Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 18 : 9 février 2026)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les variables à densité, ainsi que sur les lois continues classiques, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Variables aléatoires à densité :**
Définition et propriétés des variables aléatoires.
"La somme, le produit, le minimum et le maximum d'un nombre fini de variables aléatoires est une variable aléatoire".
Définition et propriétés de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X.
Définition et propriétés d'un couple de variables aléatoires et de sa loi conjointe.
Définition et propriétés de l'indépendance de deux variables aléatoires.
Définition et propriétés d'un vecteur aléatoire et de sa loi conjointe.
Définition et propriétés de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires.
Lemme des coalitions - Suite de variables aléatoires indépendantes.
Définition d'une densité de probabilité, d'une variable à densité X et d'une densité de X.
"Si X est une variable à densité, alors $P([X = x]) = 0$ pour tout réel x".
Expression intégrale de $F_X(x)$ et de $P([a \leq X \leq b])$ à l'aide d'une densité de X.
"f est une densité d'une variable aléatoire X ssi f est une densité de probabilité".
Détermination de la loi d'une fonction $\varphi(X)$ d'une variable à densité X.
Définition de l'espérance et des moments (sous réserve d'existence) d'une variable à densité.
Propriétés de l'espérance : transfert, existence par domination, linéarité, positivité, croissance.
Définition (sous réserve d'existence) de la variance et de l'écart-type de X.
"La variance d'une variable à densité X est toujours > 0".
Formule de Koenig-Huygens et formule "$V(aX + b) = a^2 V(X)$".
Définition d'une variable à densité centrée, et d'une variable à densité centrée réduite.
Densité d'une somme de 2 variables aléatoires indépendantes à densité - Produit de convolution.
"Si X, Y sont indépendantes, à densité et ont une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$".
"Si X, Y sont indépendantes, à densité et ont une variance, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$".
Généralisation au cas de n variables aléatoires indépendantes à densité.

(2) **Lois continues classiques:**
Définition et propriétés de la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$:
Calcul de la fonction de répartition (*), de l'espérance (*) et de la variance (*).
Définition et propriétés de la loi exponentielle de paramètre λ :
Calcul de la fonction de répartition (*), de l'espérance (*) et de la variance (*).
Définition d'une variable aléatoire suivant une loi sans mémoire.
"Si X suit une loi sans mémoire, alors X est nulle p.s. ou suit une loi exponentielle".
Loi gamma de paramètre ν (définition, densité, espérance (*), variance (*), stabilité par addition).
Définition et propriétés de base de la loi normale centrée réduite.
Définition de la loi normale de paramètres m, σ^2 (densité, espérance, variance).
Propriété de changement d'échelle - Stabilité par addition.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$.

(1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
(2) Donner une densité de X, puis montrer que X admet des moments de tous ordres.
(3) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$ et $f(t) = te^{-\frac{t^2}{2}}$ si $t \geq 0$.

(1) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X, et donner sa fonction de répartition.
(2) Justifier que X admet des moments de tous ordres, et calculer l'espérance de X.
(3) Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 3. Soient $U_1, ..., U_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes, définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = \max\{U_1, ..., U_n\}$. Déterminer une densité de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 4. Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$, et en déduire l'espérance et la variance de Y_n.