P_2 = A$. Par différence, on trouve que $5P_1 = -A + 9I_3$, et donc :

$$P_1 = -\frac{1}{5}A + \frac{9}{5}I_3.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P_1 = -\frac{1}{5}A + \frac{9}{5}I_3 \text{ et } P_2 = \frac{1}{5}A - \frac{4}{5}I_3.}$$

Par des calculs simples, on trouve alors que :

$$\boxed{P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(2) (a) Calculons les matrices $P_1^2, P_1P_2, P_2P_1, P_2^2$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} P_1^2 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & = & P_1 \\ \\ P_1P_2 & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \\ P_2P_1 & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & = & 0 \\ \\ P_2^2 & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & = & P_2. \end{array} \right. .$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P_1^2 = P_1 \ , \ P_1P_2 = 0 \ , \ P_2P_1 = 0 \ , \ P_2^2 = P_2.}$$

(b) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(k) : \text{"}A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2\text{"}.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car, par construction de P_1 et P_2 :

$$A^0 = I_3 = P_1 + P_2 = 4^0 P_1 + 9^0 P_2.$$

A présent, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$. Comme $A = 4P_1 + 9P_2$ par construction, ceci entraine que :

$$A^{k+1} = A^k A = \left(4^k P_1 + 9^k P_2\right)(4P_1 + 9P_2) = 4^{k+1} P_1^2 + 9 \times 4^k P_1 P_2 + 4 \times 9^k P_2 P_1 + 9^{k+1} P_2^2.$$

Comme $P_1^2 = P_1$, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ et $P_2^2 = P_2$ d'après la question précédente, on trouve que :

$$A^{k+1} = 4^{k+1} P_1^2 + 9 \times 4^k P_1 P_2 + 4 \times 9^k P_2 P_1 + 9^{k+1} P_2^2 = 4^{k+1} P_1 + 9^{k+1} P_2,$$

et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2.}$$

(3) Trouvons une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$. En s'inspirant de la question précédente et en remarquant que $\sqrt{4} = 2$ et $\sqrt{9} = 3$, on peut supposer que $B = 2P_1 + 3P_2$ vérifie la relation $B^2 = A$. C'est ce que l'on va vérifier. Par des calculs simples, on trouve que :

$$B^2 = B \times B = (2P_1 + 3P_2)(2P_1 + 3P_2) = 4P_1^2 + 6P_1 P_2 + 6P_2 P_1 + 9P_2^2.$$

Comme $P_1^2 = P_1$, $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$ et $P_2^2 = P_2$ d'après la question (2)(a), on obtient que :

$$B^2 = 4P_1^2 + 6P_1 P_2 + 6P_2 P_1 + 9P_2^2 = 4P_1 + 9P_2 = A.$$

Par conséquent, on en déduit après calculs que :

$$\boxed{\text{la matrice } B = 2P_1 + 3P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ vérifie la relation : } B^2 = A.}$$

(4) Déterminons les valeurs propres de A. Comme la matrice A est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, et donc :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{4, 9\}}$$

Dans toute la suite du problème, on désigne par E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie ≥ 1 et par f un endomorphisme de E. On note e l'endomorphisme identité de E et $\widetilde{0}$ l'endomorphisme nul de E. On suppose qu'il existe un entier $m \geq 1$, des réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes non nuls $p_1, ..., p_m$ de E tels que : $\forall k \in [\![0, m]\!]$, $f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$. Enfin, on considère les polynômes :

$$N : x \longmapsto \prod_{l=1}^m (x - \lambda_l) \quad \text{et pour tout } i \in [\![1, m]\!], \quad M_i : x \longmapsto \prod_{1 \leq l \leq m,\ l \neq i} (x - \lambda_l) \ \text{ et } \ L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[x]$.

Partie II : Etude des puissances de f

(1) Montrons que, pour tout $P \in \mathbb{R}_m[x]$, on a : $P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i$. Comme P est un élément de $\mathbb{R}_m[x]$, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_m$ tels que $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$. Dès lors, on obtient par interversion des sommes que :

$$\sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=0}^m a_k \lambda_i^k\right) p_i = \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i\right).$$

Comme $\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i = f^k$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, il s'ensuit que :

$$\sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i = \sum_{k=0}^m a_k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{k=0}^m a_k f^k = P(f).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $P \in \mathbb{R}_m[x]$:

$$\boxed{P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.}$$

(2) Montrons l'égalité : $N(f) = \widetilde{0}$. Comme $N : x \longmapsto \prod_{l=1}^{m}(x - \lambda_l)$, le polynôme N est à coefficients réels de degré m, et donc N appartient à $\mathbb{R}_m[x]$. D'après la question précédente, on obtient que :

$$N(f) = \sum_{i=1}^{m} N(\lambda_i) p_i.$$

Mais comme $N(\lambda_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ par construction, il s'ensuit que :

$$N(f) = \sum_{i=1}^{m} 0 \times p_i = \widetilde{0}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{N(f) = \widetilde{0}.}$$

(3) (a) Montrons que, pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égal à 1 si $i = j$ et à 0 sinon. Pour ce faire, on procède à une distinction de cas. Tout d'abord, si $i = j$, alors on trouve que :

$$L_i(\lambda_j) = L_i(\lambda_i) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i(\lambda_i) = 1.$$

A présent, supposons que $i \neq j$. Comme $M_i : x \longmapsto \prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq i}(x - \lambda_l)$ et que $i \neq j$, le réel λ_j est racine de M_i, ce qui entraine que :

$$L_i(\lambda_j) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i(\lambda_j) = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} \times 0 = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$:

$$\boxed{L_i(\lambda_j) = 1 \text{ si } i = j \text{ et } L_i(\lambda_j) = 0 \text{ si } i \neq j.}$$

(b) Montrons que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a : $L_i(f) = p_i$. Comme $L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i$ et que $M_i : x \longmapsto \prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq i}(x - \lambda_l)$, le polynôme L_i est à coefficients réels de degré $m - 1$, et donc L_i appartient à $\mathbb{R}_m[x]$. D'après la question (1) de la partie II, on obtient que :

$$L_i(f) = \sum_{j=1}^{m} L_i(\lambda_j) p_j.$$

Comme $L_i(\lambda_j) = 1$ si $i = j$ et $L_i(\lambda_j) = 0$ si $i \neq j$, il s'ensuit que :

$$L_i(f) = \sum_{1 \leq j \leq m,\, j \neq i} L_i(\lambda_j) p_j + L_i(\lambda_i) p_i = \sum_{1 \leq j \leq m,\, j \neq i} 0 \times p_j + 1 \times p_i = p_i.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$:

$$\boxed{L_i(f) = p_i.}$$

(4) (a) Montrons que : $e = \sum_{i=1}^{m} p_i$. Comme $f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, on a pour $k = 0$ que :

$$e = f^0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 p_i = \sum_{i=1}^{m} 1 \times p_i.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{e = \sum_{i=1}^{m} p_i.}$$

(b) Montrons que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathfrak{Im}(p_1), ..., \mathfrak{Im}(p_m)$. Comme tous les ensembles $\mathfrak{Im}(p_i)$ sont des sous-espaces vectoriels de E, on a clairement l'inclusion :

$$\sum_{i=1}^{m} \mathfrak{Im}(p_i) \subset E.$$

Par ailleurs, on obtient avec la question précédente que, pour tout $x \in E$:

$$x = e(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \right)(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x).$$

Comme $p_i(x)$ appartient à $\mathfrak{Im}(p_i)$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on voit que x appartient à $\sum_{i=1}^m \mathfrak{Im}(p_i)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, il s'ensuit que :

$$E \subset \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{Im}(p_i).$$

Par conséquent, on en déduit par double inclusion que :

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{Im}(p_i).}$$

(5) Soit i un élément de $[\![1, m]\!]$.

(a) Vérifions que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $N(x) = M_i(\lambda_i)(x - \lambda_i)L_i(x)$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$N(x) = \prod_{l=1}^{m}(x - \lambda_l) = (x - \lambda_i) \prod_{1 \leq l \leq m,\ l \neq i} (x - \lambda_l) = (x - \lambda_i)M_i(x).$$

Comme $L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$N(x) = (x - \lambda_i)M_i(x) = (x - \lambda_i) \times M_i(\lambda_i) \times \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i(x) = (x - \lambda_i) \times M_i(\lambda_i) \times L_i(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{N(x) = M_i(\lambda_i)(x - \lambda_i)L_i(x).}$$

(b) Montrons que : $\mathfrak{Im}(p_i) \subset \ker(f - \lambda_i e)$. D'après la question (2) de la partie II, on sait que $N(f) = \widetilde{0}$, ce qui entraine avec la question précédente que :

$$M_i(\lambda_i)(f - \lambda_i e) \circ L_i(f) = \widetilde{0}.$$

Comme $M_i(\lambda_i)$ est un réel non nul, on obtient que :

$$(f - \lambda_i e) \circ L_i(f) = \widetilde{0}.$$

Comme $L_i(f) = p_i$ d'après la question (3)(b) de la partie II, on trouve que :

$$(f - \lambda_i e) \circ p_i = \widetilde{0}.$$

Considérons un élément x de $\mathfrak{Im}(p_i)$. Alors il existe un élément y de E tel que $p_i(y) = x$. Avec la relation ci-dessus, on obtient que :

$$(f - \lambda_i e)(x) = (f - \lambda_i e)(p_i(y)) = (f - \lambda_i e) \circ p_i(y) = \widetilde{0}(y) = 0_E,$$

et donc x appartient à $\ker(f - \lambda_i e)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathfrak{Im}(p_i)$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(p_i) \subset \ker(f - \lambda_i e).}$$

(6) Montrons que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ et que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, le sous-espace propre de f associé à λ_i est égal à $\mathfrak{Im}(p_i)$. Tout d'abord, on peut remarquer que $\mathfrak{Im}(p_i) \neq \{0_E\}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, et ce car $p_i \neq \widetilde{0}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ par hypothèse de départ. Comme $\mathfrak{Im}(p_i) \subset \ker(f - \lambda_i e)$ d'après la question précédente, on obtient que $\ker(f - \lambda_i e) \neq \{0_E\}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, et donc les réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont valeurs propres de f. On désigne alors par $E_{\lambda_1}(f), ..., E_{\lambda_m}(f)$ les sous-espaces propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Comme $\mathfrak{Im}(p_i) \subset \ker(f - \lambda_i e) = E_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et que $E = \sum_{i=1}^m \mathfrak{Im}(p_i)$ d'après la question (4)(b) de la partie II, on obtient que $E \subset \sum_{i=1}^m E_{\lambda_i}(f)$, et donc :

$$E = \sum_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(f).$$

Comme les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont toujours en somme directe, il s'ensuit que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(f).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les réels } \lambda_1, ..., \lambda_m.}$$

A présent, fixons un indice $i \in [\![1, m]\!]$. Comme $\mathfrak{Im}(p_i) \subset \ker(f - \lambda_i e)$ et que $\ker(f - \lambda_i e) = E_{\lambda_i}(f)$, on voit que $\mathfrak{Im}(p_i) \subset E_{\lambda_i}(f)$. Réciproquement, considérons un élément x de $E_{\lambda_i}(f)$. Comme $f(x) = \lambda_i x$ et que $p_i = L_i(f)$ d'après la question (3)(b) de la partie II, on voit d'après le cours que :

$$p_i(x) = L_i(f)(x) = L_i(\lambda_i)x.$$

Comme p_i est une application linéaire et que $L_i(\lambda_i) \neq 0$, ceci entraine que :

$$x = \frac{1}{L_i(\lambda_i)} p_i(x) = p_i \left(\frac{1}{L_i(\lambda_i)} x \right),$$

et donc le vecteur x appartient à $\mathfrak{Im}(p_i)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in E_{\lambda_i}(f)$, il s'ensuit que $E_{\lambda_i}(f) \subset \mathfrak{Im}(p_i)$, et donc $E_{\lambda_i}(f) = \mathfrak{Im}(p_i)$ par double inclusion. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$:

$$\boxed{E_{\lambda_i}(f) = \mathfrak{Im}(p_i).}$$

(7) (a) Montrons que, pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a : $p_i \circ p_j = \widetilde{0}$. Pour ce faire, fixons deux indices $i, j \in [\![1, m]\!]$ tels que $i \neq j$. D'après la question (3)(a) de la partie II, on sait que $L_i(f) = p_i$ et $L_j(f) = p_j$. Comme $M_k : x \longmapsto \prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq k} (x - \lambda_l)$ et que $L_k : x \longmapsto \frac{1}{M_k(\lambda_k)} M_k(x)$ pour tout $k \in [\![1, m]\!]$ par définition, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
L_i L_j(x) &= \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i(x) \frac{1}{M_j(\lambda_j)} M_j(x) \\
&= \frac{1}{M_i(\lambda_i) M_j(\lambda_j)} \prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq i} (x - \lambda_l) \prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq j} (x - \lambda_l) \\
&= \frac{1}{M_i(\lambda_i) M_j(\lambda_j)} \left[\prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq i,j} (x - \lambda_l) \right] (x - \lambda_j) \prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq j} (x - \lambda_l) \\
&= \frac{1}{M_i(\lambda_i) M_j(\lambda_j)} \left[\prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq i,j} (x - \lambda_l) \right] \prod_{1 \leq l \leq m} (x - \lambda_l) \\
&= \frac{1}{M_i(\lambda_i) M_j(\lambda_j)} \left[\prod_{1 \leq l \leq m,\, l \neq i,j} (x - \lambda_l) \right] N(x).
\end{aligned}$$

