TRAVAUX DIRIGÉS : VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ - LOIS CONTINUES CLASSIQUES

1. Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ si $x > 1$ et par $f(x) = 0$ sinon.

(1) A faire! On trouve alors que $F(x) = 0$ si $x \leq 1$ et $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ si $x > 1$.

(2) (a) Pas d'espérance ni de variance pour les X_i.
   (b) La loi de Y est donnée par $F_Y(x) = 0$ si $x < 1$ et $F_Y(x) = 1 - \dfrac{1}{x^n}$ si $x \geq 1$.
   (c) Existence de l'espérance à traiter. On trouve que $E(Y) = \dfrac{1}{n-1}$.
   (d) La loi de Z est donnée par $F_Z(x) = 0$ si $x < 1$ et $F_Z(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^n$ si $x \geq 1$.
   (e) Pas d'espérance ni de variance pour Z (passer par l'équivalence).

Exercice 2.

(1) A faire par IPP.
(2) Utiliser la croissance de l'intégrale et le fait que $xP(X \geq x) = x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} xf(t)dt.$
(3) Procéder par encadrement.
(4) Conclure avec les questions $(1), (2), (3)$.

Exercice 3.

(1) Vérifier que la fonction F est croissante, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis que F tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Par dérivation, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$
(2) A faire! On trouve que $E(X) = 0$ par imparité de l'intégrande.
(3) On trouve que :
$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} .$$
(4) A faire! On trouve que $f_Y(x) = \dfrac{1}{2}$ si $x \in]-1,1[$ et $f_Y(x) = 0$ sinon.
(5) Existence à établir! On trouve que $E(Y) = 0$.

Exercice 4.

(1) (a) On trouve que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et de plus : $F_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.
   (b) Par convolution, on trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_{Z_1+Z_2}(x) = \frac{1}{4}(1+|x|)e^{-|x|}.$$
(2) (a) On trouve que :
$$F_{-Y}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_{-Y}(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} .$$
   (b) Par convolution, on trouve que $f_Z(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de plus $E(Z) = 0$.
   (c) A vérifier par le calcul. On trouve que $E(T) = \dfrac{3}{2}$ et $V(T) = \dfrac{7}{4}$.

Exercice 5.

(1) A faire!
(2) On trouve que $F_X(x) = 1 - e^{-x^2/2}$ si $x \geq 0$ et $F_X(x) = 0$ sinon.
(3) Par transfert et par négligeabilité.
(4) On trouve que $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $V(X) = 2 - \dfrac{\pi}{2}$.
(5) On trouve que $F_Y(x) = 1 - e^{-x/2}$ si $x \geq 0$ et $F_Y(x) = 0$ sinon.

Exercice 6. Vérifier les trois points pour une densité. Pour vérifier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = 1$, calculer tout d'abord $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ en utilisant la linéarité de l'intégrale, la relation de Chasles et un changement de variable affine, puis conclure par un double passage à la limite.

Exercice 7.
(1) On trouve que $a = \dfrac{1}{\pi}$.
(2) Vérifier que X n'admet pas d'espérance.
(3) Montrer que les fonctions de répartition de X et $\dfrac{1}{X}$ sont égales.

Exercice 8.
(1) A faire!
(2) On trouve que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F_X(x) = \dfrac{2}{\pi}\arctan(e^x)$.
(3) Par transfert et par équivalence avec une valeur de la fonction Gamma d'Euler. De plus, on trouve que $E(X) = 0$ par imparité.
(4) (a) On commence par trouver que :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{\pi}\arctan(x) & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Montrer ainsi que Y est une variable à densité et que, de plus :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

(b) La variable aléatoire Y n'admet pas d'espérance.
(5) (a) On trouve que :

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \left(\dfrac{2}{\pi}\arctan(x)\right)^n & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

(b) Pour tout $x > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = 1 - e^{-2x/\pi}$.

2. Lois continues classiques

Exercice 9.
(1) On trouve que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([3,5])$.
(2) On obtient que :

$$f_Y(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

(3) On trouve par convolution que :

$$f_{\ln(T)}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad \text{et} \quad f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Exercice 10.
(1) On trouve que $f_X(x) = n(1-x)^{n-1}$ si $x \in [0,1]$ et $f_X(x) = 0$ sinon. De plus :

$$E(X) = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

(2) On trouve que $f_X(x) = nx^{n-1}$ si $x \in [0,1]$ et $f_X(x) = 0$ sinon. De plus :

$$E(X) = \frac{n}{n+1} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Exercice 11. La variable aléatoire Y suit la loi de Cauchy, et elle n'admet ni espérance, ni variance.

Exercice 12. Soient X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes à densité, qui suivent toutes la loi $\mathcal{U}(]0,1])$.

(1) On trouve que $-\ln(X) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(2) A l'aide de la stabilité par addition de la loi gamma, on obtient que :

$$F_{\ln(X)+\ln(Y)+\ln(Z)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

(3) On trouve que : $f_{XYZ}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln(x))^2 & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 13. On trouve que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_-$, $f_Y(x) = e^{-x^2}$ si $x \leq 0$ et $f_Y(x) = 0$ sinon. De plus :

$$E(Y) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 14. On trouve que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$, $E(Y_n) = \dfrac{1}{n\lambda}$ et $V(Y_n) = \dfrac{1}{n^2\lambda^2}$.

