Lycée Clemenceau **2025-26**
ECG 2

Corrigé du Devoir Maison de Mathématiques $n^o 6$: Diagonalisation - Algèbre bilinéaire

Corrigé de l'exercice 1. Soient $\alpha, p \in]0, 1[$, soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que $X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\alpha)$ et sachant $[X = n]$, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et posons $G = 2Y - X$. Complétons la fonction en Python suivante pour qu'elle affiche les valeurs prises par X, Y, G lors d'une expérience aléatoire.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(a,p):
    x=........
    y=........
    g=........
    return ........
```

Pour ce faire, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(a,p):
    x=rd.geometric(a)-1
    y=rd.binomial(x,p)
    g=2*y-x
    return x,y,g
```

Corrigé de l'exercice 2. Soit N une variable aléatoire et soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, lesquelles sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que les variables aléatoires $N, X_1, ..., X_n, ...$ sont (mutuellement) indépendantes, que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que tous les X_i suivent la même loi de Bermoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, et l'on pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, c'est-à-dire $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Ecrivons une fonction en Python qui, étant donnés deux réels $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$, calcule et affiche une simulation de la variable aléatoire S. Pour ce faire, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul2(l,p):
    n=rd.poisson(l)
    x=rd.binomial(1,p,n)
    s=np.sum(x)
    return s
```

Corrigé du problème 1. Dans ce problème, on désigne par p un entier ≥ 3. Pour toute matrice carrée A de taille p et pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, on désigne par $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. De même, pour toute matrice ligne L de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on désigne par $(L)_j$ le coefficient de L situé sur la j-ème colonne. On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ si et seulement si : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $(A_n)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$, ce que l'on note :

$$A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A.$$

De même, on dit qu'une suite $(L_n)_{n\geq 1}$ de matrices de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ si et seulement si : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $(L_n)_j \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (L)_j$, ce que l'on note sous la forme :

$$L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L.$$

Par la suite, on admet que, si $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ convergeant respectivement vers les matrices A et B, alors la suite $(A_nB_n)_{n\geq 1}$ de matrices converge vers AB. De même, on admet que, si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui converge vers la matrice A et si L est une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite (LA_n) de matrices converge vers LA. Enfin, on désigne par $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ \ (A)_{i,j} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,p]\!], \ \ \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1.$$

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

(1) (a) Soit V la matrice colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrons que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \quad A \in \mathcal{ST}_p \quad \iff \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ \ (A)_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad AV = V.$$

Par des calculs simples et vu que tous les coefficients de V sont tous égaux à 1, on trouve que :

$$AV = \begin{pmatrix} (A)_{1,1} & \dots & (A)_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ (A)_{p,1} & \dots & (A)_{p,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} (A)_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} (A)_{p,j} \end{pmatrix}.$$

Dès lors, on voit que $AV = V$ si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1$$

En particulier, la deuxième condition "$\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1$" apparaissant dans la définition d'une matrice stochastique est équivalente à la condition "$AV = V$". Par conséquent, on en déduit que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$:

$$\boxed{A \in \mathcal{ST}_p \quad \iff \quad \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ \ (A)_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad AV = V.}$$

(b) Montrons que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune. D'après la question précédente et comme V n'est pas le vecteur colonne nul, on voit que V est un vecteur propre de toute matrice stochastique pour la valeur propre 1. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{toutes les matrices de } \mathcal{ST}_p \text{ ont une valeur propre commune, à savoir : 1.}}$$

(c) Ecrivons une fonction en Python qui détermine si une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est stochastique ou pas. Pour ce faire, on va tester chacune des conditions que doit vérifier une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ pour être stochastique. On fera intervenir une variable s qui jouera le rôle d'une variable booléenne, en prenant la valeur 1 si toutes les conditions pour être stochastique sont vérifiées, et 0 sinon. Plus précisément, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np

def stochastique(a):
    s=1
    n=np.shape(a)[0]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if a[i,j]<0:
                s=0
    for i in range(n):
        if np.sum(a[i,:])!=1:
            s=0
    if s==0:
        print('a n est pas stochastique')
    else:
        print('a est stochastique')
```

(2) Montrons que, pour tout $(A,B)\in(\mathcal{ST}_p)^2$, on a : $AB\in\mathcal{ST}_p$. Pour ce faire, considérons deux matrices A,B de $\mathcal{ST}_p$. Comme A et B sont stochastiques, tous leurs coefficients sont ≥ 0, et donc on trouve par définition du produit matriciel que, pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$:

$$(AB)_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}(A)_{i,k}(B)_{k,j}\geq 0.$$

De plus, comme A et B sont stochastiques, on sait d'après la question (1)(a) que $AV=V$ et $BV=V$, ce qui entraine par associativité du produit matriciel que :

$$(AB)V=A(BV)=AV=V.$$

Par conséquent, on en déduit avec la question (1)(a) que, pour tout $(A,B)\in(\mathcal{ST}_p)^2$:

$$\boxed{AB\in\mathcal{ST}_p.}$$

(3) Par la suite, on pose $A_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/2&0\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&1/2\\0&1/2&1/2\end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/2&0\\0&1/2&1/2\end{pmatrix}$.

(a) Justifions sans calcul que A_1 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donnons la dimension de $E_1(A_1)$. Comme A_1 est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$. En particulier, la matrice A_1 admet trois valeurs propres distinctes. Mais comme A_1 appartient à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on en déduit que :

$$\boxed{A_1 \text{ est diagonalisable et de plus : } \dim E_1(A_1)=1.}$$

(b) En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

(i) Montrons qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on va s'intéresser à la matrice A_3. Comme A_3 est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire $1,\frac{1}{2}$. En particulier, la matrice A_3 admet deux valeurs propres distinctes. A présent, déterminons une base de $E_1(A_3)$. Soit X un vecteur colonne de composantes x_1,x_2,x_3. Alors on voit que :

$$X\in E_1(A_3)\iff A_3X-X=0\iff A_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En termes de coordonnées, on voit que (x_1,x_2,x_3) est solution du système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & = & 0\\ \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & & & = & 0\\ & & \frac{1}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & = & 0\end{array}\right..$$

On résout alors ce système par la méthode du pivot de Gauss. En supprimant la première ligne et en effectuant les opérations élémentaires $L_2\leftarrow 2L_2$ et $L_3\leftarrow 2L_3$, on trouve que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & & & = & 0\\ & & x_2 & - & x_3 & = & 0\end{array}\right..$$