En particulier, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $L_i L_j = QN$. Comme $N(f) = \widetilde{0}$ d'après la question (2) de la partie II, il s'ensuit que :

$$p_i \circ p_j = L_i(f) \circ L_j(f) = (L_i L_j)(f) = (QN)(f) = Q(f) \circ N(f) = Q(f) \circ \widetilde{0} = \widetilde{0}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\boxed{p_i \circ p_j = \widetilde{0}.}$$

(b) Montrons que : $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $p_i \circ p_i = p_i$. Comme $e = \sum_{i=1}^m p_i$ d'après le résultat de la question (4)(a), on trouve que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$:

$$p_i \circ p_i = p_i \circ \left(e - \sum_{1 \leq j \leq m,\, j \neq i} p_j \right) = p_i \circ e - \sum_{1 \leq j \leq m,\, j \neq i} p_i \circ p_j.$$

Comme $p_i \circ e = p_i$ et que $p_i \circ p_j = \widetilde{0}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$ tel que $i \neq j$ d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$p_i \circ p_i = p_i \circ e - \sum_{1 \leq j \leq m,\, j \neq i} p_i \circ p_j = p_i - \sum_{1 \leq j \leq m,\, j \neq i} \widetilde{0} = p_i.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$:

$$\boxed{p_i \circ p_i = p_i.}$$

(c) Etablissons que, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, on a : $p_i \circ f = \lambda_i p_i$. Comme $f = \sum_{j=1}^m \lambda_j p_j$ par hypothèse de départ, on trouve que, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$:

$$p_i \circ f = p_i \circ \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j p_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j p_i \circ p_j.$$

Comme $p_i \circ p_i = p_i$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$ et que $p_i \circ p_j = \widetilde{0}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$ tel que $i \neq j$ d'après les questions précédentes, il s'ensuit que :

$$p_i \circ f = \sum_{1 \leq j \leq m,\ j \neq i} \lambda_j p_i \circ p_j + \lambda_i p_i \circ p_i = \widetilde{0} + \lambda_i p_i.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$:

$$\boxed{p_i \circ f = \lambda_i p_i.}$$

(8) Montrons tout d'abord par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(k) : "f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0), ..., \mathcal{P}(m)$ sont vraies car $f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$ pour tout $k \in [\![0,m]\!]$ par hypothèse de départ. A présent, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i$. Comme $f = \sum_{j=1}^m \lambda_j p_j$ par hypothèse de départ, ceci entraine que :

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i\right)\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j p_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i^k \lambda_j p_i \circ p_j.$$

Comme $p_i \circ p_j = \widetilde{0}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$ tel que $i \neq j$, et ce d'après la question (7)(a) de la partie II, on obtient que :

$$f^{k+1} = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m \lambda_i^k \lambda_j p_i \circ p_j\right] = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \lambda_i p_i \circ p_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k+1} p_i \circ p_i.$$

Comme $p_i \circ p_i = p_i$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$ d'après la question (7)(b) de la partie II, on trouve que :

$$f^{k+1} = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k+1} p_i \circ p_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k+1} p_i,$$

et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i.}$$

A présent, montrons que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$: $P(f) = \sum_{i=0}^m P(\lambda_i) p_i$. Pour ce faire, on considère un élément quelconque P de $\mathbb{R}[x]$. Alors il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. Par interversion des sommes, on trouve que :

$$\sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda_i^k\right) p_i = \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i\right).$$

Comme $\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i = f^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après ce qui précède, il s'ensuit que :

$$\sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i = \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i\right) = \sum_{k=0}^n a_k f^k = P(f).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$\boxed{P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.}$$

Partie III : Intervention de produits scalaires

Dans cette partie, on munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in E \times E$ par :

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y)\rangle.$$

(1) Montrons que φ est un produit scalaire sur E. Pour ce faire, on va vérifier que φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

Première étape : φ est symétrique.

En effet, comme $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique, on a pour tous $x, y \in E$:

$$\varphi(y,x) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(y), p_i(x)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y)\rangle = \varphi(x,y),$$

d'où il s'ensuit que φ est symétrique.

Deuxième étape : φ est bilinéaire.

En effet, comme $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire et que p_i est linéaire pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on obtient par linéarité de la somme que, pour tous $x_1, x_2, y \in E$ et pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), p_i(y)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_1 p_i(x_1) + \lambda_2 p_i(x_2), p_i(y)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 \langle p_i(x_1), p_i(y)\rangle + \lambda_2 \langle p_i(x_2), p_i(y)\rangle \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x_1), p_i(y)\rangle + \lambda_2 \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x_2), p_i(y)\rangle \\
&= \lambda_1 \varphi(x_1, y) + \lambda_2 \varphi(x_2, y),
\end{aligned}$$

ce qui entraine que φ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire par symétrie.

Troisième étape : φ est définie positive.

En effet, comme $\langle\ ,\ \rangle$ est définie positive, on a pour tout $x \in E$:

$$\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(x)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \|p_i(x)\|^2 \geq 0,$$

et donc φ est positive. De plus, si $\varphi(x, x) = 0$, alors on voit que $\|p_i(x)\|^2 = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ (car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chacun des réels est nul). En particulier, on constate que $\|p_i(x)\| = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, et donc $p_i(x) = 0_E$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ d'après les propriétés de la norme. Comme $e = \sum_{i=1}^{m} p_i$ d'après la question (4)(a) de la partie II, il s'ensuit que :

$$x = e(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) = \sum_{i=1}^{m} 0_E = 0_E,$$

et donc φ est définie. En particulier, la forme bilinéaire φ est définie positive.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

(2) Montrons que, pour tous $x, y \in E$, on a : $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f(y))$. Comme $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire, on obtient d'après la question (7)(c) de la partie II que, pour tous $x, y \in E$:

$$\begin{aligned}
\varphi(f(x), y) &= \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(f(x)), p_i(y)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle (p_i \circ f)(x), p_i(y)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i p_i(x), p_i(y)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), \lambda_i p_i(y)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), (p_i \circ f)(y)\rangle \\
&= \varphi(x, f(y)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tous $x, y \in E$:

$$\boxed{\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f(y)).}$$

2. Sujet type HEC-ESSEC Maths I

Corrigé du problème 2. Ce problème étudie quelques propriétés des endomorphismes cycliques d'un espace vectoriel E de dimension finie, ainsi que la décomposition de Frobenius d'un élément de $\mathcal{L}(E)$. Dans tout le problème :

— n est un entier ≥ 2 ;
— E est un espace vectoriel de dimension n ;
— $\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E ;
— on rappelle qu'une **homothétie** est une application du type $\lambda \mathrm{Id}_E$, où $\lambda \in \mathbb{R}$;
— un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par un endomorphisme u de E si, pour tout $x \in F$, on a $u(x) \in F$. On note alors $u_{|F}$ l'endomorphisme de F défini pour tout $x \in F$ par $u_{|F}(x) = u(x)$. Cet endomorphisme est appelé **l'endomorphisme de F induit par u** ;
— si u est un endomorphisme de E et si e est un vecteur de E, on note $E_u(e)$ le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_u(e) = \mathrm{Vect}\left(u^k(e) | k \in [\![0, n-1]\!]\right) = \mathrm{Vect}\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right).$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{B}(e, k)$ la famille $\left(e, u(e), ..., u^{k-1}(e)\right)$.
— on dit qu'un endomorphisme u de E est **cyclique** s'il existe $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$; on considèrera qu'en dimension 1, tout endomorphisme est cyclique ;
— soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est **une matrice de Frobenius** ou **matrice compagnon** s'il existe des réels $a_0, ..., a_{n-1}$ tels que :

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}
\end{pmatrix},$$

et de plus, le polynôme $P_A : x \longmapsto x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0$ est appelé le **polynôme caractéristique** de A ;

— on dit qu'un endomorphisme u de E est **nilpotent** s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, $r = \min\{k \in \mathbb{N}^* |\ u^k = 0\}$ est appelé **l'indice de nilpotence** de u ;
— enfin, on admet que toute partie non vide et majorée $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément $(*)$; cet élément est appelé le **maximum** de A et noté $\max\{k \in A\}$.

Le problème comporte trois parties. Dans la première partie, on étudie les premières propriétés des endomorphismes cycliques et on traite quelques exemples. Dans la seconde partie, on étudie le cas des endomorphismes diagonalisables et nilpotents. Enfin, dans la troisième partie, on obtient une décomposition d'un endomorphisme, appelée **décomposition de Frobenius**, et on en déduit quelques propriétés élémentaires ; on montre en particulier que toute matrice carrée est semblable à sa transposée.

Partie I : Premières propriétés.

Soit u un endomorphisme de E et soit e un vecteur non nul de E.

Section A : Etude des sous-espaces $E_u(e)$.

(1) Justifions que la famille $\mathcal{B}(e, n+1)$ est liée. Par définition, on voit que $\mathcal{B}(e, n+1) = (e, u(e), ..., u^n(e))$, et donc la famille $\mathcal{B}(e, n+1)$ compte $n+1$ éléments. Mais comme $\dim(E) = n$, cette famille ne peut pas être libre, et donc :

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{B}(e, n+1) \text{ est liée.}}$$

(2) On pose $d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* |\ \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\}$. Justifions l'existence de $d(e)$. Pour ce faire, on pose :

$$\mathcal{A} = \{k \in \mathbb{N}^* |\ \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\}.$$

Comme $e \neq 0$, la famille $\mathcal{B}(e, 1) = (e)$ est formée d'un seul vecteur non nul. En particulier, elle est libre et l'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide car il contient l'entier 1. De plus, on voit par définition que $\mathcal{B}(e, k) = \big(e, u(e), ..., u^{k-1}(e)\big)$, et donc la famille $\mathcal{B}(e, k)$ compte k éléments. Dès lors, comme $\dim(E) = n$, cette famille ne peut pas être libre si $k \geq n+1$, et donc l'ensemble $\mathcal{A}$ est majoré par n. Mais comme toute partie non vide et majorée $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément, on en déduit que :

$$\boxed{d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* |\ \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\} \text{ existe.}}$$

(3) Montrons tout d'abord qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, ..., a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = \sum_{i=0}^{d(e)-1} a_i u^i(e).$$

Par définition, $d(e)$ est le plus grand entier k tel que la famille $\mathcal{B}(e, k)$ soit libre. Comme $d(e)+1 > d(e)$, on voit en particulier que la famille $\mathcal{B}(e, d(e)+1)$ n'est pas libre, et donc il existe des réels $b_0, b_1, ..., b_{d(e)}$ non tous nuls tels que :

$$b_0 e + b_1 u(e) + ... + b_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) + b_{d(e)} u^{d(e)}(e) = 0.$$

Si $b_{d(e)}$ était égal à 0, alors on aurait :

$$b_0 e + b_1 u(e) + ... + b_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e) = 0,$$

et donc $b_0 = b_1 = ... = b_{d(e)-1} = 0$ car la famille $\mathcal{B}(e, d(e))$ est libre. En particulier, tous les b_i seraient nuls, ce qui est impossible car ils sont non tous nuls par hypothèse. Dès lors, on voit que $b_{d(e)} \neq 0$, et on obtient avec la relation précédente que :

$$u^{d(e)}(e) = -\frac{b_0}{b_{d(e)}} e - \frac{b_1}{b_{d(e)}} u(e) - ... - \frac{b_{d(e)-1}}{b_{d(e)}} u^{d(e)-1}(e).$$

Si l'on pose $a_i = -\frac{b_i}{b_{d(e)}}$ pour tout $i \in [\![0, d(e)-1]\!]$, alors on vient de montrer que :

$$\boxed{\exists a_0, ..., a_{d(e)-1} \in \mathbb{R},\ \ u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e).}$$

A présent, montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout entier $k \geq d(e)$ par :

$\mathcal{P}(k)$: "le vecteur $u^k(e)$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\Big(e, u(e), ..., u^{d(e)-1}(e)\Big)$ ".

