Devoir Maison de Mathématiques $n^o 6$: Diagonalisation - Algèbre bilinéaire

Exercice 1. Soient $\alpha, p \in]0,1[$, soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$ et sachant $[X=n]$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et posons $G = 2Y - X$. Compléter la fonction en Python suivante pour qu'elle affiche les valeurs prises par X, Y, G lors d'une expérience aléatoire.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(a,p):
    x=........
    y=........
    g=........
    return ........
```

Exercice 2. Soit N une variable aléatoire et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, lesquelles sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que les variables aléatoires $N, X_1, ..., X_n, ...$ sont (mutuellement) indépendantes, que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que tous les X_i suivent la même loi de Bermoulli de paramètre $p \in]0,1[$, et l'on pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés deux réels $\lambda > 0$ et $p \in]0,1[$, calcule et affiche une simulation de la variable aléatoire S.

Problème 1. Dans ce problème, on désigne par p un entier ≥ 3. Pour toute matrice carrée A de taille p et pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on désigne par $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. De même, pour toute matrice ligne L de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, on désigne par $(L)_j$ le coefficient de L situé sur la j-ème colonne. On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si et seulement si : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $(A_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$, ce que l'on note sous la forme :

$$A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A.$$

De même, on dit qu'une suite $(L_n)_{n\geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ si et seulement si : $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $(L_n)_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (L)_j$, ce que l'on note sous la forme :

$$L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L.$$

Par la suite, on admet que, si $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers les matrices A et B, alors la suite $(A_nB_n)_{n\geq 1}$ de matrices converge vers AB. De même, on admet que, si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui converge vers la matrice A et si L est une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite (LA_n) de matrices converge vers LA. Enfin, on désigne par $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \;\; (A)_{i,j} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,p]\!], \;\; \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1.$$

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

(1) (a) Soit V la matrice colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad A \in \mathcal{ST}_p \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \;\; (A)_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad AV = V.$$
(b) En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.
(c) Ecrire une fonction en Python qui détermine si une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est stochastique ou pas.

(2) Montrer que, pour tout $(A,B) \in (\mathcal{ST}_p)^2$, on a : $AB \in \mathcal{ST}_p$.

(3) Par la suite, on pose $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner la dimension de $E_1(A_1)$.

(b) En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

(i) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : "$\forall A \in \mathcal{ST}_p$, $\dim E_1(A) = 1$".

(4) Soit $A \in \mathcal{ST}_p$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, de coefficients $x_1, ..., x_p$. On note i un élément de $[\![1,p]\!]$ tel que : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $|x_k| \leq |x_i|$.

(a) Montrer que : $|\lambda x_i| \leq |x_i|$.

(b) En déduire que : $|\lambda| \leq 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Dans cette partie, on désigne par A un élément de $\mathcal{ST}_p$, et l'on note $A^0 = I_p$.

(1) (a) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n \in \mathcal{ST}_p$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de la partie II, on suppose qu'il existe un entier $r \in [\![1,p-1]\!]$, une matrice $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, une matrice $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geq r+1$, tels que $A = PDP^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k \quad \text{et} \quad B_n = PM_nP^{-1}.$$

On désigne par Δ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et nuls sinon, et l'on pose $B = P\Delta P^{-1}$.

(2) Montrer que, pour tout réel x fixé tel que $|x| \leq 1$, on a : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 1 \end{cases}$.

(3) Montrer que : $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta$. En déduire que : $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$.

(4) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $B_n \in \mathcal{ST}_p$.

(b) En déduire que : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées $1, 2, 3$. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$, l'objet T se trouve dans l'une des trois urnes et une seule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n, et par L_n la matrice ligne :

$$L_n = (P([X_n = 1]) \;\; P([X_n = 2]) \;\; P([X_n = 3])).$$

On suppose connues la loi de X_0 et la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$ par :

$$(A)_{i,j} = P_{[X_0=i]}([X_1 = j]).$$

Enfin, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = P_{[X_0=i]}([X_1 = j])$.

(1) Montrer que : $A \in \mathcal{ST}_3$.

(2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} = L_nA$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = L_0A^n$.

Dans la suite de la partie III, on suppose que $A = A_1$, et l'on pose $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(3) Déterminer une matrice $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1 telle que $A_1 = P_1D_1P_1^{-1}$, et calculer P_1^{-1}.

(4) Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n\geq 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n\geq 1}$.

(5) Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n\geq 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

Problème 2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $E = \mathbb{R}_n[x]$ et on désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de E. De plus, pour tout $P \in E$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(P)(x) = R''(x)$, où $R : x \longmapsto (x^2-1)P(x)$. Enfin, pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2)P(t)Q(t)dt.$$

(1) **Partie I : étude d'un endomorphisme de E.**

(a) Montrer que, pour tout $P \in E$, le polynôme R'' appartient à E.

(b) Vérifier que $\Phi(x \longmapsto 1) = 2(x \longmapsto 1)$ et $\Phi(x \longmapsto x) = 6(x \longmapsto x)$.
(c) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
(d) Calculer $\Phi(x \longmapsto x^k)$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, et écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Montrer que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, ..., \lambda_n$, avec $\lambda_0 < ... < \lambda_n$.
(f) L'endomorphisme Φ est-il bijectif ? Justifier.
(g) Montrer que Φ est diagonalisable et déterminer la dimension de $E_{\lambda_k}(\Phi)$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$.
(h) Soit $k \in \{0, ..., n\}$, et soit P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.
   (i) Montrer que P est de degré k.
   (ii) Montrer que $Q : x \longmapsto P(-x)$ est vecteur propre de Φ pour la valeur propre λ_k.
   (iii) En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, ..., P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, le polynôme P_k est de degré k, unitaire et vérifie la relation $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?
   (iv) Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.

(2) **Partie II : étude d'un produit scalaire sur E.**

(a) Montrer que $\langle \; , \; \rangle$ est un produit scalaire sur E.
(b) A l'aide d'intégrations par parties, montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de E.
(c) Montrer que la base $(P_0, ..., P_n)$ de la question $(1)(h)(iii)$ est orthogonale.
(d) Soit j un élément de $\{1, ..., n\}$.
   (i) Montrer que, pour tout polynôme S de degré $< j$, on a : $\langle S, P_j \rangle = 0$.
   (ii) En considérant $\langle x \longmapsto 1, P_j \rangle$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur $]-1, 1[$.
   (iii) En déduire que P_j admet au moins une racine d'ordre de multiplicité impair dans $]-1, 1[$.
(e) Soit j un élément de $\{1, ..., n\}$, soient $x_1, ..., x_m$ les racines d'ordre de multiplicité impair de P_j dans $]-1, 1[$ et soit $S : x \longmapsto (x - x_1)...(x - x_m)$.
   (i) Justifier que : $m \leq j$.
   (ii) Montrer que le polynôme $S_m P_j$ garde un signe constant sur $]-1, 1[$.
   (iii) En considérant $\langle S_m, P_j \rangle$, montrer que $m = j$.
   (iv) En déduire que P_j admet j racines simples distinctes toutes situées dans $]-1, 1[$.