Si l'on choisit x_3 comme paramètre, on trouve que $x_1=x_3$ et $x_2=x_3$, et donc :

$$X\in E_1(A_3)\iff \exists x_3\in\mathbb{R},\ X=x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\iff X\in\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Dès lors, on voit que $E_1(A_3)=\operatorname{Vect}(V)$, et donc (V) est une famille génératrice de $E_1(A_3)$. Mais comme ce vecteur colonne est non nul, il forme une famille libre, et donc :

$$\boxed{(V) \text{ est une base de } E_1(A_3).}$$

Enfin, déterminons une base de $E_{1/2}(A_3)$. En gardant les mêmes notations, on a :

$$X\in E_{1/2}(A_3)\iff A_3X-\frac{1}{2}X=0\iff A_3\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

En termes de coordonnées, on voit que (x_1,x_2,x_3) est solution du système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}x_1 & & & = & 0\\ \frac{1}{2}x_1 & & & = & 0\\ & & \frac{1}{2}x_2 & = & 0\end{array}\right..$$

Si l'on choisit x_3 comme paramètre, on trouve que $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_3 = x_3$, et donc :

$$X \in E_{1/2}(A_3) \iff \exists x_3 \in \mathbb{R},\ X = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Dès lors, si U est le vecteur colonne de composantes $0, 0, 1$, on voit que $E_{1/2}(A_3) = \text{Vect}(U)$, et donc (U) est une famille génératrice de $E_{1/2}(A_3)$. Mais comme ce vecteur colonne est non nul, il forme une famille libre, et donc :

$$\boxed{(U) \text{ est une base de } E_{1/2}(A_3).}$$

Mais comme $\dim E_1(A_3) + \dim E_{1/2}(A_3) = 1 + 1 = 2 \neq 3$, on en déduit que A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En outre, comme tous les coefficients de A_3 sont ≥ 0 et que la somme de ses coefficients en ligne est toujours égale à 1, on voit que A_3 est stochastique. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{ST}_3 \text{ contient au moins un élément non diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

(ii) Justifions si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : "$\forall A \in \mathcal{ST}_p, \dim E_1(A) = 1$". On peut voir que la matrice I_p est à coefficients ≥ 0, et que la somme de ses coefficients en ligne est toujours égale à 1. En d'autres termes, la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est stochastique. De plus, comme $I_p X = X$ pour tout vecteur colonne X, on voit que $E_1(I_p) = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, et donc $\dim E_1(I_p) = p \neq 1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'affirmation "}\forall A \in \mathcal{ST}_p,\ \dim E_1(A) = 1\text{" est fausse.}}$$

(4) Soit $A \in \mathcal{ST}_p$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et soit X un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, de coefficients $x_1, ..., x_p$. On note i un élément de $[\![1, p]\!]$ tel que : $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $|x_k| \leq |x_i|$.

(a) Montrons que : $|\lambda x_i| \leq |x_i|$. Comme X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, on sait que $AX = \lambda X$. En particulier, si l'on s'intéresse à la i-ème composante du vecteur AX, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k} x_k = \lambda x_i.$$

En passant à la valeur absolue, on obtient avec l'inégalité triangulaire que :

$$|\lambda x_i| = \left|\sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |(A)_{i,k} x_k| \leq \sum_{k=1}^{p} |(A)_{i,k}|\, |x_k|.$$

Comme tous les coefficients de A sont ≥ 0 et que $|x_k| \leq |x_i|$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{k=1}^{p} |(A)_{i,k}|\, |x_k| \leq \sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k}\, |x_k| \leq \sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k}\, |x_i|.$$

Mais comme A est stochastique, on sait que $\sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k} = 1$, et donc :

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k}\, |x_i| \leq \left[\sum_{k=1}^{p} (A)_{i,k}\right] |x_i| \leq 1 \times |x_i|.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{|\lambda x_i| \leq |x_i|.}$$

(b) Montrons que : $|\lambda| \leq 1$. Comme X est un vecteur propre de A, on sait par définition que $X \neq 0$, et donc il existe un indice $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_k \neq 0$. Dès lors, comme $|x_k| \leq |x_i|$ par construction, on voit que $|x_i| > 0$. Mais comme $|\lambda x_i| = |\lambda|.|x_i| \leq |x_i|$, on en déduit par division que :

$$\boxed{|\lambda| \leq 1.}$$

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Dans cette partie, on désigne par A un élément de $\mathcal{ST}_p$, et l'on note $A^0 = I_p$.

(1) (a) Etablissons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "A^n \in \mathcal{ST}_p".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I_p$ et I_p est stochastique. En effet, tous ses coefficients sont ≥ 0 et la somme de ses coefficients en ligne est toujours égale à 1. A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que A^n est stochastique. Comme le produit de deux matrices stochastiques est stochastique, et que A et A^n sont stochastiques, il s'ensuit avec la question $(1)(b)$ de la partie I que $A \times A^n = A^{n+1}$ est aussi stochastique, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n \in \mathcal{ST}_p.}$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$. D'après la question précédente, on sait que A^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, tous les coefficients de A^k sont ≥ 0 pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$:

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right)_{i,j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left(A^k\right)_{i,j} \geq 0. \quad (*)$$

De plus, comme A^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait que $A^kV = V$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après la question $(1)(b)$. Par linéarité, on trouve que :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) V = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^kV = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V = V. \quad (**)$$

Comme les conditions $(*)$ et $(**)$ sont vérifiées, on en déduit avec la question $(1)(b)$ que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p.}$$

Dans la suite de la partie II, on suppose qu'il existe un entier $r \in [\![1,p-1]\!]$, une matrice $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, une matrice $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geq r+1$, tels que $A = PDP^{-1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k \quad \text{et} \quad B_n = PM_nP^{-1}.$$

On désigne par Δ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont tous les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et nuls sinon, et l'on pose $B = P\Delta P^{-1}$.

(2) Montrons que, pour tout réel x fixé tel que $|x| \leq 1$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \neq 1 \end{cases}.$$

Pour ce faire, on procède à une distinction de cas :

Premier cas : $x = 1$.

Dans ce cas, on trouve par des calculs simples que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{n} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que, si $x = 1$:

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$$

Deuxième cas : $x \neq 1$.