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(d(e))$ est vraie d'après ce qui précède. A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un certain entier $k \geq d(e)$, et montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que le vecteur $u^k(e)$ est combinaison linéaire des vecteurs $e, u(e), ..., u^{d(e)-1}(e)$, et donc il existe des réels $c_0, c_1, ..., c_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^k(e) = c_0 e + c_1 u(e) + ... + c_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e).$$

Fixons des réels $a_0, a_1, ..., a_{d(e)-1}$ tels que $u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e)$. Par linéarité de u, on trouve que :

$$\begin{aligned}
u^{k+1}(e) &= u\left(c_0 e + c_1 u(e) + ... + c_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e)\right) \\
&= c_0 u(e) + c_1 u^2(e) + ... + c_{d(e)-2} u^{d(e)-1}(e) + c_{d(e)-1} u^{d(e)}(e) \\
&= c_0 u(e) + c_1 u^2(e) + ... + c_{d(e)-2} u^{d(e)-1}(e) + c_{d(e)-1}\left(a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e)\right) \\
&= c_{d(e)-1} a_0 e + (c_0 + c_{d(e)-1} a_1) u(e) + (c_1 + c_{d(e)-1} a_2) u^2(e) + ... + (c_{d(e)-2} + c_{d(e)-1} a_{d(e)-1}) u^{d(e)-1}(e),
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $u^{k+1}(e)$ est combinaison linéaire des vecteurs $e, u(e), ..., u^{d(e)-1}(e)$, et donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $k \geq d(e)$, et donc on a pour tout $k \geq d(e)$:

$$\boxed{u^k(e) \text{ est combinaison linéaire des vecteurs } e, u(e), ..., u^{d(e)-1}(e).}$$

Enfin, montrons que $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$. Pour tout $k \in [\![0, d(e)-1]\!]$, le vecteur $u^k(e)$ est un élément de $\mathcal{B}(e, d(e))$, et donc il appartient à $\text{Vect}(\mathcal{B}(e, d(e)))$. De plus, on sait d'après ce qui précède que, pour tout $k \geq d(e)$, le vecteur $u^k(e)$ appartient à $\text{Vect}(\mathcal{B}(e, d(e)))$. En d'autres termes, on voit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $u^k(e)$ appartient à $\text{Vect}(\mathcal{B}(e, d(e)))$. En particulier, on a l'inclusion suivante par définition de $E_u(e)$:

$$E_u(e) = \text{Vect}\left(u^k(e) | k \in [\![0, n-1]\!]\right) \subset \text{Vect}\left(\mathcal{B}(e, d(e))\right).$$

Comme de plus tout élément de $\mathcal{B}(e, d(e))$ appartient au sous-espace vectoriel $E_u(e)$, on a aussi :

$$\text{Vect}\left(\mathcal{B}(e, d(e))\right) \subset E_u(e).$$

Par double inclusion, il s'ensuit que :

$$E_u(e) = \text{Vect}\left(\mathcal{B}(e, d(e))\right).$$

En particulier, la famille $\mathcal{B}(e, d(e))$ est génératrice de $E_u(e)$. Mais comme elle est libre par définition de $d(e)$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{B}(e, d(e)) \text{ est une base de } E_u(e).}$$

(4) Montrons tout d'abord que $E_u(e)$ est stable par l'endomorphisme u. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $E_u(e)$. D'après la question précédente, on sait que $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$, et donc il existe des réels $a_0, ..., a_{d(e)-1}$ tels que :

$$x = c_0 e + c_1 u(e) + ... + c_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e).$$

De plus, toujours d'après la question précédente, il existe des réels $a_0, ..., a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e).$$

Par linéarité de u, on trouve que :

$$\begin{aligned}
u(x) &= u\left(c_0 e + c_1 u(e) + ... + c_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e)\right) \\
&= c_0 u(e) + c_1 u^2(e) + ... + c_{n-2} u^{n-1}(e) + c_{d(e)-1} u^{d(e)}(e) \\
&= c_0 u(e) + c_1 u^2(e) + ... + c_{d(e)-2} u^{d(e)-1}(e) + c_{d(e)-1}\left(a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e)\right) \\
&= c_{d(e)-1} a_0 e + (c_0 + c_{d(e)-1} a_1) u(e) + (c_1 + c_{d(e)-1} a_2) u^2(e) + ... + (c_{d(e)-2} + c_{d(e)-1} a_{d(e)-1}) u^{d(e)-1}(e),
\end{aligned}$$

En particulier, $u(x)$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}(e, d(e))$. Comme $\mathcal{B}(e, d(e))$ est une base de $E_u(e)$, il s'ensuit que $u(x)$ appartient à $E_u(e)$. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in E_u(e)$, on en déduit que :

$$\boxed{E_u(e) \text{ est stable par } u.}$$

Montrons à présent que tout sous-espace vectoriel F de E contenant e et stable par u contient $E_u(e)$. Par définition, si F est stable par u et contient e, il contient $u(e)$. Par une récurrence facile, on peut vérifier que F contient $u^k(e)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, F contient les vecteurs $e, u(e), ..., u^{n-1}(e)$. Mais comme F est un sous-espace vectoriel de E, il s'ensuit que :

$$E_u(e) = \text{Vect}\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right) \subset F.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{tout sous-espace vectoriel } F \text{ stable par } u \text{ et contenant } e \text{ contient } E_u(e).}$$

(5) Déterminons à quelle condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier $d(e)$ le vecteur e est un vecteur propre pour u. Tout d'abord, si e est vecteur propre de u pour une valeur propre λ, alors on voit que $u(e) = \lambda e$ et $e \neq 0$. D'après le cours, on constate que $u^k(e) = \lambda^k e$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, tous les vecteurs $u^k(e)$ sont colinéaires à e pour tout $k \geq 1$, et la famille $\mathcal{B}(e, k)$ est liée pour tout $k \geq 2$. De plus, si $k = 1$, alors la famille $\mathcal{B}(e, 1) = (e)$ est libre car elle est formée d'un seul vecteur non nul. Dès lors, il s'ensuit par définition de $d(e)$ que :

$$d(e) = \max\{k \in \mathbb{N}^* | \ \mathcal{B}(e, k) \text{ est libre}\} = 1.$$

Réciproquement, supposons que $d(e) = 1$. Par définition de $d(e)$, la famille $\mathcal{B}(e, d(e) + 1) = \mathcal{B}(e, 2) = (e, u(e))$ n'est pas libre, et donc les vecteurs $e, u(e)$ sont colinéaires. Comme $e \neq 0$ par hypothèse, il existe un réel λ tel que $u(e) = \lambda e$, et donc e est vecteur propre de u. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{e \text{ est vecteur propre de } u \text{ si et seulement si } d(e) = 1.}$$

(6) Montrons que u est une homothétie si et seulement si, pour tout vecteur non nul e de E, on a $d(e) = 1$. Tout d'abord, supposons que u soit une homothétie. Alors il existe un réel λ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$. En particulier, on voit que $u(e) = \lambda e$ pour tout vecteur non nul e de E, et donc tout vecteur $e \neq 0$ est vecteur propre de u. D'après la question précédente, il s'ensuit que $d(e) = 1$ pour tout e de $E \setminus \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $d(e) = 1$ pour tout vecteur e non nul de E. Fixons un base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E. D'après la question précédente et comme $e_i \neq 0$, le vecteur e_i est vecteur propre de u pour une certaine valeur propre λ_i, et ce pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Fixons alors deux indices $i, j \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \neq j$. Comme $e_i + e_j \neq 0$, il existe un réel $\lambda_{i,j}$ tel que $u(e_i + e_j) = \lambda_{i,j}(e_i + e_j)$. Par linéarité de u, ceci nous donne que :

$$u(e_i + e_j) = \lambda_{i,j} e_i + \lambda_{i,j} e_j = u(e_i) + u(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j.$$

En particulier, on obtient que :

$$(\lambda_{i,j} - \lambda_i) e_i + (\lambda_{i,j} - \lambda_j) e_j = 0.$$

Comme $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de E et que $i \neq j$, la famille (e_i, e_j) est libre comme sous-famille d'une famille libre, et donc la relation précédente entraine que $\lambda_{i,j} - \lambda_i = \lambda_{i,j} - \lambda_j = 0$. En particulier, on voit que $\lambda_i = \lambda_j$. Comme ceci est vrai pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \neq j$, tous les λ_i sont égaux entre eux. Si l'on désigne par λ leur valeur commune, alors on voit que $u(e_i) = \lambda e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En particulier, les endomorphismes u et λId_E coincident sur la base $\mathcal{B}$ de E, d'où il s'ensuit qu'ils sont égaux, et donc u est une homothétie. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{u \text{ est une homothétie si et seulement si } d(e) = 1 \text{ pour tout vecteur } e \text{ non nul de } E.}$$

(7) Montrons que u est un endomorphisme cyclique si et seulement s'il existe un vecteur non nul e de E tel que $d(e) = n$. Tout d'abord, supposons que u soit un endomorphisme cyclique. Alors il existe un vecteur $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$. En particulier, on voit que $E = \text{Vect}(e, u(e), ..., u^{n-1}(e))$, et donc la famille $\mathcal{B}(e, n)$ est génératrice de E. Comme cette famille compte n éléments et que $\dim(E) = n$, $\mathcal{B}(e, n)$ est une base de E. En particulier, cette famille est libre, et donc $e \neq 0$. De plus, on voit par définition de $d(e)$ que $d(e) \geq n$. A noter que, comme $\mathcal{B}(e, k)$ compte k éléments et que $\dim(E) = n$, la famille $\mathcal{B}(e, k)$ ne peut pas être libre si $k > n$. Dès lors, ceci entraine que $d(e) \leq n$, et donc $d(e) = n$. En d'autres termes, on vient de montrer qu'il existait un vecteur $e \neq 0$ tel que $d(e) = n$.

Etablissons à présent la réciproque. Pour ce faire, supposons qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $d(e) = n$. Alors la famille $\mathcal{B}(e, n)$ est libre par définition de E. Comme cette famille compte n éléments et que $\dim(E) = n$, $\mathcal{B}(e, n)$ est une base de E. En particulier, cette famille est génératrice de E, et donc on voit que :

$$E_u(e) = \text{Vect}\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right) = \text{Vect}\left(\mathcal{B}(e, n)\right) = E.$$

Comme $E_u(e) = E$, il s'ensuit que u est cyclique. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{u \text{ est cyclique si et seulement s'il existe un vecteur non nul } e \text{ de } E \text{ tel que } d(e) = n.}$$

Section B : Premières propriétés des endomorphismes cycliques.

On suppose dans cette section que u est un endomorphisme cyclique de E, et donc qu'il existe un vecteur non nul e de E tel que $E = E_u(e)$.

(1) On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e,n)$ de E. Vérifions que A est une matrice de Frobenius. D'après la question (3) de la partie I, section A, il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_{d(e)-1}$ tels que :

$$u^{d(e)}(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{d(e)-1} u^{d(e)-1}(e).$$

Comme $d(e) = n$, ceci entraine que :

$$u^n(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{n-1} u^{n-1}(e).$$

En particulier, on voit que :

$$\left\{\begin{array}{lllll} u(e) & & & = & 0 \times e + 1 \times u(e) + ... + 0 \times u^{n-1}(e) \\ u(u(e)) & = & u^2(e) & = & 0 \times e + 0 \times u(e) + 1 \times u^2(e) + ... + 0 \times u^{n-1}(e) \\ \vdots & & & & \\ u^n(e) & = & u(u^{n-1}(e)) & = & a_0 \times e + a_1 \times u(e) + ... + a_{n-1} \times u^{n-1}(e) \end{array}\right. .$$

En particulier, la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}(e,n)$ de E est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A \text{ est une matrice de Frobenius.}}$$

(2) On note $P_A : x \longmapsto x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_1 x - a_0$ son polynôme caractéristique. Calculons $(P_A(u))(e)$. Par définition, on voit que :

$$(P_A(u))(e) = \left(u^n - a_{n-1}u^{n-1} - ... - a_1 u - a_0 \mathrm{Id}_E\right)(e) = u^n(e) - a_{n-1}u^{n-1}(e) - ... - a_1 u(e) - a_0 e.$$

Mais comme $u^n(e) = a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{n-1}u^{n-1}(e)$ d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$\boxed{(P_A(u))(e) = 0.}$$

Calculons à présent $(P_A(u))\left(u^k(e)\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $P_A(u)$ et u^k sont deux polynômes en le même endomorphisme u, ils commutent. Dès lors, par linéarité de u, on a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$(P_A(u))\left(u^k(e)\right) = u^k \circ P_A(u)(e) = u^k\left(P_A(u)(e)\right) = u^k(0) = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\boxed{(P_A(u))\left(u^k(e)\right) = 0.}$$

Montrons enfin que P_A est un polynôme annulateur de u. D'après les calculs précédents, on voit que $(P_A(u))\left(u^k(e)\right) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. En particulier, l'endomorphisme $(P_A(u))$ est nul sur la base $\mathcal{B}(e,n)$ de E, et donc c'est l'endomorphisme nul. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur de } u.}$$

(3) Vérifions que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$. Pour ce faire, considérons des réels $b_0, ..., b_{n-1}$ tels que $b_0 \mathrm{Id}_E + b_1 u + ... + b_{n-1}u^{n-1} = 0$. En évaluant cette égalité sur le vecteur e, on trouve que :

$$\left(b_0 \mathrm{Id}_E + b_1 u + ... + b_{n-1}u^{n-1}\right)(e) = b_0 e + b_1 u(e) + ... + b_{n-1}u^{n-1}(e) = 0(e) = 0.$$

Comme la famille $\mathcal{B}(e,n)$ est une base de E, elle est libre et la relation ci-dessus entraine que $b_0 = b_1 = ... = b_{n-1} = 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n-1}) \text{ est une famille libre.}}$$

(4) Montrons que P_A est un polynôme annulateur non nul de u de degré minimal. D'après la question (2) de la partie I, section B, on sait déjà que P_A est un polynôme annulateur non nul de u. Reste à vérifier qu'il est de degré minimal. Pour ce faire, considérons un polynôme Q de degré $\leq n-1$. Par définition, il existe des réels $b_0, ..., b_{n-1}$ tels que $Q : x \longmapsto b_0 + b_1 x + ... + b_{n-1}x^{n-1}$. Si l'on suppose que $Q(u) = 0$, alors on trouve que :

$$Q(u) = b_0 \mathrm{Id}_E + b_1 u + ... + b_{n-1}u^{n-1} = 0.$$

Comme la famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n-1})$ est libre d'après la question précédente, il s'ensuit que $b_0 = b_1 = ... = b_{n-1} = 0$, et donc Q est le polynôme nul. En d'autres termes, il n'existe pas de polynôme annulateur non nul de u de degré $\leq n-1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P_A \text{ est un polynôme annulateur non nul de degré minimal de } u.}$$

(5) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons tout d'abord que λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de P_A. D'après le cours, on sait que, si λ est valeur propre de u, alors λ est racine de tout polynôme annulateur de u. En particulier, λ est racine de P_A d'après la question précédente.

Réciproquement, supposons que λ soit racine de P_A. Alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ tel que $P_A(x) = (x-\lambda)Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. A noter que, comme $P_A \neq 0$, on a $Q \neq 0$. Comme P_A est annulateur de u, on trouve que :

$$P_A(u) = (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ Q(u) = 0.$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que λ ne soit pas une valeur propre de u. Alors l'endomorphisme $u - \lambda\mathrm{Id}_E$ est injectif, et donc il est bijectif car E est de dimension finie. En particulier, on trouve que :

$$(u - \lambda\mathrm{Id}_E)^{-1} \circ (u - \lambda\mathrm{Id}_E) \circ Q(u) = \mathrm{Id}_E \circ Q(u) = Q(u) = (u - \lambda\mathrm{Id}_E)^{-1} \circ 0 = 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que Q est annulateur de u, mais ceci est impossible d'après la question précédente car Q est non nul et de degré $\leq n-1$. En d'autres termes, on vient de montrer que, si λ est racine de P_A, alors λ est valeur propre de u. Par double implication, on en déduit que :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est racine de } P_A.}$$

A présent, vérifions que le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est de dimension 1. Comme λ est valeur propre de u, on a $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$. De plus, comme le rang d'un endomorphisme est égal à celui de sa matrice dans n'importe quelle base, on trouve que :

$$\mathrm{rg}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E) = \mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}\right).$$

Comme les $(n-1)$ premières colonnes de cette matrice forment une famille échelonnée, elles forment une famille libre et le rang ci-dessus est $\geq n-1$. Dès lors, comme $\mathrm{rg}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E) \geq n-1$, on obtient avec le théorème du rang que :

$$\dim(E_\lambda(u)) = \dim(\ker(u - \lambda\mathrm{Id}_E)) = n - \mathrm{rg}\,(u - \lambda\mathrm{Id}_E) \leq n - (n-1) = 1.$$

d'où il s'ensuit que $\dim(E_\lambda(u)) \leq 1$. Mais comme $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$, on en déduit que $\dim(E_\lambda(u)) = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{tout sous-espace propre de } u \text{ est de dimension 1.}}$$

(6) Déterminons une caractérisation portant sur P_A pour que u soit diagonalisable. D'après le cours, on sait que, pour tout endomorphisme u de E :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n.$$

D'après la question précédente, on sait aussi que tous les sous-espaces propres de u sont de dimension 1. En particulier, l'équivalence ci-dessus se ramène à :

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} 1 = \mathrm{card}\,(\mathrm{Sp}(u)) = n.$$

En d'autres termes, u est diagonalisable si et seulement si son spectre compte n éléments. Mais comme le spectre de u est exactement égal à l'ensemble des racines de P_A d'après la question précédente, on en déduit que, si u est un endomorphisme cyclique, alors :

$$\boxed{u \text{ est diagonalisable si et seulement si } P_A \text{ admet } n \text{ racines distinctes.}}$$

Section C : Un premier exemple.

Dans cette section, on suppose que $E = \mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B}_3$ la base canonique de E. On note aussi f et g les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathcal{B}_3$ sont respectivement :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On admet que f est diagonalisable, et on notera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ les valeurs propres de f rangées par ordre croissant.

(1) Déterminons une base de diagonalisation (V_1, V_2, V_3) de f telle que, pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $f(V_i) = \lambda_i V_i$ et telle que la première coordonnée de V_i dans la base $\mathcal{B}_3$ soit 1. Pour ce faire, on commence par calculer les valeurs propres de f. Par définition :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) < 3 \iff \mathrm{rg}(F - \lambda \mathrm{I}_3) < 3.$$

En d'autres termes, on voit que :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \iff \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) < 3.$$

En permutant les lignes L_1 et L_3, on trouve que :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_1$, on obtient que :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2-\lambda+1 \end{pmatrix}\right).$$

Enfin, en effectuant l'opération élémentaire $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$, on trouve que :

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1-\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2 \end{pmatrix}\right).$$

En particulier, on voit que :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\iff -\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que $\mathrm{Sp}(f) = \{-2, 0, 1\}$, et donc :

$$\boxed{\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 1.}$$

A présent, calculons le sous-espace propre $E_{-2}(f)$. Par définition, si x est un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et si X est son vecteur colonne des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$x \in E_{-2}(f) \iff f(x) = -2x \iff AX = -2X.$$

En d'autres termes, on voit que :

$$x \in E_{-2}(f) \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

ce qui nous ramène à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L_1$, on trouve que :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & & -2x_2 & + & x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$

Enfin, en effectuant l'opération élémentaire $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. .$$

Si l'on choisit x_1 comme paramètre, on trouve que $x_1 = x_1$, $x_2 = -x_1$, $x_3 = -2x_1$, et donc :

$$x \in E_{-2}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \in \mathbb{R}, \quad x = x_1(1, -1, -2).$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{E_{-2}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1, -2)).}$$

Ensuite, calculons le sous-espace propre $E_0(f)$. Par définition et avec les mêmes notations que celles utilisées plus haut, on a :

$$x \in E_0(f) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad AX = 0.$$

En d'autres termes, on voit que :

$$x \in E_0(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous ramène à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} & & & & x_3 & = 0 \\ & & & & -x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$

Si l'on choisit x_1 comme paramètre, on trouve que $x_1 = x_1$, $x_2 = x_1$, $x_3 = 0$, et donc :

$$x \in E_0(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \in \mathbb{R}, \quad x = x_1(1, 1, 0).$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{E_0(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0)).}$$

Enfin, calculons le sous-espace propre $E_1(f)$. Par définition, on voit que :

$$x \in E_1(f) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad AX = X.$$

En d'autres termes, on voit que :

$$x \in E_1(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

ce qui nous ramène à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & -x_2 & - & x_3 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$, on trouve que :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & -x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & & -x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}\right. .$$

Enfin, en effectuant l'opération élémentaire $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$, on obtient que :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -x_1 & & & + & x_3 & = 0 \\ & & -x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & & & & 0 & = 0 \end{array}\right. .$$

Si l'on choisit x_1 comme paramètre, on trouve que $x_1 = x_1$, $x_2 = -x_1$, $x_3 = x_1$, et donc :

$$x \in E_1(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \in \mathbb{R}, \quad x = x_1(1,-1,1).$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{E_1(f) = \mathrm{Vect}((1,-1,1)).}$$

Par conséquent, on en déduit qu'une base de diagonalisation (V_1, V_2, V_3) de f qui respecte les conditions demandées est donnée par :

$$\boxed{(V_1, V_2, V_3) = ((1,-1,-2),(1,1,0),(1,-1,1)).}$$

(2) On pose $V = V_1 + V_2 + V_3$. Déterminons tout d'abord $d(V)$. D'après la question précédente, on a :

$$V = (1,-1,-2) + (1,1,0) + (1,-1,1) = (3,-1,-1).$$

Comme la famille $\mathcal{B}(V,k)$ compte k éléments et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, on voit que cette famille est liée pour tout $k \geq 4$, et donc $d(V) \leq 3$ par définition. De plus, par des calculs matriciels, on trouve que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

et donc $f(V) = (-1,1,5)$. De même, on obtient que :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix},$$

et donc $f^2(V) = (5,-5,-7)$. En particulier, on voit que :

$$\mathrm{rg}(V, f(V), f^2(V)) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -5 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}\right).$$

En échangeant les colonnes C_1 et C_2, on trouve que :

$$\mathrm{rg}(V, f(V), f^2(V)) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & -5 \\ -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}\right).$$

En effectuant les opérations élémentaires $C_2 \longleftarrow C_2 + 3C_1$ et $C_3 \longleftarrow C_3 + 5C_1$, on obtient que :

$$\mathrm{rg}(V, f(V), f^2(V)) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5 & -16 & -32 \end{pmatrix}\right) = 3.$$

Comme $\mathrm{rg}(V, f(V), f^2(V)) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, la famille $(V, f(V), f^2(V))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Mais comme cette famille compte 3 éléments et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. En particulier, elle est libre et $d(V) \geq 3$. Comme $d(V) \leq 3$ d'après ce qui précède, on en déduit que :

$$\boxed{d(V) = 3.}$$

Comme $d(V) = 3$, on en déduit aussi d'après la question (7) de la partie I, section (A) que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ est cyclique.}}$$

(3) Déterminons un polynôme annulateur non nul de g de degré minimal. Par des calculs simples, on a :

$$G^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 2G.$$

En particulier, ceci nous donne que $g^2 - 2g = 0$, et donc $P : x \longmapsto x^2 - 2x$ est annulateur de g. A noter que g n'admet pas de polynôme annulateur non nul de degré ≤ 1. Sinon, il existerait des réels a_0, a_1 non tous nuls tels que $a_0 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + a_1 g = 0$, ce qui entrainerait que $a_0 I_3 + a_1 G = 0$, et donc les matrices I_3 et G seraient colinéaires, ce qui n'est manifestement pas le cas ici vu la forme de G, d'où contradiction. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P : x \longmapsto x^2 - 2x \text{ est un polynôme annulateur de } g \text{ de degré minimal.}}$$

Montrons par l'absurde que l'endomorphisme g n'est pas cyclique. Pour ce faire, on suppose qu'il l'est. D'après la question (7) de la partie I, section (A), il existe un vecteur $e \neq 0$ tel que $d(e) = 3$. En particulier, la famille $\mathcal{B}(e,g) = (e, g(e), g^2(e))$ est libre. Comme $g^2 = 2g$ d'après ce qui précède, on voit que $g^2(e) = 2g(e)$, et donc $(e, g(e), g^2(e)) = (e, g(e), 2g(e))$. En particulier, cette famille ne peut pas être libre car ses deux derniers vecteurs sont colinéaires, d'où contradiction. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } g \text{ n'est pas cyclique.}}$$

(4) Vérifions que (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de g. Par des calculs matriciels élémentaires, on trouve que :

$$G\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix},$$

et donc $g(V_1) = (2, -2, -4)) = 2V_1$. Comme de plus $V_1 \neq (0, 0, 0)$, on voit que V_1 est vecteur propre de g pour la valeur propre 2. De même, on obtient que :

$$G\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

et donc $g(V_2) = (0, 0, 0) = 0 \times V_2$. Comme de plus $V_2 \neq (0, 0, 0)$, on voit que V_2 est vecteur propre de g pour la valeur propre 0. En outre, on trouve que :

$$G\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix},$$

et donc $g(V_3) = (2, -2, 2) = 2V_3$. Comme de plus $V_3 \neq (0, 0, 0)$, on voit que V_1 est vecteur propre de g pour la valeur propre 2. Par conséquent, comme (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ d'après les questions précédentes, on en déduit que :

$$\boxed{(V_1, V_2, V_3) \text{ est une base de vecteurs propres de } g.}$$

Partie II : Etude de deux cas particuliers.

Section A : Endomorphismes diagonalisables qui sont cycliques.

Dans cette section, on considère un endomorphisme u de E et on suppose que u diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ une liste des valeurs propres distinctes de u.

(1) Etablissons que l'endomorphisme $v = (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}_E)$ est l'endomorphisme nul. Pour ce faire, considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de u (laquelle existe car u est diagonalisable). Soit e_i un vecteur de cette base et soit λ_{k_i} la valeur propre associée. Comme $u(e_i) = \lambda_{k_i} e_i$ et que les endomorphismes sont linéaires, on trouve que :

$$\begin{aligned}
v(e_i) &= (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}_E)(e_i)\\
&= (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_{k_i - 1} \mathrm{Id}_E) \circ (u - \lambda_{k_i + 1} \mathrm{Id}_E) ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}_E) \circ (u - \lambda_{k_i} \mathrm{Id}_E)(e_i)\\
&= (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_{k_i - 1} \mathrm{Id}_E) \circ (u - \lambda_{k_i + 1} \mathrm{Id}_E) ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}_E)(u(e_i) - \lambda_{k_i} e_i)\\
&= (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_{k_i - 1} \mathrm{Id}_E) \circ (u - \lambda_{k_i + 1} \mathrm{Id}_E) ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}_E)(0) \quad = \quad 0.
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'endomorphisme v est nul sur la base $\mathcal{B}$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ ... \circ (u - \lambda_p \mathrm{Id}_E) \text{ est l'endomorphisme nul.}}$$

(2) Montrons que la famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^p)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$. Pour ce faire, on considère le polynôme $P : x \longmapsto (x - \lambda_1)...(x - \lambda_p)$. Par définition, on voit que P est un polynôme de degré p et unitaire, c'est-à-dire dont le coefficient dominant est égal à 1. En d'autres termes, on peut écrire P sous la forme :

$$P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_{p-1} x^{p-1} + x^p,$$

où $a_0, a_1, ..., a_{p-1}$ sont des réels. De plus, on sait d'après la question précédente que P est annulateur de u, et donc :

$$P(u) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + ... + a_{p-1} u^{p-1} + u^p = 0.$$

Comme le coefficient devant u^p est non nul car égal à 1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la famille } (\mathrm{Id}_E, u, ..., u^p) \text{ est liée.}}$$