Dans ce cas, comme $|x| \leq 1$ et que $x \neq 1$, on voit que $x \in [-1, 1[$. D'après les propriétés des sommes de termes de suites géométriques, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{n} \times \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Comme $|x| \leq 1$, la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ est bornée. Mais comme le produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0 converge vers 0, il s'ensuit que :

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

Par conséquent, on déduit de cette distinction de cas que :

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x = 1 \\ 0 & \text{si} & x \neq 1 \end{array} \right. .}$$

(3) Montrons que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ tend vers Δ. Comme $A = PDP^{-1}$, les coefficients diagonaux de la matrice D sont exactement les valeurs propres de A. Mais comme $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ d'après la question (4)(b) de la partie I, il s'ensuit que $|(D)_{i,i}| \leq 1$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. D'après la question précédente, vu que D est diagonale et que tous les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leq r$ et distincts de 1 si $i \geq r+1$, on obtient que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \right)_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (D)_{i,i}^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & i \leq r \\ 0 & \text{si} & i \geq r+1 \end{array} \right. .$$

De plus, comme D est diagonale, on voit que, pour tous indices i, j avec $i \neq j$:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \right)_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (D^k)_{i,j} = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En d'autres, on vient de montrer que, pour tous indices i, j :

$$(M_n)_{i,j} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \right)_{i,j} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (\Delta)_{i,j}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta.}$$

A présent, montrons que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ tend vers B. Comme $B_n = PM_nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ converge vers Δ, on voit avec la propriété admise en début de problème que la suite $(PM_n)_{n\geq 1}$ converge vers $P\Delta$, puis que la suite $(PM_nP^{-1})_{n\geq 1} = ((PM_n)P^{-1})_{n\geq 1}$ converge vers $(P\Delta)P^{-1} = P\Delta P^{-1} = B$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B.}$$

(4) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $B_n \in \mathcal{ST}_p$. Par construction de M_n, par distributivité du produit matriciel et vu que $A = PDP^{-1}$, on trouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = PM_nP^{-1} = P \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \right] P^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} PD^kP^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (PDP^{-1})^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k.$$

Comme A appartient à $\mathcal{ST}_p$, on sait que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k$ appartient à $\mathcal{ST}_p$ d'après la question (1)(b) de la partie II, et donc on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{B_n \in \mathcal{ST}_p.}$$

(b) Montrons que : $B \in \mathcal{ST}_p$. Comme B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit par définition des matrices stochastiques que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2, \;\; (B_n)_{i,j} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, p]\!], \;\; \sum_{j=1}^{p} (B_n)_{i,j} = 1.$$

Comme la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ converge vers B, cela signifie par définition que la suite $((B_n)_{i,j})_{n\geq 1}$ tend vers $B_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Dès lors, on obtient par passage à la limite dans les égalités ci-dessus que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \ (B)_{i,j} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} (B)_{i,j} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{B \in \mathcal{ST}_p.}$$

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées $1, 2, 3$. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$, l'objet T se trouve dans l'une des trois urnes et une seule. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n, et par L_n la matrice ligne :

$$L_n = (P([X_n = 1])\ \ P([X_n = 2])\ \ P([X_n = 3])).$$

On suppose connues la loi de X_0 et la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$ par :

$$(A)_{i,j} = P_{[X_0=i]}([X_1 = j]).$$

Enfin, on suppose que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = P_{[X_0=i]}([X_1 = j])$.

(1) Montrons que : $A \in \mathcal{ST}_3$. Comme $P_{[X_0=i]}$ est une probabilité sur l'univers Ω, elle ne prend que des valeurs ≥ 0 pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, et donc on a pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$:

$$(A)_{i,j} = P_{[X_0=i]}([X_1 = j]) \geq 0.$$

Comme de plus $X_n(\Omega) = \{1,2,3\}$, on voit que la famille $([X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$ est un système complet d'événements, et donc on a pour tout $i \in [\![1,3]\!]$:

$$\sum_{j=1}^{3} (A)_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} P_{[X_0=i]}([X_1 = j]) = 1.$$

Par conséquent, on en déduit par définition des matrices stochastiques que :

$$\boxed{A \in \mathcal{ST}_3.}$$

(2) Montrons tout d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = L_n A$. Par définition du produit matriciel et des matrices A et L_n, on trouve que, pour tout $j \in [\![1,3]\!]$:

$$(L_n A)_j = \sum_{k=1}^{3} (L_n)_k (A)_{k,j} = \sum_{k=1}^{3} P([X_n = k]) P_{[X_0=k]}([X_1 = j]).$$

Comme $P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = P_{[X_0=i]}([X_1 = j])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in [\![1,3]\!]$:

$$(L_n A)_j = \sum_{k=1}^{3} P([X_n = k]) P_{[X_0=k]}([X_1 = j]) = \sum_{k=1}^{3} P([X_n = k]) P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = j]).$$

D'après la formule des probabilités totales, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in [\![1,3]\!]$:

$$(L_n A)_j = \sum_{k=1}^{3} P([X_n = k]) P_{[X_n=k]}([X_{n+1} = j]) = P([X_{n+1} = j]) = (L_{n+1})_j.$$

Comme ceci est vrai pour tout $j \in [\![1,3]\!]$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{L_{n+1} = L_n A.}$$

A présent, montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"}L_n = L_0 A^n\text{"}.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I_p$ et $L_0 = L_0 I_p = L_0 A^0$. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $L_n = L_0 A^n$. Comme $L_{n+1} = L_n A$, il s'ensuit que :

$$L_{n+1} = L_n A = L_0 A^n \times A = L_0 A^{n+1},$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{L_n = L_0 A^n.}$$

Dans la suite de la partie III, on suppose que $A = A_1$, et l'on pose $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(3) Déterminons tout d'abord une matrice $P_1 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1 telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$. En d'autres termes, il s'agit ici de diagonaliser la matrice A_1. Pour ce faire, on commence par remarquer que, comme A_1 est triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. En particulier, la matrice A_1 admet trois valeurs propres distinctes, à savoir $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Passons au calcul d'une base de $E_1(A_1)$. D'après la question (1)(b) de la partie I, on sait que V est un vecteur propre de A_1 pour la valeur propre 1. Comme de plus $V \neq 0$, la famille (V) est libre. Mais comme $\dim E_1(A_1) = 1$ d'après ce qui précède et que (V) a 1 élément, on en déduit que :

$$\boxed{(V) \text{ est une base de } E_1(A_1).}$$

Ensuite, déterminons une base de $E_{1/3}(A_1)$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, le vecteur $V_{1/3}$ de composantes $0, 0, 1$ est un vecteur propre de A_1 pour la valeur propre $1/3$. Comme de plus $V_{1/3} \neq 0$, la famille $(V_{1/3})$ est libre. Mais comme $\dim E_{1/3}(A_1) = 1$ d'après ce qui précède et que $(V_{1/3})$ a 1 élément, on en déduit que :

$$\boxed{(V_{1/3}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{est une base de } E_{1/3}(A_1).}$$

Enfin, déterminons une base de $E_{1/2}(A_1)$. Pour ce faire, considérons un vecteur colonne X de composantes x_1, x_2, x_3. Alors on trouve que :

$$X \in E_{1/2}(A_1) \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 X - \frac{1}{2} X = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En termes de coordonnées, on voit que (x_1, x_2, x_3) est solution du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2}x_1 & & & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & & & & & = & 0 \\ \frac{1}{3}x_1 & + & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{1}{6}x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Si l'on choisit x_2 comme paramètre, on trouve que $x_1 = 0$, $x_2 = x_2$ et $x_3 = 2x_2$, et donc :

$$X \in E_{1/2}(A_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_2 \in \mathbb{R}, \ X = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier, si $V_{1/2}$ est le vecteur colonne de composantes $0, 1, 2$, alors on voit que $E_{1/2}(A_1) = \operatorname{Vect}(V_{1/2})$, et donc $(V_{1/2})$ est une famille génératrice de $E_{1/2}(A_1)$. Mais comme ce vecteur colonne est non nul, il forme une famille libre, et donc :

$$\boxed{(V_{1/2}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{est une base de } E_{1/2}(A_1).}$$

Par conséquent, on en déduit que A_1 se diagonalise sous la forme suivante :

$$\boxed{A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}, \text{ avec } : P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.}$$

A présent, calculons P_1^{-1}. Pour ce faire, on cherche à résoudre l'équation $Y = P_1X$, où :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

La résolution de cette équation se ramène à celle du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & y_1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & y_2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & y_3 \end{array} \right. .$$

Pour résoudre ce système, on procède par la méthode du pivot de Gauss. Après les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient que :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & y_1 \\ & & x_2 & & & = & -y_1 + y_2 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & -y_1 + y_3 \end{array} \right. .$$

Après l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, on trouve que :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & y_1 \\ & x_2 & & = & -y_1 + y_2 \\ & & x_3 & = & y_1 - 2y_2 + y_3 \end{array} \right. .$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(4) Déterminons tout d'abord la limite de la suite $(D_1^n)_{n\geq 1}$. Comme la matrice D_1 est diagonale, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}.$$

Comme $(1/2)^n$ et $(1/3)^n$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, il s'ensuit par définition de la limite d'une suite de matrices que :

$$\boxed{D_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta.}$$

A présent, déterminons la limite de la suite $(A_1^n)_{n\geq 1}$. Comme $A_1^n = (P_1D_1P_1^{-1})^n = P_1D_1^nP_1^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la suite $(D_1^n)_{n\geq 1}$ converge vers Δ, on voit avec la propriété admise en début de problème que la suite $(P_1D_1^n)_{n\geq 1}$ converge vers $P_1\Delta$, puis que la suite $(A_1^n)_{n\geq 1} = (P_1D_1^nP_1^{-1})_{n\geq 1} = ((P_1D_1^n)P_1^{-1})_{n\geq 1}$ converge vers $(P_1\Delta)P_1^{-1} = P_1\Delta P_1^{-1}$. Par des calculs simples et d'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} P_1\Delta P_1^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(5) Déterminons la limite de la suite $(L_n)_{n\geq 1}$. D'après la question (2) de la partie III, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $L_n = L_0(A_1)^n$. D'après la question précédente et le résultat admis en début de problème, on voit que :

$$L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, par définition de L_0, on trouve que :

$$(P([X_0 = 1])\ P([X_0 = 2])\ P([X_0 = 3])) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (P([X_0 = 1]) + P([X_0 = 2]) + P([X_0 = 3])\ 0\ 0).$$

Comme $([X_0 = 1], [X_0 = 2], [X_0 = 3])$ est un système complet d'événements, il s'ensuit que :

$$(P([X_0 = 1])\ P([X_0 = 2])\ P([X_0 = 3])) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (1\ \ 0\ \ 0).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{L_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (1\ \ 0\ \ 0).}$$

En d'autres termes, ce résultat signifie par définition de L_n que :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} P([X_n = 1]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \\ \\ P([X_n = 2]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \\ P([X_n = 3]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. .}$$

En particulier, cela signifie que l'objet T a une très forte probabilité (proche de 1) de se retrouver dans l'urne 1 à l'instant n si n est assez grand. Pour expliquer ce résultat, rappelons que :

$$A_1 = \begin{pmatrix} P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) & P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 2]) & P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 3]) \\ P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1]) & P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 2]) & P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 3]) \\ P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 1]) & P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 2]) & P_{[X_n=3]}([X_{n+1} = 3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que, si l'objet T se trouve dans l'urne 1 à l'instant n, alors il a toutes les chances d'y rester à l'instant $n+1$ puisque $P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = 1$, et de même à l'instant $n+2$, et ainsi de suite. En d'autres termes, l'objet T se retrouve "piégé" dans l'urne 1 à partir de l'instant n.

Si maintenant l'objet T se trouve dans l'urne 2 à l'instant n, alors il reste dans l'urne 2 avec probabilité 1/2 à l'instant $n+1$, et de plus il n'a aucune chance d'aller dans l'urne 3 à l'instant $n+1$. Dès lors, il restera dans l'urne 2 avec probabilité $(1/2)^p$ à l'instant $n+p$. Comme $(1/2)^p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, le théorème de la limite monotone entraine que l'objet T a une probabilité nulle de rester indéfiniment dans l'urne 2 à partir de l'instant n. En d'autres termes, il a toutes le chances de passer dans l'urne 1 à un moment ou un autre, et donc d'y rester "piégé".