(3) Déterminons la valeur de p si u est cyclique. D'après la question (7) de la partie I, section A, il existe un vecteur e de E tel que $d(e) = n$. En particulier, la famille $\mathcal{B}(e,n) = (e, u(e), ..., u^{n-1}(e))$ est libre. Or, on sait d'après la question précédente qu'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_{p-1}$ tels que :

$$a_0\mathrm{Id}_E + a_1 u + ... + a_{p-1}u^{p-1} + u^p = 0.$$

En évaluant cette égalité sur le vecteur e, on trouve que :

$$a_0 e + a_1 u(e) + ... + a_{p-1}u^{p-1}(e) + u^p(e) = 0.$$

Comme le coefficient devant $u^p(e)$ est non nul car égal à 1, il s'ensuit que la famille $\mathcal{B}(e, p+1) = (e, u(e), ..., u^p(e))$ n'est pas libre. Si p était $< n$, alors la famille $\mathcal{B}(e, p+1)$ serait une sous-famille de la famille libre $\mathcal{B}(e,n)$. En particulier, elle serait libre, ce qui est impossible d'après ce qui précède, et donc $p \geq n$. Par ailleurs, comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n, il admet au plus n valeurs propres distinctes, et donc $p \leq n$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } u \text{ est cyclique, alors } p = n.}$$

On suppose jusqu'à la fin de cette section que $p = n$, et on note $(e_1, ..., e_n)$ une base de vecteurs propres de u telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

(4) Soit $e = \sum_{i=1}^n e_i$. Montrons tout d'abord que la famille $\mathcal{B}(e,n)$ est libre. Pour ce faire, considérons des réels $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}$ tels que :

$$\alpha_0 e + \alpha_1 u(e) + ... + \alpha_{n-1}u^{n-1}(e) = 0. \quad (*)$$

Comme $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on voit que $u^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En particulier, ceci nous donne par linéarité de u que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u^k(e) = u^k\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) = \sum_{i=1}^n u^k(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k e_i.$$

Dès lors, la relation $(*)$ entraine que :

$$\alpha_0 \sum_{i=1}^n e_i + \alpha_1 \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i + ... + \alpha_{n-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{n-1} e_i = 0,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n \left(\alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + ... + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1}\right) e_i = 0. \quad (**)$$

Comme $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, elle est libre et ceci entraine que $\alpha_0 + \alpha_1\lambda_i + ... + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En particulier, le polynôme $P : x \longmapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + ... + \alpha_{n-1}x^{n-1}$ admet $\lambda_1, ..., \lambda_n$ pour racines. Comme P admet n racines distinctes et qu'il est de degré $\leq n-1$, il s'ensuit que P est le polynôme nul, et donc $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la famille } \mathcal{B}(e,n) = \left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right) \text{ est libre.}}$$

Comme la famille $\mathcal{B}(e,n)$ est libre, qu'elle compte n éléments et que $\dim(E) = n$, ceci nous donne que $\mathcal{B}(e,n)$ est une base de E. En particulier, la famille $\mathcal{B}(e,n)$ est génératrice de E, ce qui entraine que $E = E_u(e)$. Par conséquent, on en déduit aussi que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } u \text{ est cyclique.}}$$

(5) On reprend dans cette question seulement l'exemple de la section C de la partie I et, pour tout réel α, on pose $u_\alpha = g + \alpha f$. Montrons tout d'abord que u_α est diagonalisable. D'après la questions (2) et (5) de la partie I, section (C), on sait que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de f pour les valeurs propres respectives $-2, 0, 1$, et qu'elle est aussi une base de vecteurs propres de g pour les valeurs propres respectives $2, 0, 2$. Dès lors, ceci nous donne que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$u_\alpha(V_1) = g(V_1) + \alpha f(V_1) = 2V_1 - 2\alpha V_1 = (2 - 2\alpha)V_1.$$

De la même façon, on trouve que :

$$u_\alpha(V_2) = 0.V_2 \quad \text{et} \quad u_\alpha(V_3) = (2+\alpha)V_3.$$

En particulier, la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres de u_α pour les valeurs propres respectives $2 - 2\alpha, 0, 2 + \alpha$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } u_\alpha \text{ est diagonalisable.}}$$

A présent, discutons, en fonction des valeurs de α, les cas où u_α est cyclique. D'après les deux questions précédentes, on sait qu'un endomorphisme diagonalisable est cyclique si et seulement s'il admet n valeurs propres distinctes. En particulier, l'endomorphisme u_α est cyclique si et seulement si ses valeurs propres $2-2\alpha, 0, 2+\alpha$ sont distinctes. Après calculs, on voit que $2-2\alpha=0$ si et seulement si $\alpha=1$, que $2-2\alpha=2+\alpha$ si et seulement si $\alpha=0$ et que $2+\alpha=0$ si et seulement si $\alpha=-2$. En d'autres termes, les valeurs propres $2-2\alpha, 0, 1+2\alpha$ sont distinctes si et seulement si $\alpha \neq 1, 0, -2$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } u_\alpha \text{ est cyclique si et seulement si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}.}$$

Section B : Endomorphismes nilpotents qui sont cycliques.

Dans cette section, u est un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence r.

(1) Soit $e \in E$ tel que $u^{r-1}(e) \neq 0$. Montrons que la famille $\left(e, u(e), ..., u^{r-1}(e)\right)$ est libre dans E. Pour ce faire, considérons des réels $\alpha_0, ..., \alpha_{r-1}$ tels que :

$$\alpha_0 e + \alpha_1 u(e) + ... + \alpha_{r-1} u^{r-1}(e) = 0.$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que les α_i ne sont pas tous nuls. Soit s le plus petit indice de $[\![0, r-1]\!]$ tel que $\alpha_s \neq 0$. Alors, on voit par définition de s que :

$$\alpha_s u^s(e) + \alpha_{s+1} u^{s+1}(e) + ... + \alpha_{r-1} u^{r-1}(e) = 0.$$

En composant cette relation par u^{r-1-s}, on obtient que :

$$u^{r-1-s}\left(\alpha_s u^s(e) + \alpha_{s+1} u^{s+1}(e) + ... + \alpha_{r-1} u^{r-1}(e)\right) = u^{r-1-s}(0) = 0,$$

ce qui entraine par linéarité de u que :

$$\alpha_s u^{r-1}(e) + \alpha_{s+1} u^r(e) + ... + \alpha_{r-1} u^{2r-2-s}(e) = 0.$$

Comme u est nilpotent d'indice de nilpotence r, on voit que $u^k = u^{k-r} \circ u^r = u^{k-r} \circ 0 = 0$ pour tout $k \geq r$. En particulier, l'équation ci-dessus nous donne que :

$$\alpha_s u^{r-1}(e) = 0.$$

Comme $u^{r-1}(e) \neq 0$, il s'ensuit que $\alpha_s = 0$, ce qui est impossible car $\alpha_s \neq 0$ par construction. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la famille } \left(e, u(e), ..., u^{r-1}(e)\right) \text{ est libre.}}$$

(2) Montrons tout d'abord que $r \leq n$. Comme $\left(e, u(e), ..., u^{r-1}(e)\right)$ est une famille libre d'un espace vectoriel de dimension n, elle compte au plus n éléments. Mais comme cette famille en a r, on en déduit que :

$$\boxed{r \leq n.}$$

A présent, montrons que $r = n$ si et seulement si u est cyclique. Supposons tout d'abord que $r = n$. Alors on voit d'après ce qui précède qu'il existe un vecteur e de E tel que la famille $\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$ soit libre. Comme il s'agit d'une famille libre à n éléments d'un espace vectoriel de dimension n, la famille $\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$ est une base de E. En particulier, elle est génératrice de E, ce qui signifie que $E = E_u(e)$, et donc u est cyclique.

Réciproquement, supposons que u soit cyclique. Alors il existe un vecteur e de E tel que $E = E_u(e)$. En particulier, la famille $\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$ est génératrice de E. Comme cette famille compte n éléments et que $\dim(E) = n$, c'est une base de E, et donc la famille $\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$ est libre. Dès lors, elle ne peut pas contenir le vecteur nul, ce qui entraine que $u^{n-1}(e) \neq 0$, et donc $u^{n-1} \neq 0$. En particulier, comme $u^r = 0$ par définition de l'indice de nilpotence, on voit que $r > n-1$, et donc $r \geq n$. Mais comme $r \leq n$, il s'ensuit que $r = n$.

Par double implication, on en déduit que :

$$\boxed{u \text{ est cyclique si et seulement si } r = n.}$$

Dans le cas $r = n$, écrivons la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$. Comme $r = n$, on voit que $u^n = 0$, ce qui entraine que $u^n(e) = 0$, et donc :

$$\begin{cases} u(e) & & = & 0 \times e + 1 \times u(e) + ... + 0 \times u^{n-1}(e) \\ u(u(e)) & = \; u^2(e) & = & 0 \times e + 0 \times u(e) + 1 \times u^2(e) + ... + 0 \times u^{n-1}(e) \\ \vdots & & & \\ u^n(e) & = \; u(u^{n-1}(e)) & = & 0 \times e + 0 \times u(e) + ... + 0 \times u^{n-1}(e) \end{cases}.$$

En particulier, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e,n)$ de E est donnée par :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Section C : Un second exemple.

Dans cette section, E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré $\leq n-1$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note X^k la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^k$ et on rappelle que $(X^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est une base de E.

(1) Soit $P \in E$. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$ converge et que la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$ appartient à E. Pour ce faire, fixons un réel x. Comme $\deg(P) \leq n-1$, la formule de Taylor pour les polynômes nous donne que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$P(x+t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!}(x+t-x)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k. \quad (*)$$

Comme l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$ comme valeur de la fonction Gamma d'Euler, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k e^{-t}dt$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes. Par conséquent, on en déduit avec $(*)$ que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $P \in E$:

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt \text{ converge.}}$$

De plus, comme $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = \Gamma(k+1) = k!$, on a par linéarité de l'intégrale que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k e^{-t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k)}(x)}{k!} k! \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Comme la dérivée k-ème d'un polynôme de degré $\leq n-1$ est un polynôme de degré $\leq n-1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il s'ensuit d'après le calcul ci-dessus que $\sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$ est un polynôme de degré $\leq n-1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $P \in E$:

$$\boxed{\text{la fonction } x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt \text{ appartient à } E.}$$

On note $u : P \in E \longmapsto u(P)$ défini par : $\forall x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt.$

(2) Vérifions que u est un endomorphisme de E. D'après la question précédente, on sait que $u(P)$ appartient à E pour tout $P \in E$, et donc u est une application de E dans E. Reste à montrer que u est linéaire. Pour ce faire, considérons deux éléments P, Q de E et deux réels λ, μ. Par linéarité de l'intégrale, on

trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q)(x) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P + \mu Q)(x+t)e^{-t}dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt + \mu \int_0^{+\infty} Q(x+t)e^{-t}dt \\ &= \lambda u(P)(x) + \mu u(Q)(x). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que $u(\lambda P + \mu Q) = \lambda u(P) + \mu u(Q)$, et donc u est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'application } u \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

(3) Soit $P \in E$. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(P)(x) = P(x) + u(P')(x)$. Pour ce faire, fixons un réel x. Les fonctions $a : t \longmapsto P(x+t)$ et $b : t \longmapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et de plus on a $a'(t) = P'(x+t)$ et $b'(t) = e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Dès lors, on trouve par intégration par parties que, pour tout $c \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^c P(x+t)e^{-t}dt &= \int_0^c a(t)b'(t)dt \\ &= [a(t)b(t)]_0^c - \int_0^c a'(t)b(t)dt \\ &= \left[-P(x+t)e^{-t}\right]_0^c - \int_0^c -P'(x+t)e^{-t}dt \\ &= -P(x+c)e^{-c} + P(x) + \int_0^c P'(x+t)e^{-t}dt. \quad (*) \end{aligned}$$

Comme la fonction $c \longmapsto P(x+c)$ est un polynôme, elle est équivalente à son terme de plus haut degré. En particulier, il existe un entier p et un réel $\alpha \neq 0$ tel que $P(x+c) \underset{c \to +\infty}{\sim} \alpha c^k$, ce qui entraine que $P(x+c)e^{-c} \underset{c \to +\infty}{\sim} \alpha c^k e^{-c}$, et donc $P(x+c)e^{-c}$ tend vers 0 quand c tend vers $+\infty$ par croissances comparées. Par passage à la limite quand c tend vers $+\infty$ dans la relation $(*)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt = P(x) + \int_0^{+\infty} P'(x+t)e^{-t}dt,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$u(P)(x) = P(x) + u(P')(x).$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout $P \in E$:

$$\boxed{u(P) = P + u(P').}$$

(4) Montrons que, pour tout $P \in E$, on a : $u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}$. D'après la question précédente, on sait que $u(P) = P + u(P')$ pour tout $P \in E$. En particulier, comme la dérivée k-ème d'un polynôme de degré $\leq n-1$ est encore un polynôme de degré $\leq n-1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on voit que $u(P^{(k)}) = P^{(k)} + u(P^{(k+1)})$ pour tout $P \in E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, on trouve par télescopage que, pour tout $P \in E$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left[u(P^{(k)}) - u(P^{(k+1)})\right] = u(P^{(0)}) - u(P^{(n)}) = u(P) - u(P^{(n)}).$$