Enfin, si l'objet T se trouve dans l'urne 3 à l'instant n, alors il reste dans l'urne 3 avec probabilité 1/3 à l'instant $n+1$. Dès lors, il restera dans l'urne 3 avec probabilité $(1/3)^p$ à l'instant $n+p$. Comme $(1/3)^p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, le théorème de la limite monotone entraine que l'objet T a une probabilité nulle de rester indéfiniment dans l'urne 3 à partir de l'instant n. En d'autres termes, il a toutes les chances de passer dans l'urne 1 ou dans l'urne 2 à un moment ou un autre. S'il passe dans l'urne 1 à un moment donné, alors il s'y retrouve "piégé" et ce définitivement. S'il passe dans l'urne 2 à un moment donné, alors il a toutes les chances (d'après les arguments précédents) de repasser dans le futur par l'urne 1, et de s'y retrouver aussi "piégé".

En résumé, l'objet T a toutes les chances de passer par l'urne 1 à un moment ou un autre, et une fois qu'il y est, il n'a aucune chance d'en ressortir, ce qui explique que :

$$P([X_n = 1]) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Corrigé du problème 2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $E = \mathbb{R}_n[x]$ et on désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de E. De plus, pour tout $P \in E$, on pose $\Phi(P) = R''$ avec $R : x \longmapsto ((x^2 - 1)P(x))''$. Enfin, pour tous $P, Q \in E$, on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)P(t)Q(t)dt.$$

(1) **Partie I : étude d'un endomorphisme de E.**

(a) Montrons que, pour tout $P \in E$, le polynôme R'' appartient à E. Comme $E = \mathbb{R}_n[x]$, tout élément P de E est un polynôme de degré $\leq n$. Dès lors, on obtient à l'aide des propriétés du degré que :

$$\begin{aligned} \deg(R'') &\leq \deg((x \longmapsto (x^2-1)P(x)) - 2 \\ &\leq \deg(x \longmapsto x^2 - 1) + \deg(P) - 2 \\ &\leq \deg(P) + 2 - 2 \\ &\leq \deg(P) \quad \leq \quad n. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $P \in E$:

$$\boxed{\text{le polynôme } R'' \text{ appartient à } E.}$$

(b) Vérifions que $\Phi(x \longmapsto 1) = x \longmapsto 2$ et $\Phi(x \longmapsto x) = x \longmapsto 6x$. Par des calculs simples, on voit que :

$$\Phi(x \longmapsto 1) = (x \longmapsto (x^2-1) \times 1)'' = x \longmapsto 2.$$

De la même façon, on obtient que :

$$\Phi(x \longmapsto x) = (x \longmapsto (x^2-1) \times x)'' = (x \longmapsto x^3 - x)'' = x \longmapsto 6x.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi((x \longmapsto 1) = x \longmapsto 2 \ \text{ et } \ \Phi(x \longmapsto x) = x \longmapsto 6x.}$$

(c) Montrons que Φ est un endomorphisme de E. D'après la question $(1)(a)$, on sait que $\Phi(P)$ appartient à E pour tout $P \in E$, et donc Φ est une application de E dans E. Reste à vérifier que Φ est linéaire. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in E$, on trouve par linéarité de la dérivation que :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda P + \mu Q) &= \left[x \longmapsto (x^2-1)(\lambda P + \mu Q)(x)\right]'' \\ &= \left[\lambda\left(x \longmapsto \lambda(x^2-1)P(x)\right) + \mu\left(x \longmapsto (x^2-1)Q(x)\right)\right]'' \\ &= \lambda\left[x \longmapsto (x^2-1)P(x)\right]'' + \mu\left[x \longmapsto (x^2-1)Q(x)\right]'' \\ &= \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q). \end{aligned}$$

En particulier, l'application Φ est linéaire, et donc :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

(d) Calculons $\Phi(x \longmapsto x^k)$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, et écrivons la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $k \in \{2, ..., n\}$:

$$\begin{aligned} \Phi(X^k) &= (x \longmapsto (x^2-1) \times x^k)'' \\ &= (x \longmapsto x^{k+2} - x^k)'' \\ &= (k+2)(k+1)(x \longmapsto x^k) - k(k-1)(x \longmapsto x^{k-2}). \end{aligned}$$

A noter que cette expression est encore valide si $k = 0$ ou 1, puisque dans ce cas $k(k-1) = 0$. Dans tous les cas, on obtient que, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$:

$$\boxed{\Phi(x \longmapsto x^k) = (k+2)(k+1)(x \longmapsto x^k) - k(k-1)(x \longmapsto x^{k-2}).}$$

Dès lors, on en déduit que la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$\boxed{\mathfrak{mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 6 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 12 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (n+2)(n+1) \end{pmatrix}.}$$

(e) Montrons que Φ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, ..., \lambda_n$, avec $\lambda_0 < ... < \lambda_n$. D'après la question précédente, la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure. Dès lors, les valeurs propres de Φ sont exactement les coefficients diagonaux de cette matrice, c'est-à-dire les nombres de la forme $(k+2)(k+1)$, avec $k \in \{0, ..., n\}$. Reste donc à vérifier que ces nombres sont deux à deux distincts et en ordre strictement croissant. Pour ce faire, considérons l'application $f : t \longmapsto (t+2)(t+1)$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme f est un polynôme, on voit que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(t) = (t^2 + 3t + 2)' = 2t + 3 > 0.$$

Dès lors, il s'ensuit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, on voit que :

$$f(0) < f(1) < ... < f(k) < ... < f(n),$$

ce qui signifie que les réels de la forme $(k+2)(k+1)$, avec $k \in \{0, ..., n\}$, sont deux à deux distincts et rangés en ordre strictement croissant. Par conséquent :

$$\boxed{\Phi \text{ admet } n+1 \text{ valeurs propres distinctes } \lambda_0, ..., \lambda_n, \text{ avec } \lambda_0 < ... < \lambda_n.}$$

(f) Montrons que l'endomorphisme Φ est bijectif. D'après la question (1)(d), la matrice A de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, avec pour coefficients diagonaux les nombres de la forme $(k+2)(k+1)$, où $k \in \{0, ..., n\}$. Mais comme ces nombres sont rangés en ordre croissant, on voit que $(k+2)(k+1) \geq 2 > 0$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, et donc tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls. En particulier, la matrice A est inversible, ce qui entraine que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } \Phi \text{ est bijectif.}}$$

(g) Montrons que Φ est diagonalisable et déterminons la dimension de $E_{\lambda_k}(\Phi)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. D'après la question (1)(e), on sait que Φ admet $(n+1)$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, ..., \lambda_n$. Mais comme $E = \mathbb{R}_n[x]$, E est de dimension $(n+1)$ et donc :

$$\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable et } \dim E_{\lambda_k}(\Phi) = 1 \text{ pour tout } k \in \{0, ..., n\}.}$$

(h) Soit $k \in \{0, ..., n\}$, et soit P un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre λ_k.

(i) Montrons que P est de degré k. Pour ce faire, posons $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r$, où $a_0, a_1, ..., a_r \in \mathbb{R}$ et $a_r \neq 0$. Par définition, on voit que $\deg(P) = r$. De plus, par des calculs simples, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(P)(x) &= \left[(x^2-1)(a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r)\right]'' \\
&= \left[-a_0 - a_1 x + a_0 x^2 + ... + a_r x^{r+2}\right]'' \\
&= 2a_0 + ... + (r+2)(r+1) a_r x^r.
\end{aligned}$$

Comme $\Phi(P) = \lambda_k P = (k+2)(k+1)P$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2a_0 + ... + (r+2)(r+1)a_r x^r = (k+2)(k+1)a_0 + ... + (k+2)(k+1)a_r x^r.$$

En ne considérant que les termes de degré r, on trouve que $(r+2)(r+1)a_r = (k+2)(k+1)a_r$. Comme $a_r \neq 0$, il s'ensuit que $(r+2)(r+1) = (k+2)(k+1)$, et donc $k = r$ d'après la question (1)(e). En particulier, on en déduit que :

$$\boxed{\text{le polynôme } P \text{ est de degré } k.}$$

(ii) Montrons que $Q : x \longmapsto P(-x)$ est vecteur propre de Φ pour la valeur propre λ_k. Pour ce faire, considérons un polynôme quelconque R, et posons $S(x) = R(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'après les propriétés de la dérivation, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S'(x) = (R(-x))' = -R'(-x) \quad \text{et} \quad S''(x) = (-R'(-x))' = R''(-x).$$

Si l'on pose $R(x) = (x^2-1)P(x)$, alors on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(Q)(x) = \left[(x^2-1)Q(x)\right]'' = \left[((-x)^2-1)P(-x)\right]'' = [R(-x)]''.$$

En utilisant les formules données plus haut, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(Q)(x) = [R(-x)]'' = [S(x)]'' = R''(-x).$$

Vu que $R''(x) = \Phi(P)(x) = \lambda_k P(x)$ par hypothèse, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(Q)(x) = R''(-x) = \lambda_k P(-x) = \lambda_k Q(x).$$

Mais comme P est un vecteur propre de Φ, il est non nul par hypothèse, et donc $Q : x \longmapsto P(-x)$ n'est pas nul non plus. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{Q : x \longmapsto P(-x) \text{ est vecteur propre de } \Phi \text{ pour la valeur propre } \lambda_k.}$$

(iii) Montrons qu'il existe une unique base $(P_0, ..., P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, le polynôme P_k est de degré k, unitaire et vérifie la relation $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On procède en deux étapes :

Première étape : existence d'une telle base.

Commençons par établir l'existence d'une telle base. Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on fixe un vecteur propre Q_k de Φ pour la valeur propre λ_k, on désigne par a_k le coefficient dominant de Q_k et l'on pose $P_k = \frac{Q_k}{a_k}$. Alors, par construction, le polynôme P_k est unitaire et vecteur propre de Φ pour la valeur propre λ_k, et de plus P_k est de degré k d'après les questions précédentes. En particulier, la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, et donc c'est une base de E. De plus, comme $x \longmapsto P_k(-x)$ est vecteur propre de Φ pour la valeur propre λ_k d'après la question $(1)(h)(ii)$, et que les sous-espaces propres de Φ sont tous de dimension 1, les polynômes P_k et $x \longmapsto P_k(-x)$ sont proportionnels. Mais comme P_k est unitaire de degré k, le coefficient du terme de plus haut degré de $x \longmapsto P_k(-x)$ est égal à $(-1)^k$, et donc $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où l'existence d'une telle base.

Deuxième étape : unicité d'une telle base.

A présent, montrons qu'une telle base est unique. Soient $(P_0, ..., P_n)$ et $(R_0, ..., R_n)$ deux bases de E vérifiant les conditions données plus haut. Comme P_k et R_k sont des vecteurs propres de Φ et qu'ils sont de degré k pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, ces polynômes sont des vecteurs propres de Φ pour la valeur propre λ_k d'après la question $(1)(h)(i)$. Comme les sous-espaces propres de Φ sont de dimension 1 d'après la question $(1)(g)$, les polynômes P_k et R_k sont proportionnels. Mais comme ces deux polynômes sont unitaires, le coefficient de proportionnalité entre eux est égal à 1, et donc $P_k = R_k$ pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, d'où l'unicité d'une telle base.

En résumé, on vient de montrer que :

il existe une unique base $(P_0, ..., P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de Φ telle que, pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, le polynôme P_k est de degré k, unitaire et vérifie la relation $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En particulier, comme $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, on voit que :

$$\boxed{P_k \text{ est pair si } k \text{ est pair, et impair si } k \text{ est impair.}}$$

(iv) Calculons P_0, P_1, P_2, P_3. Par définition, on sait que P_0 est unitaire de degré 0, et donc $P_0 : x \longmapsto 1$. De plus, on sait aussi que P_1 est unitaire de degré 1 et impair, et donc $P_1 : x \longmapsto x$. En outre, comme P_2 est unitaire de degré 2 et pair, il existe un réel a tel que :

$$P_2 : x \longmapsto x^2 + a.$$

Comme P_2 est vecteur propre de Φ pour la valeur propre $\lambda_2 = (2+2)(2+1) = 12$, on trouve par des calculs simples que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Phi(P_2)(x) &= \left[(x^2-1)(x^2+a)\right]'' \\ &= \left[x^4 + (a-1)x^2 - a\right]'' \\ &= 12x^2 + 2(a-1) \quad = \quad 12(x^2+a). \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par identification que $2(a-1) = 12a$, et donc $a = -\frac{1}{5}$ et $P_2 ; x \longmapsto x^2 - \frac{1}{5}$. Enfin, comme P_3 est unitaire de degré 3 et impair, il existe un réel b tel que :

$$P_3 : x \longmapsto x^3 + bx.$$

Comme P_3 est vecteur propre de Φ pour la valeur propre $\lambda_3 = (3+2)(3+1) = 20$, on trouve par des calculs simples que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Phi(P_3)(x) &= \left[(x^2-1)(x^3+bx)\right]'' \\ &= \left[x^5+(b-1)x^3-bx\right]'' \\ &= 20x^3+6(b-1)x \quad = \quad 20(x^3+bx).\end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit par identification que $6(b-1) = 20b$, et donc $b = -\frac{3}{7}$ et $P_3 : x \longmapsto x^3 - \frac{3}{7}x$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{P_0 : x \longmapsto 1, \quad P_1 : x \longmapsto x, \quad P_2 : x \longmapsto x^2 - \frac{1}{5}, \quad P_3 : x \longmapsto x^3 - \frac{3}{7}x.}$$