Comme P est un polynôme de degré $\leq n-1$, on voit que $P^{(n)}$ est le polynôme nul, et donc $u(P^{(n)}) = 0$ car u est linéaire. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $P \in E$:

$$\boxed{u(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)}.}$$

(5) Soit $P \in E$. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds.$$

Pour ce faire, on pose $s = x + t$. Alors v est une fonction affine de t, et donc le changement de variable est licite. De plus, on a $dx = ds$, $s = x$ si $t = 0$ et s tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Dès lors, on obtient par changement de variable que :

$$u(P)(x) = \int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt = \int_x^{+\infty} P(s)e^{-(s-x)}du = \int_x^{+\infty} e^x P(s)e^{-s}ds.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{u(P)(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds.}$$

(6) Montrons tout d'abord que, pour tout $P \in E$, la fonction $f : x \longmapsto \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour ce faire, on peut remarquer que, d'après la relation de Chasles, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds = \int_0^{+\infty} P(s)e^{-s}ds + \int_x^{0} P(s)e^{-s}ds.$$

En particulier, si l'on pose $K = \int_0^{+\infty} P(s)e^{-s}ds$, alors on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = K - \int_0^{x} P(s)e^{-s}ds.$$

A noter que le terme de droite dans l'égalité ci-dessus est une primitive de la fonction $s \longmapsto P(s)e^{-s}$. Comme cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, la primitive en question est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme différence d'une constante et d'une fonction $\mathcal{C}^1$. En particulier, on en déduit a fortiori que :

$$\boxed{\text{la fonction } f : x \longmapsto \int_x^{+\infty} P(s)e^{-s}ds \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

Montrons à présent que $u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(u(P))' = u(P) - P$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait d'après la question précédente que $u(P)(x) = f(x)e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, la fonction $u(P)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et de plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(u(P)\right)'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x = -P(x)e^{-x}e^x + f(x)e^x = -P(x) + f(x)e^x = -P(x) + u(P)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } u(P) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } \left(u(P)\right)' = u(P) - P.}$$

Montrons enfin que $(u(P))' = u(P')$. D'après ce qui précède et la question (3) de cette section, on a pour tout $P \in E$:

$$\left(u(P)\right)' = u(P) - P = P + u(P') - P = u(P').$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\left(u(P)\right)' = u(P').}$$

(7) Déterminons tout d'abord la matrice de u dans la base $(X^k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ de E. D'après la question (4) de cette section, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$u(X^k) = \sum_{i=0}^{n-1} (X^k)^{(i)} = X^k + kX^{k-1} + \sum_{i=2}^{n-1} k(k-1)...(k-i+1)X^{k-i},$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante (en posant $j = k - i$) :

$$u(X^k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} X^j.$$

Par conséquent, on en déduit que la matrice M de u dans la base $(X^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ de E est donnée par :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)!/0! \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & \cdots & (n-1)!/1! \\ 0 & 0 & 1 & & & & (n-1)!/2! \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & 1 & (n-1)!/(n-2)! \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Comme M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux, et donc $\mathrm{Sp}(M)=\{1\}$. Mais comme M est la matrice de u dans une base de E, on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(u)=\{1\}.}$$

(8) On pose $v=u-\mathrm{Id}_E$. Montrons que $\mathfrak{Im}(v)$ est le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales de degré $\leq n-2$. D'après la question précédente, on voit que, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$:

$$v(X^k)=u(X^k)-X^k=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k!}{j!}X^j.$$

En particulier, $v(X^k)$ est un polynôme de degré $k-1$, et donc de degré $\leq n-2$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. Par ailleurs, comme $(X^k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est une base de E, on trouve que :

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}(v) &= \mathrm{Vect}\left(v(X^0),v(X^1),...,v(X^{n-1})\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(0,v(X^1),...,v(X^{n-1})\right)\\ &= \mathrm{Vect}\left(v(X^1),...,v(X^{n-1})\right).\end{aligned}$$

En particulier, comme $v(X^k)$ est un polynôme de degré $\leq n-2$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, on voit que $\mathfrak{Im}(v)\subset\mathbb{R}_{n-2}[x]$. En outre, comme $v(X^k)$ est un polynôme de degré $k-1$ pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, la famille $(v(X^k))_{k\in[\![1,n-1]\!]}$ est échelonnée en degrés, et donc elle est libre. Dès lors, il s'ensuit que :

$$\dim(\mathfrak{Im}(v))=n-1=\dim(\mathbb{R}_{n-2}[x]).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\mathfrak{Im}(v)=\mathbb{R}_{n-2}[x].}$$

(9) Montrons tout d'abord que v est nilpotent. Pour ce faire, on va commencer par démontrer que, pour tout $P\in E$ de degré >0, on a :

$$\deg(v(P))=\deg(P)-1.\quad(*)$$

Pour ce faire, considérons un polynôme $P=a_0X^0+a_1X^1+...+a_rX^r$ de degré $r>0$, avec $a_r\neq 0$. D'après la question précédente, on trouve par linéarité de v que :

$$v(P)=v\left(\sum_{k=0}^{r}a_kX^k\right)=\sum_{k=0}^{r}a_kv(X^k)=\sum_{k=0}^{r}a_k\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k!}{j!}X^j.$$

Par interversion des sommes, ceci nous donne que :

$$v(P)=\sum_{j=0}^{r-1}\left(\sum_{k=j+1}^{r}a_k\frac{k!}{j!}\right)X^j=ra_rX^{r-1}+\sum_{j=0}^{r-2}\left(\sum_{k=j+1}^{r}a_k\frac{k!}{j!}\right)X^j.$$

Comme $r>0$ et que $a_r\neq 0$, il s'ensuit que $v(P)$ est de degré $r-1$, d'où le résultat.

A présent, montrons que v est nilpotent. Comme $v(P)=0$ si P est un polynôme constant, on voit avec la relation $(*)$ que, pour tout $P\in E$:

$$\deg(v(P))\leq\deg(P)-1.\quad(**)$$

Par une récurrence facile et à l'aide de $(**)$, on peut vérifier que $\deg(v^k(P))\leq\deg(P)-k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et pour tout $P\in E$. En particulier, on obtient que, pour tout $P\in E$:

$$\deg(v^n(P))\leq\deg(P)-n\leq n-1-n=-1.$$

Dès lors, $v^n(P)$ est un polynôme de degré strictement négatif, et donc $v^n(P) = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $P \in E$, il s'ensuit que $v^n = 0$, et donc v est nilpotent d'indice de nilpotence $\leq n$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } v \text{ est nilpotent.}}$$

De la même façon, on peut montrer par une récurrence facile et avec la relation $(*)$ que $\deg(v^k(X^{n-1})) = n-k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. En particulier, on trouve que :

$$\deg(v^{n-1}(X^{n-1})) = n-1-(n-1) = 0.$$

ce qui entraine que $v^{n-1}(X^{n-1})$ est un polynôme constant non nul. En d'autres termes, on voit que $v^{n-1}(X^{n-1}) \neq 0$, et donc v^{n-1} n'est pas l'endomorphisme nul. En particulier, l'indice de nilpotence de v est $\leq n$ et $> n-1$, et donc il est égal à n. Mais comme $\dim E = \dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n-1+1 = n$, on en déduit d'après la question (2) de la partie II, section (B) que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } v \text{ est cyclique.}}$$

Partie III : Décomposition de Frobenius et applications.

Dans cette partie, on se propose de démontrer, pour tout endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$, la propriété suivante notée $(\mathcal{R})$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe } p \in [\![1, n]\!] \text{ et des sous-espaces vectoriels non nuls } F_1, ..., F_p \text{ de } E, \text{ stables par } u, \text{ tels} \\ \text{que } E = F_1 \oplus ... \oplus F_p \text{ et pour tout } i \in [\![1, p]\!],\ u_{|F_i} \text{ est un endomorphisme cyclique de } F_i.\end{array}}$$

Section A : Cas d'une homothétie.

(1) Démontrons que la propriété $(\mathcal{R})$ est réalisée si u est une homothétie. En effet, si u est une homothétie, il existe un réel λ tel que $u = \lambda \mathrm{Id}_E$. Considérons alors une base quelconque $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E, et posons $p = n$ et $F_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par construction, (e_i) est une famille génératrice de F_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus, comme $\mathcal{B}$ est une base de E, le vecteur e_i est non nul. En particulier, (e_i) est une famille libre de F_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et donc (e_i) est une base de F_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Au passage, on voit que $\dim F_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Dès lors, comme la concaténation des bases (e_i) donne la base $\mathcal{B}$ de E, il s'ensuit que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

A noter que chaque F_i est stable par u. En effet, considérons un vecteur x de F_i. Comme $u = \lambda \mathrm{Id}_E$, on voit que $u(x) = \lambda x$ appartient à F_i. Dès lors, comme $u_{|F_i}$ est un endomorphisme sur l'espace vectoriel F_i qui est de dimension 1, on constate que $u_{|F_i}$ est cyclique pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{R}) \text{ est réalisée si } u \text{ est une homothétie.}}$$

Section B : Cas où u n'est pas une homothétie.

(1) Justifions qu'il existe un vecteur e non nul de E tel que $d(e) \neq 1$. D'après la question (6) de la partie I, section (A), on sait qu'un endomorphisme u de E est une homothétie si et seulement si $d(e) = 1$ pour tout vecteur non nul e de E. Mais comme u n'est pas une homothétie par hypothèse, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{il existe un vecteur } e \text{ non nul de } E \text{ tel que } d(e) \neq 1.}$$

Pour le reste de la section, on choisit un vecteur non nul e de E tel que $d = d(e)$ soit maximal (donc $d \geq 2$) et on note, pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, $e_k = u^k(e)$. On note toujours $\mathcal{B}(e, d) = (e_0, e_1, ..., e_{d-1})$ ainsi que des réels $a_0, a_1, ..., a_{d-1}$ tels que :

$$u^d(e) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i(e).$$

Enfin, on pose : $F_1 = E_u(e)$.

(2) Justifions que la propriété $(\mathcal{R})$ est réalisée si $d = n$. D'après la question (7) de la partie I, section (A), on sait qu'un endomorphisme u de E est cyclique si et seulement s'il existe un vecteur non nul e de E tel que $d(e) = n$. En particulier, comme $d = n$, l'endomorphisme u est cyclique. Il suffit dans ce cas de

poser $p=1$ et $F_1=E$ et la propriété $(\mathcal{R})$ est réalisée, puisque $F_1=E$ est clairement stable par u et que $u_{|F_1}=u$ est cyclique. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{R}) \text{ est réalisée si } d=n.}$$

Dans la suite de cette section, on suppose que $d \in [\![2, n-1]\!]$ (et donc $n \geq 3$). On complète la famille $\mathcal{B}(e,d)$ en une base $\mathcal{B}=(e_0, e_1, ..., e_{d-1}, e_d, ..., e_{n-1})$ de E.

(3) Montrons que l'application $\varphi : x=\sum_{i=0}^{n-1} x_k e_k \in E \longmapsto x_{d-1}$ est une forme linéaire non nulle de E. Par construction, on voit que φ est une application de E dans $\mathbb{R}$, et qu'elle n'est pas identiquement nulle car :

$$\varphi(e_{d-1})=\varphi(0\times e_0+...+0\times e_{d-2}+1\times e_{d-1}+0\times e_d+...+0\times e_{n-1})=1\neq 0.$$

Reste à montrer que φ est linéaire. Pour ce faire, considérons deux réels λ, μ et deux vecteurs $x, y \in E$, et soient $x_0, ..., x_{n-1}$ et $y_0, ..., y_{n-1}$ les coordonnées respectives de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}$. Par définition, on voit que :

$$x=\sum_{i=0}^{n-1} x_k e_k \quad \text{et} \quad y=\sum_{i=0}^{n-1} y_k e_k.$$

Dès lors, ceci nous donne par linéarité de la somme que :

$$\lambda x+\mu y=\lambda\sum_{i=0}^{n-1} x_k e_k+\mu\sum_{i=0}^{n-1} y_k e_k=\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda x_k+\mu y_k)e_k.$$

En particulier, on obtient que :

$$\varphi(\lambda x+\mu y)=\lambda x_{d-1}+\mu y_{d-1}=\lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y),$$

et donc φ est linéaire. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est une forme linéaire non nulle sur } E.}$$

On considère l'application $\Phi : x \in E \longmapsto \big(\varphi(u^{d-1}(x)), \varphi(u^{d-2}(x)), ..., \varphi(u(x)), \varphi(x)\big) \in \mathbb{R}^d$.

(4) Vérifions que Φ est linéaire. Pour ce faire, considérons deux réels λ, μ et deux vecteurs $x, y \in E$. Comme u est un endomorphisme, on voit d'après la question précédente que u et φ sont linéaires, et donc $\varphi \circ u^k$ est linéaire pour tout $k \in \mathbb{N}$ comme composée d'applications linéaires. Dès lors, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda x+\mu y) &= \big(\varphi(u^{d-1}(\lambda x+\mu y)), ..., \varphi(u(\lambda x+\mu y)), \varphi(\lambda x+\mu y)\big)\\
&= \big(\lambda\varphi(u^{d-1}(x))+\mu\varphi(u^{d-1}(y)), ..., \lambda\varphi(u(x))+\mu\varphi(u(y)), \lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y)\big)\\
&= \lambda\left(\varphi(u^{d-1}(x)), ..., \varphi(u(x)), \varphi(x)\right)+\mu\left(\varphi(u^{d-1}(y)), ..., \varphi(u(y)), \varphi(y)\right)\\
&= \lambda\Phi(x)+\mu\Phi(y).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est linéaire.}}$$

On note $G=\ker(\Phi)$ et $\widetilde{\Phi}$ la restriction de Φ à F_1.