(2) **Partie II : étude d'un produit scalaire sur E.**

(a) Montrons que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur E. Pour ce faire, on va montrer que $\langle , \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, et ce en plusieurs étapes :

Première étape : $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique.

En effet, pour tous $P, Q \in E$, on voit que :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t^2)P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1}(1-t^2)Q(t)P(t)dt = \langle Q, P\rangle,$$

d'où il s'ensuit que $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique.

Deuxième étape : $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire.

En effet, pour tous $P, Q, R \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned}\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle &= \int_{-1}^{1}(1-t^2)\left[\lambda P(t) + \mu Q(t)\right] R(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1}\left[\lambda P(t)R(t)(1-t^2) + \mu Q(t)R(t)(1-t^2)\right] dt \\ &= \lambda \int_{-1}^{1}(1-t^2)P(t)R(t)dt + \mu \int_{-1}^{1}(1-t^2)Q(t)R(t)dt \\ &= \lambda\langle P, R\rangle + \mu\langle Q, R\rangle.\end{aligned}$$

ce qui entraine que $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire par symétrie.

Troisième étape : $\langle\ ,\ \rangle$ est définie positive.

En effet, pour tout $P \in E$, on voit que $(1-t^2)P^2(t) \geq 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$, et donc par positivité de l'intégrale, on obtient que :

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1}(1-t^2)P^2(t)dt \geq 0,$$

d'où il s'ensuit que $\langle\ ,\ \rangle$ est positive. De plus, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors on voit par stricte positivité de l'intégrale que $(1-t^2)P^2(t) = 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$ (car la fonction $t \longmapsto (1-t^2)P^2(t)$ est continue et positive sur $[-1, 1]$), et donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in]-1, 1[$. En particulier, le polynôme P admet une infinité de racines, et donc P est le polynôme nul, d'où il s'ensuit que la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ est définie positive.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\langle\ ,\ \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

(b) Montrons que Φ est un endomorphisme symétrique de E. Comme Φ est un endomorphisme de E d'après la question (1)(c) de la partie I, il suffit de montrer que Φ est symétrique. Pour ce faire, on va procéder à des intégrations par parties. Soient $P, Q \in E$ et posons $u(t) = ((t^2-1)P(t))'$ et $v(t) = (1-t^2)Q(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1} ((t^2-1)P(t))''(1-t^2)Q(t)dt \\
&= \int_{-1}^{1} u'(t)v(t)dt \;=\; [u(t)v(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(t)v'(t)dt \\
&= \left[((t^2-1)P(t))'(t^2-1)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} ((t^2-1)P(t))'((1-t^2)Q(t))'dt \\
&= 0-0--\int_{-1}^{1} ((1-t^2)P(t))'((1-t^2)Q(t))'dt \\
&= \int_{-1}^{1} ((1-t^2)P(t))'((1-t^2)Q(t))'dt.
\end{aligned}$$

A présent, posons $u(t) = (1-t^2)P(t)$ et $v(t) = ((1-t^2)Q(t))'$ pour tout $t \in [-1,1]$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$\begin{aligned}
\langle \Phi(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1} ((1-t^2)P(t))'((1-t^2)Q(t))'dt \\
&= \int_{-1}^{1} u'(t)v(t)dt \;=\; [u(t)v(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(t)v'(t)dt \\
&= \left[(1-t^2)P(t)((1-t^2)Q(t))'\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1-t^2)P(t)((1-t^2)Q(t))''dt \\
&= 0-0-\int_{-1}^{1} (1-t^2)P(t)((1-t^2)Q(t))''dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1-t^2)P(t)((t^2-1)Q(t))''dt \\
&= \langle \Phi(Q), P\rangle \;=\; \langle P, \Phi(Q)\rangle.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

(c) Montrons que la base $(P_0, ..., P_n)$ de la question (1)(h)(iii) est orthogonale. Comme Φ est un endomorphisme symétrique de E, on sait d'après le cours que les sous-espaces propres de Φ sont deux à deux orthogonaux. Mais comme la base $(P_0, ..., P_n)$ est constituée de vecteurs propres de Φ pour des valeurs propres distinctes, on en déduit que les polynômes $P_0, ..., P_n$ sont deux à deux orthogonaux, et donc :

$$\boxed{\text{la base } (P_0, ..., P_n) \text{ est orthogonale.}}$$

(d) Soit j un élément de $\{1, ..., n\}$.

(i) Montrons que, pour tout polynôme S de degré $< j$, on a : $\langle S, P_j\rangle = 0$. D'après les questions précédentes, on sait que la famille $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $E = \mathbb{R}_n[x]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, en posant $n = j-1$, on voit que la famille $(P_0, ..., P_{j-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{j-1}[x]$. Dès lors, pour tout $S \in \mathbb{R}_{j-1}[x]$, il existe des réels $a_0, ..., a_{j-1}$ tels que :

$$S = a_0P_0 + ... + a_{j-1}P_{j-1}.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que :

$$\langle S, P_j\rangle = \langle a_0P_0 + ... + a_{j-1}P_{j-1}, P_j\rangle = a_0\langle P_0, P_j\rangle + ... + a_{j-1}\langle P_{j-1}, P_j\rangle.$$

Mais comme la famille $(P_0, ..., P_n)$ est orthogonale d'après la question (2)(c), on a :

$$\langle S, P_j\rangle = a_0 \times 0 + ... + a_{j-1} \times 0 = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall S \in \mathbb{R}_{j-1}[x],\ \ \langle S, P_j\rangle = 0.}$$