(5) Calculons tout d'abord $\Phi(e_0)$. Par définition, on voit que :

$$\Phi(e_0)=\Phi(u^0(e))=\Phi(e)=\left(\varphi(u^{d-1}(e)), \varphi(u^{d-2}(e)), ..., \varphi(u(e)), \varphi(e)\right).$$

Dès lors, ceci nous donne par définition des e_k que :

$$\Phi(e_0)=\left(\varphi(e_{d-1}), \varphi(e_{d-2}), ..., \varphi(e_1), \varphi(e_0)\right).$$

Or, on voit par construction de φ que l'application φ est nulle sur tous les vecteurs e_k tels que $k \neq d-1$, et que $\varphi(e_{d-1})=1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi(e_0)=(1, 0, ..., 0, 0).}$$

Calculons ensuite $\Phi(e_1)=\Phi(u(e_0))$. Par définition, on voit que :

$$\Phi(e_1)=\Phi(u^1(e))=\Phi(u(e))=\left(\varphi(u^{d-1}(u(e))), \varphi(u^{d-2}(u(e))), ..., \varphi(u(u(e))), \varphi(u(e))\right).$$

En d'autres termes, on peut écrire que :

$$\Phi(e_1)=\left(\varphi(u^d(e)), \varphi(u^{d-1}(e)), ..., \varphi(u^2(e)), \varphi(u(e))\right).$$

Dès lors, ceci nous donne par définition des e_k que :

$$\Phi(e_1) = \left(\varphi(u^d(e)), \varphi(e_{d-1}), ..., \varphi(e_2), \varphi(e_1)\right).$$

Par hypothèse, on sait qu'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_{d-1}$ tels que :

$$u^d(e) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i(e).$$

En particulier, on trouve par linéarité de φ que :

$$\begin{aligned}
\Phi(e_1) &= \left(\varphi(u^d(e)), \varphi(e_{d-1}), ..., \varphi(e_2), \varphi(e_1)\right) \\
&= \left(\varphi\left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i u^i(e)\right), \varphi(e_{d-1}), ..., \varphi(e_2), \varphi(e_1)\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i \varphi\left(u^i(e)\right), \varphi(e_{d-1}), ..., \varphi(e_2), \varphi(e_1)\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i \varphi\left(e_i\right), \varphi(e_{d-1}), ..., \varphi(e_2), \varphi(e_1)\right)
\end{aligned}$$

Comme l'application φ est nulle sur tous les vecteurs e_k tels que $k \neq d-1$ et que $\varphi(e_{d-1}) = 1$ par construction, on obtient que :

$$\Phi(e_1) = (0 + ... + 0 + a_{d-1}, 1, 0, ..., 0).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi(e_1) = (a_{d-1}, 1, 0, ..., 0).}$$

Plus généralement, justifions que, pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, il existe des réels $\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, ..., \beta_{k-1,k}$ tels que $\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, ..., \beta_{k-1,k}, 1, 0, ..., 0)$. Pour ce faire, fixons un entier $k \in [\![1, d-1]\!]$. Par définition, on voit que :

$$\Phi(e_k) = \Phi(u^k(e)) = \left(\varphi(u^{d-1}(u^k(e))), \varphi(u^{d-2}(u^k(e))), ..., \varphi(u(u^k(e))), \varphi(u^k(e))\right).$$

En d'autres termes, on peut écrire que :

$$\Phi(e_k) = \left(\varphi(u^{d+k-1}(e)), \varphi(u^{d+k-2}(e)), ..., \varphi(u^{k+1}(e)), \varphi(u^k(e))\right).$$

Dès lors, ceci nous donne par définition des e_k que :

$$\begin{aligned}
\Phi(e_k) &= \left(\varphi(u^{d+k-1}(e)), \varphi(u^{d+k-2}(e)), ..., \varphi(u^{d-1}(e)), \varphi(u^{d-2}(e)), ..., \varphi(u^{k+1}(e)), \varphi(u^k(e))\right) \\
&= \left(\varphi(u^{d+k-1}(e)), \varphi(u^{d+k-2}(e)), ..., \varphi(e_{d-1}), \varphi(e_{d-2}), ..., \varphi(e_{k+1}), \varphi(e_k)\right).
\end{aligned}$$

Posons alors $\beta_{i,k} = \varphi(u^{d+k-1-i}(e))$ pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$. Comme l'application φ est nulle sur tous les vecteurs e_k tels que $k \neq d-1$ et que $\varphi(e_{d-1}) = 1$ par construction, on obtient que :

$$\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, ..., \beta_{k-1,k}, ..., 1, 0, ..., 0, 0).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $k \in [\![1, d-1]\!]$, il existe $\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, ..., \beta_{k-1,k} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{\Phi(e_k) = (\beta_{0,k}, \beta_{1,k}, ..., \beta_{k-1,k}, 1, 0, ..., 0).}$$

(6) Ecrivons tout d'abord la matrice de $\widetilde{\Phi}$ de la base $\mathcal{B}(e,d)$ de F_1 vers la base canonique de $\mathbb{R}^d$. D'après la question précédente, on sait que :

$$\left\{\begin{array}{lllll}
\Phi(e) & = & \Phi(e_0) & = & (1, 0, ..., 0) \\
\Phi(u(e)) & = & \Phi(e_1) & = & (\beta_{0,1}, 1, 0, ..., 0) \\
\vdots & & & & \\
\Phi(e_{d-1}) & = & \Phi(e_{d-1}) & = & (\beta_{0,d-1}, \beta_{1,d-1}, ..., \beta_{d-2,d-1}, 1, 0, ..., 0)
\end{array}\right. .$$

Par conséquent on en déduit que la matrice A de $\widetilde{\Phi}$ de la base $\mathcal{B}(e,d)$ de F_1 vers la base canonique de $\mathbb{R}^d$ est donnée par :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_{0,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{0,d-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \beta_{1,d-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & \ddots & \beta_{d-2,d-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

A présent, justifions que $\widetilde{\Phi}$ est bijectif. Comme la matrice A est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, la matrice A est inversible. Mais comme A est la matrice de $\widetilde{\Phi}$ de la base $\mathcal{B}(e,d)$ de F_1 vers la base canonique de $\mathbb{R}^d$, on en déduit que :

$$\boxed{\widetilde{\Phi} \text{ est bijectif.}}$$

(7) Montrons tout d'abord que $E = F_1 \oplus G$. Comme $\widetilde{\Phi}$ est un isomorphisme de F_1 vers $\mathbb{R}^d$ d'après la question précédente, l'application $\widetilde{\Phi}$ est surjective, $\mathfrak{Im}(\widetilde{\Phi}) = \mathbb{R}^d$ et $\dim(F_1) = \dim(\mathbb{R}^d) = d$. En particulier, comme $\widetilde{\Phi}$ est la restriction de l'application Φ, on voit que $\mathfrak{Im}(\widetilde{\Phi}) \subset \mathfrak{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}^d$, et donc $\mathfrak{Im}(\Phi) = \mathbb{R}^d$. Comme $G = \ker(\Phi)$, on obtient avec le théorème du rang que :

$$\dim(F_1) + \dim(G) = \dim\ker(\Phi) + \dim \mathfrak{Im}(\Phi) = \dim(E).$$

Reste à montrer que F_1 et G sont en somme directe. Pour ce faire, considérons un vecteur $x \in F_1 \cap G$. Alors x appartient à F_1 et à G. Comme $G = \ker(\Phi)$, on voit que $\Phi(x) = 0$. De plus, comme x appartient à F_1 et que $\widetilde{\Phi}$ est la restriction de Φ à F_1, ceci entraine que $\widetilde{\Phi}(x) = \Phi(x) = 0$. Mais comme $\widetilde{\Phi}$ est bijective d'après la question précédente, il s'ensuit que $x = 0$. Par conséquent, on en déduit que $F_1 \cap G = \{0\}$, et donc :

$$\boxed{E = F_1 \oplus G.}$$

A présent, justifions que G est stable par u. Pour ce faire, considérons un vecteur x de G. Si $x = 0$, alors $u(x) = 0$ par linéarité de u, et donc $u(x) \in G$. Dès lors, supposons que $x \neq 0$. Comme $G = \ker(\Phi)$, on voit que $\Phi(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\Phi(x) = \big(\varphi(u^{d-1}(x)), \varphi(u^{d-2}(x)), ..., \varphi(u(x)), \varphi(x)\big) = (0, ..., 0).$$

En particulier, ceci entraine que $\varphi(x) = \varphi(u(x)) = ... = \varphi(u^{d-2}(x)) = \varphi(u^{d-1}(x)) = 0$, et donc :

$$\varphi(u(x)) = ... = \varphi(u^{d-3}(u(x))) = \varphi(u^{d-2}(u(x))) = 0.$$

D'après la question (3) de la partie I, section (A), on sait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $u^k(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x, u(x), ..., u^{d(x)-1}(x)$. En particulier, le vecteur $u^d(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs $x, u(x), ..., u^{d(x)-1}(x)$. Par maximalité de $d = d(e)$, on sait aussi que $d(x) \leq d$, et donc $u^d(x)$ est aussi combinaison linéaire des vecteurs $x, u(x), ..., u^{d-1}(x)$, et ce car $\big(x, u(x), ..., u^{d(x)-1}(x)\big)$ est une sous-famille de $\big(x, u(x), ..., u^{d-1}(x)\big)$. En d'autres termes, il existe des réels $c_0, ..., c_{d-1}$ tels que :

$$u^d(x) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i u^i(x).$$

Par linéarité de l'application φ et sachant que $\varphi(x) = \varphi(u(x)) = ... = \varphi(u^{d-2}(x)) = \varphi(u^{d-1}(x)) = 0$, on trouve alors que :

$$\varphi\left(u^d(x)\right) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{d-1} c_i u^i(x)\right) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i \varphi\left(u^i(x)\right) = \sum_{i=0}^{d-1} c_i 0 = 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que $\varphi(x) = \varphi(u(x)) = ... = \varphi(u^{d-2}(x)) = \varphi(u^{d-1}(x)) = \varphi(u^d(x)) = 0$, et donc :

$$\Phi(u(x)) = \big(\varphi(u^d(x)), \varphi(u^{d-1}(x)), ..., \varphi(u^2(x)), \varphi(u(x))\big) = (0, ..., 0).$$

En particulier, on voit que $u(x)$ appartient à $G = \ker(\Phi)$. Mais comme ceci est vrai pour tout $x \in G$, on en déduit que :

$$\boxed{G \text{ est stable par } u.}$$

(8) Expliquons pourquoi $u_{|F_1}$ est un endomorphisme cyclique de F_1. Comme $u_{|F_1}$ est la restriction de u à F_1, on voit que $(u_{|F_1})^k(e) = u^k(e)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, comme $F_1 = E_u(e)$, on voit que :

$$F_1 = \text{Vect}\left(e, u(e), ..., u^{d-1}(e)\right) = \text{Vect}\left(e, (u_{|F_1})(e), ..., (u_{|F_1})^{d-1}(e)\right).$$

Comme $d = \text{card}(\mathcal{B}(e,d)) = \dim(F_1)$, il s'ensuit que $F_1 = E_{(u_{|F_1})}(e)$, et donc :

$$\boxed{u_{|F_1} \text{ est un endomorphisme cyclique de } F_1.}$$

(9) Justifions que, pour tout vecteur non nul e' de G, on a $d(e') \leq d$. Par construction, on a choisi au départ un vecteur e non nul de E tel que $d(e)$ soit maximal, et on a posé $d = d(e)$. Dès lors, on voit que $d(e) \leq d$ pour tout $e \in E$. Mais comme G est le noyau de l'application $\Phi : E \longmapsto \mathbb{R}^d$, on voit que G est un sous-espace vectoriel de E, et donc $d(e') \leq d$ pour tout $e' \in G$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout } e' \in G, \text{ on a : } d(e') \leq d.}$$

(10) Démontrons que la propriété $(\mathcal{R})$ est bien réalisée pour tout espace vectoriel E de dimension finie, et ce par une récurrence forte sur la dimension n de E. Pour $n = 1$, la propriété $(\mathcal{R})$ est clairement vérifiée pour tout espace vectoriel de dimension 1, car u est alors un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension 1, et donc il est cyclique par définition.