(ii) Montrons que P_j ne garde pas un signe constant sur $]-1,1[$. Pour ce faire, on considère le produit scalaire $\langle x \longmapsto 1, P_j\rangle$. Par définition du produit scalaire, des polynômes P_k et d'après la question précédente, on obtient que :

$$\langle x \longmapsto 1, P_j\rangle = \langle P_0, P_j\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2)P_j(t)dt = 0.$$

Dès lors, comme $(1-t^2) > 0$ pour tout $t \in]-1,1[$, on obtient en contraposant la stricte positivité de l'intégrale que :

$$\boxed{P_j \text{ ne peut être de signe constant sur }]-1,1[.}$$

(iii) Montrons que P_j admet au moins une racine d'ordre de multiplicité impair dans $]-1,1[$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que P_j n'admet pas de racine d'ordre de multiplicité impair dans $]-1,1[$. Alors, on voit que le polynôme réel P_j peut se factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ sous la forme suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_j(x) = \theta \prod_{i=1}^{r} (x-\lambda_i)^{2n_i} \prod_{i=1}^{r'} (x-\lambda_i')^{n_i'} \prod_{i=1}^{s} \left(x^2 + p_i x + q_i\right)^{m_i}.$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont des éléments de $]-1,1[$, $\lambda_1', ..., \lambda_{r'}'$ sont des réels extérieurs à $]-1,1[$, où $\theta \in \mathbb{R}^*$ et où $x^2 + p_i x + q_i$ a un discriminant < 0 pour tout $i \in \{1, ..., s\}$. En particulier, chacun des facteurs de cette factorisation est de signe constant sur $]-1,1[$, et donc le polynôme P_j est de signe constant sur $]-1,1[$, ce qui est impossible d'après la question précédente. Par conséquent :

$$\boxed{P_j \text{ admet au moins une racine de multiplicité impaire dans }]-1,1[.}$$

(e) Soit j un élément de $\{1, ..., n\}$, soient $x_1, ..., x_m$ les racines d'ordre de multiplicité impair de P_j dans $]-1,1[$ et soit $S : x \longmapsto (x-x_1)...(x-x_m)$.

(i) Justifions que : $m \leq j$. D'après le cours, on sait que le degré j de P_j est inférieur ou égal au nombre de racines de P_j comptées avec multiplicité. En particulier, le degré j de P_j est supérieur ou égal au nombre de racines de P_j. Mais comme m désigne le nombre de racines de P_j d'ordre de multiplicité impair contenues dans $]-1,1[$, il s'ensuit que :

$$\boxed{m \leq j.}$$

(ii) Montrons que le polynôme $S_m P_j$ garde un signe constant sur $]-1,1[$. D'après le cours, on voit que le polynôme réel P_j peut se factoriser dans $\mathbb{R}[x]$ sous la forme suivante, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P_j(x) = \theta \prod_{i=1}^{m} (x-x_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{m'} (x-x_i')^{2n_i'} \prod_{i=1}^{m''} (x-x_i'')^{n_i''} \prod_{i=1}^{s} \left(x^2 + p_i x + q_i\right)^{m_i}.$$

où $x_1, ..., x_m$ sont les racines d'ordre de multiplicité impair contenues dans $]-1,1[$, où $x_1', ..., x_{m'}'$ sont les racines d'ordre de multiplicité pair contenues dans $]-1,1[$, où $x_1'', ..., x_{m''}''$ sont les racines extérieures à $]-1,1[$, où $\theta \in \mathbb{R}^*$ et où $x^2 + p_i x + q_i$ a un discriminant < 0 pour tout $i \in \{1, ..., s\}$. Par produit avec S_m, on obtient que :

$$S_m(x)P_j(x) = \theta \prod_{i=1}^{m} (x-x_i)^{n_i+1} \prod_{i=1}^{m'} (x-x_i')^{2n_i'} \prod_{i=1}^{m''} (x-x_i'')^{n_i''} \prod_{i=1}^{s} \left(x^2 + p_i x + q_i\right)^{m_i}.$$

Dès lors, on voit que les facteurs des deuxième, troisième et quatrième produits de droite sont de signe constant sur $]-1,1[$. Mais comme n_i est impair pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, il s'ensuit que $n_i + 1$ est pair pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, et donc les facteurs du premier produit de droite sont positifs sur $\mathbb{R}$. En particulier, le premier produit de droite est de signe constant sur $]-1,1[$, et donc :

$$\boxed{S_m P_j \text{ garde un signe constant sur }]-1,1[.}$$

(iii) Montrons par l'absurde que $m = j$. Pour ce faire, supposons que $m < j$. D'après la question précédente, on sait que le polynôme $S_m P_j$ est de signe constant sur $]-1,1[$. Comme $S_m P_j$ est continu et non identiquement nul sur $]-1,1[$, il s'ensuit par stricte positivité de l'intégrale que :

$$\langle S_m, P_j \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) S_m(t) P_j(t) dt$$

est du signe de $S_m P_j$, c'est-à-dire que $\langle S_m, P_j \rangle > 0$ si $S_m P_j \geq 0$ sur $]-1,1[$, et $\langle S_m, P_j \rangle < 0$ si $S_m P_j \leq 0$ sur $]-1,1[$. Dans tous les cas, on voit que $\langle S_m, P_j \rangle \neq 0$. Par ailleurs, comme $m < j$, on voit que $\deg(S_m) = m < j$, et donc $\langle S_m, P_j \rangle = 0$ d'après la question $(2)(d)(i)$, d'où contradiction. Par conséquent :

$$\boxed{m = j.}$$

(iv) Montrons que P_j admet j racines simples réelles distinctes toutes situées dans $]-1,1[$. D'après la question précédente, on sait que $m = j$, ce qui signifie que le degré de P_j est égal au nombre de racines d'ordre de multiplicité impair situées dans $]-1,1[$. Mais comme le degré de P_j est supérieur ou égal au nombre de racines de P_j comptées avec multiplicité, il s'ensuit que toutes les racines de P_j sont situées dans $]-1,1[$ et d'ordre de multiplicité égal à 1. En particulier, P_j admet exactement j racines, qui sont de plus simples et situées dans $]-1,1[$. Par conséquent :

$$\boxed{P_j \text{ admet } j \text{ racines simples toutes situées dans }]-1,1[.}$$