A présent, supposons que la propriété $(\mathcal{R})$ soit bien réalisée pour tout espace vectoriel de dimension $k \leq n$, et montrons qu'elle est vraie pour tout espace vectoriel de dimension $n+1$. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension $n+1$. Si u est une homothétie, alors $(\mathcal{R})$ est bien vérifiée d'après la question (1) de la partie III, section (B). Si maintenant u n'est pas une homothétie, on choisit un vecteur non nul e de E tel que $d(e)$ soit maximal. Si $d(e) = n+1$, alors on sait d'après la question (2) de la partie III, section (B) que la propriété $(\mathcal{R})$ est bien réalisée pour E. Si $1 < d(e) < n+1$, on sait d'après les questions de la partie III, section (B) qu'il existe un sous-espace vectoriel strict G de E, stable par u, tel que $E = F_1 \oplus G$ et tel que $u_{|F_1}$ soit cyclique. Comme $\dim(G) < n+1$, il existe par hypothèse de récurrence un entier $p \in [\![1, \dim(G)]\!]$ et des sous-espaces vectoriels $F_2, ..., F_{p+1}$ de G, stables par $u_{|G}$ et tels que $G = F_2 \oplus ... \oplus F_p$ et tels que, pour tout $i \in [\![2, p+1]\!]$, $u_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i. Dès lors, comme $E = F_1 \oplus G$, ceci entraine que :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_{p+1}.$$

A noter que, comme $1 \leq p \leq \dim(G) < n+1$, on a $1 \leq p+1 \leq n+1$. De plus, comme $F_2, ..., F_{p+1}$ sont stables par $u_{|G}$, ces sous-espaces vectoriels sont stables par u car $u_{|G}$ est la restriction de u à G. A noter aussi que, comme $F_1 = E_u(e)$, F_1 est aussi stable par u d'après la question (4) de la partie I, section (A). De plus, on sait d'après la question (8) de la partie III, section (B) que l'endomorphisme $u_{|F_1}$ est cyclique. Comme $u_{|F_i}$ est cyclique pour tout $i \in [\![2, p+1]\!]$, il s'ensuit que tous les $u_{|F_i}$ sont cycliques, et donc la propriété $(\mathcal{R})$ est bien réalisée pour E, ce qui achève la récurrence.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la propriété } (\mathcal{R}) \text{ est vraie pour tout espace vectoriel de dimension finie.}}$$

Section C : Première application (décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents).

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et $F_1, ..., F_p$ des sous-espaces vectoriels de E non nuls et stables par u tels que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $\mathcal{B}_{F_k}$ une base de F_k. Soit $\mathcal{B}$ la concaténation des bases $\mathcal{B}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_2}, ..., \mathcal{B}_{F_p}$. On rappelle que $\mathcal{B}$ est une base de E. Déterminons la forme de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Pour ce faire, fixons un entier $k \in [\![1, p]\!]$. Comme le sous-espace vectoriel F_k est stable par u, l'image de tout vecteur de $\mathcal{B}_{F_k}$ par u est un vecteur de F_k, et donc il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_{F_k}$ car $\mathcal{B}_{F_k}$ est une base de F_k. En particulier, si A_k est la matrice de $u_{|F_k}$ dans la base $\mathcal{B}_{F_k}$, alors la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ aura la forme suivante :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_k & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & A_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}}.$$

On parle alors de matrice diagonale par blocs.

(2) Soit u un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence p. Montrons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de u est triangulaire supérieure et telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $t_{i,i-1} \in \{0,1\}$ et tous les autres coefficients de T sont nuls. D'après la propriété $(\mathcal{R})$, il existe un entier $p \in [\![1,n]\!]$ et des sous-espaces vectoriels non nuls $F_1, ..., F_p$ de E, stables par u, tels que $E = F_1 \oplus ... \oplus F_p$ et pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $u_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on pose $n_i = \dim(F_i)$. Comme l'endomorphisme u est nilpotent d'indice de nilpotence p, on sait que $u^p = 0$, ce qui entraine par restriction que $(u_{|F_i})^p = 0$, et donc $u_{|F_i}$ est nilpotent pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Dès lors, comme $u_{|F_i}$ est cyclique et nilpotent, on voit d'après la question (2) de la partie II, section (B) qu'il existe une base $\mathcal{B}_{F_i}$ de F_i telle que la matrice T_i de $u_{|F_i}$ dans la base $\mathcal{B}_{F_i}$ soit de la forme :

$$T_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{B}$ est la concaténation des bases $\mathcal{B}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_2}, ..., \mathcal{B}_{F_p}$, alors la matrice T de u dans la base $\mathcal{B}$ sera diagonale par blocs comme dans la question précédente, et se présentera comme suit :

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T_k & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & T_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & T_p \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, la matrice T sera de la forme :

$$T_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & (0) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec tous ses coefficients nuls, hormis ceux situés juste sous la diagonale principale qui seront égaux à 0 ou à 1. Par conséquent, on en déduit qu'il existe bien une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle :

la matrice $T = (t_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de u est triangulaire supérieure et telle que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $t_{i,i-1} \in \{0,1\}$ et tous les autres coefficients de T sont nuls.

Section D : Deuxième application (toute matrice carrée est semblable à sa transposée).

Dans cette section, on pose $E = \mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M. On se propose de montrer que M vérifie la propriété suivante, notée $(\mathcal{S})$:

il existe deux matrices symétriques $V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec W inversible, telles que $M = VW$.

(1) *Cas où u est cyclique :* il existe donc $e \in E$ tel que $E = E_u(e)$. On note toujours $\mathcal{B}(e,n)$ la base $\left(e, u(e), ..., u^{n-1}(e)\right)$ de E et $A = \mathfrak{mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u)$. Il s'agit de la matrice de Frobenius associée aux réels $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On considère :

$$S = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \cdots & \iddots & -a_{n-1} & 1 & 0 \\ -a_3 & \cdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & 0 \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} & \iddots & \iddots & (0) & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de E tel que S est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}(e,n)$. On a donc :

$$f(e) = -\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e) \quad , \quad f\left(u(e)\right) = -\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e)\right) + u^{n-2}(e)$$

et plus généralement :

$$\forall j \in [\![0, n-2]\!], \quad f\left(u(e)\right) = -\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e)\right) + u^{n-j-1}(e)$$

et enfin $f\left(u^{n-1}(e)\right) = e$.
Calculons tout d'abord $u(f(e))$. D'après la forme de la matrice A, on sait que :

$$u^n(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e).$$

Par linéarité de u, ceci nous donne que :

$$\begin{aligned} u(f(e)) &= u\left(-\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^{k-1}(e)\right) + u^{n-1}(e)\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u \circ u^{k-1}(e) + u \circ u^{n-1}(e) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) + u^n(e) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1} a_k u^k(e) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(e) \\ &= a_0 u^0(e). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{u(f(e)) = a_0 e.}$$

A présent, calculons $u(f(u(e)))$. Comme précédemment, on trouve que :

$$\begin{aligned} u(f(u(e))) &= u\left(-\left(\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-2}(e)\right) + u^{n-1}(e)\right) \\ &= -\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u \circ u^{n-1}(e) \\ &= -\sum_{k=2}^{n-1} a_k u^{k-1}(e) + u^n(e). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit après un décalage d'indice $i = k-1$ que :

$$\boxed{u(f(u(e))) = -\sum_{i=1}^{n-2} a_{i-1} u^i(e) + u^n(e).}$$

Plus généralement, calculons $u(f(u^j(e)))$ pour tout $j \in [\![0, n-2]\!]$. Comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} u(f(u^j(e))) &= u\left(-\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j-1}(e)\right) + u^{n-j-1}(e)\right) \\ &= -\sum_{k=j+1}^{n-1} a_k u^{k-j}(e) + u^{n-j}(e). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit après le décalage d'indice $i = k-j$ que :

$$\boxed{u(f(u^j(e))) = -\sum_{i=1}^{n-j-1} a_{i+j} u^i(e) + u^{n-j}(e).}$$

Enfin, calculons $u(f(u^{n-1}(e)))$. Comme $f\left(u^{n-1}(e)\right) = e$, on en déduit que :

$$\boxed{u(f(u^{n-1}(e))) = u(e).}$$

(2) D'après la question précédente, la matrice de $u \circ f$ dans la base $\mathcal{B}(e,n)$ est donnée par :

$$\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}(e,n)}(u \circ f) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & (0) & \vdots \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais comme A et S sont les matrices respectives de u et f dans la base $\mathcal{B}(e,n)$, on en déduit que :

$$\boxed{AS = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_4 & \iddots & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & -a_{n-2} & \iddots & \iddots & \iddots & (0) & \vdots \\ 0 & -a_{n-1} & 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Par la suite, on pose $S_1 = AS$.

(3) Justifions que S est inversible. Comme les vecteurs colonnes de S forment une famille échelonnée avec des coefficients non nuls sur la diagonale opposée, le rang de cette famille est égal à n, et donc $\mathrm{rg}(S) = n$. Mais comme une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } S \text{ est inversible.}}$$

On note alors $S_2 = S^{-1}$ et on a donc $A = S_1 S_2$, où S_1 et S_2 sont deux matrices symétriques.

(4) On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_n$ vers la base $\mathcal{B}(e, n)$. Vérifions tout d'abord que :

$$M = PS_1({}^tP)({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}.$$

Par des calculs simples, on voit que :

$$PS_1({}^tP)({}^tP)^{-1}S_2P^{-1} = PS_1I_nS_2P^{-1} = PS_1S_2P^{-1} = PAP^{-1}.$$

Comme P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_n$ vers la base $\mathcal{B}(e, n)$ et que A est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}(e, n)$, on obtient d'après la formule de changement de bases que PAP^{-1} est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_n$, c'est-à-dire la matrice M (car u est l'endomorphisme canoniquement associé à M). Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{M = PS_1({}^tP)({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}.}$$

A présent, montrons que M vérifie la propriété $(\mathcal{S})$. Pour ce faire, on pose :

$$V = PS_1({}^tP) \quad \text{et} \quad W = ({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}.$$

D'après les calculs précédents, on voit que $M = VW$. De plus, comme S_1 est symétrique, on trouve avec les propriétés de la transposition que :

$${}^tV = {}^t\big(PS_1({}^tP)\big) = {}^{tt}P{}^tS_1{}^tP = PS_1{}^tP = V,$$

et donc la matrice V est symétrique. De la même façon, on peut vérifier aussi que W est symétrique. Enfin, comme $W = ({}^tP)^{-1}S_2P^{-1}$, que S_2 est inversible et qu'un produit de matrices inversibles est inversible, il s'ensuit que W est inversible. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{M \text{ vérifie la propriété } (\mathcal{S}).}$$

(5) Montrons alors que ${}^tM$ et M sont semblables. Plus précisément, déterminons une matrice symétrique inversible Q telle que ${}^tM = Q^{-1}MQ$. Pour ce faire, on pose $Q = W^{-1}$ (ce qui fait sens car W est inversible d'après la question précédente). Comme W est symétrique, son inverse est aussi symétrique. Dès lors, comme V est aussi symétrique, on trouve par des calculs simples que :

$${}^tM = {}^t(VW) = {}^tW{}^tV = WV = WVI_n = (W^{-1})^{-1}VWW^{-1} = Q^{-1}VWQ = Q^{-1}MQ.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{{}^tM \text{ et } M \text{ sont semblables.}}$$

(6) Cas général : en s'appuyant sur le cas précédent et la propriété $(\mathcal{R})$, montrons que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices ${}^tM$ et M sont semblables. Pour ce faire, fixons une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. D'après la propriété $(\mathcal{R})$, il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ et des sous-espaces vectoriels non nuls $F_1, ..., F_p$ de $\mathbb{R}^n$, stables par u, tels que $\mathbb{R}^n = F_1 \oplus ... \oplus F_p$ et pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $u_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique de F_i. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on note $\mathcal{B}_{F_k}$ une base de F_k. Alors la concaténation $\mathcal{B}$ des bases $\mathcal{B}_{F_1}, \mathcal{B}_{F_2}, ..., \mathcal{B}_{F_p}$ donne une base de $\mathbb{R}^n$. D'après la question (1) de la partie III, section (C), la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_k & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & A_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & A_p \end{pmatrix},$$

où A_i est une matrice de $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ (avec $n_i = \dim(F_i)$). Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers la base $\mathcal{B}$, alors on voit d'après la formule de changement de bases que $M = PAP^{-1}$. De plus, comme A_i est la matrice de $u_{|F_i}$ dans la base $\mathcal{B}_{F_i}$ et que $u_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique, on sait d'après la question précédente que les matrices ${}^tA_i$ et A_i

sont semblables. Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, on désigne par Q_i une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{R})$ telle que $A_i = Q_i {}^tA_i Q_i^{-1}$, et l'on pose :

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_k & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & Q_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & Q_p \end{pmatrix}.$$

Il est alors facile de vérifier par le calcul que :

$$\begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_k & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & Q_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & Q_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_k^{-1} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & Q_{p-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & Q_p^{-1} \end{pmatrix} = I_n.$$

En particulier, la matrice Q est inversible et de plus, on a :

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2^{-1} & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_k^{-1} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & Q_{p-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & Q_p^{-1} \end{pmatrix}.$$

De la même façon, on peut vérifier que :

$$A = Q \begin{pmatrix} {}^tA_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^tA_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & (0) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & {}^tA_k & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & 0 & {}^tA_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & {}^tA_p \end{pmatrix} Q^{-1},$$

ce qui entraine que $A = Q{}^tAQ^{-1}$, et donc ${}^tA = Q^{-1}AQ$. Partant du fait que $M = PAP^{-1}$ (et donc $A = P^{-1}MP$), on trouve alors que :

$${}^tM = {}^t(P^{-1}){}^tA{}^tP = {}^t(P^{-1})Q^{-1}AQ{}^tP = {}^t(P^{-1})Q^{-1}P^{-1}MPQ{}^tP. \quad (*)$$

Posons enfin $R = PQ{}^tP$. Comme R est un produit de matrices inversibles, elle est aussi inversible. De plus, on trouve par des calculs simples que :

$$R^{-1} = \left(PQ{}^tP\right)^{-1} = ({}^tP)^{-1}Q^{-1}P^{-1} = {}^t(P^{-1})Q^{-1}P^{-1}.$$

En particulier, ceci entraine avec l'égalité $(*)$ que ${}^tM = R^{-1}MR$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\text{les matrices } {}^tM \text{ et } M \text{ sont semblables.}}$$