Exercice 15. Par convolution, on trouve dans le premier cas que :

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2e^{-x} - 2e^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Dans le deuxième cas, on obtient que :

$$f_{X+Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ e^{1-x} - e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Exercice 16.

(1) On obtient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

(2) A faire!

(3) Par récurrence, on trouve que $m_k(X) = \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 17. On trouve que $4X - 3Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 25)$.

Exercice 18.

(1) Par transfert et par négligeabilité.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve que $E(X^{n+2}) = (n+1)E(X^n)$.

(3) Procéder par récurrence sur n.

Exercice 19. Calculer $F_Z(x)$ à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à $[Z \leq x]$ et au système complet d'événements $([Y = k])_{0 \leq k \leq n}$. Après calculs et par dérivation, on trouve que :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{e^{-x}(1+e^{-x})^{n-1}(1+(n+1)e^{-x})}{2^n} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

Exercice 20. On trouve que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q)$.

Exercice 21.

(1) Après calculs, on trouve que $f_{Y_k}(x) = k(-1)^{k+1}x^{k-1}$ si $x \in [-1, 0]$ et $f_{Y_k}(x) = 0$ sinon.

(2) A l'aide de la question précédente, on trouve que $P([X_n \geq X_1] \cap ... \cap [X_n \geq X_{n-1}]) = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 22.

(1) Utiliser l'existence de l'espérance par domination.
(2) La réciproque est fausse.

Exercice 23.

(1) Vérifier que l'ensemble $[Y = k] = [k \leq X < k+1]$ est un événement pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis montrer que $P(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})e^{-k\lambda}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$.
(2) Remarquer tout d'abord que $Z(\Omega) \subset [0, 1[$, puis vérifier que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$[Z \leq x] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k \leq X \leq k + x].$$

En déduire que : $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} & \text{si} \quad x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.
(3) Calculer $P([Y = k] \cap [Z \leq x])$ et en déduire que Y et Z sont indépendantes.

Exercice 24.

(1) (a) On trouve que $Z \hookrightarrow \gamma(\nu)$.
  (b) En particulier, on obtient que $E(X) = r$ et $V(X) = 2r$.
(2) (a) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
  (b) Partant de la relation $P([X_{2n} > 2\lambda]) = \displaystyle\int_{2\lambda}^{+\infty} \frac{t^{n-1}e^{-t/2}}{\Gamma(n)2^n} dt$, montrer à l'aide d'un changement de variable et de la question de (2)(*a*) que :

$$P([X_{2n} > 2\lambda]) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

  et conclure!
  (c) On peut utiliser la fonction Python suivante :

```
def exo(n,x):
    s=0
    y=x/2
    p=np.exp(-y)
    for i in range(n)
        s=s+p
        p=(y*p)/(i+1)
    return s
```

(3) (a) On trouve que $X_1^2 \hookrightarrow \chi^2(1)$.
  (b) Avec la question (1)(*a*) et la stabilité par addition, on trouve que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \hookrightarrow \chi^2(n)$.
  (c) Si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes normales centrées réduites, alors T_r et $\sum_{i=1}^{r} X_i^2$ (resp. T_s et $\sum_{i=1}^{s} X_i^2$) suivent la même loi. Comme $r < s$, on peut vérifier que $P(T_s \leq x) \leq P(T_r \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, la courbe représentative de F_{T_r} est située au dessus de celle de F_{T_s}.

Exercice 25. On trouve que : $f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-(\ln(x))^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Exercice 26.

(1) On vérifie que $P(R = -1) = P(R = 1) = \dfrac{1}{2}$.
(2) Etablir tout d'abord que Y suit la loi normale centrée réduite. En déduire avec la formule de Koenig-Huygens et le lemme des coalitions que $\text{cov}(N, Y) = 0$.
(3) Les variables aléatoires N et Y ne sont pas indépendantes. Pour le voir, on peut raisonner par l'absurde et supposer qu'elles le sont. On peut alors remarquer que $|N| = |Y|$ et obtenir une contradiction avec le lemme des coalitions.

3. Exercices supplémentaires

Exercice 27.

(1) A faire!
(2) On trouve que $F_X(x) = 1 - (2x+1)e^{-2x}$ si $x > 0$ et $F_X(x) = 0$ sinon.
(3) Procéder par IPP ou changement de variable. On trouve que $E(X) = 1$ et $V(X) = \frac{1}{2}$.

Exercice 28.

(1) Utiliser le changement de variable donné.
(2) On trouve que $F_X(x) = (1 - e^{-x/2})^3$ si $x > 0$ et $F_X(x) = 0$ sinon.
(3) X admet une espérance et une variance (utiliser le transfert et la négligeabilité).
(4) (a) On trouve que $F_{Y_n}(x) = (1 - e^{-x/2})^{3n}$ si $x > 0$ et $F_{Y_n}(x) = 0$.
 (b) Y_n admet une espérance (utiliser l'existence de l'espérance par domination ou la négligeabilité).

Exercice 29. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{4\ln(t)}{t^3} & \text{si} \quad t \geq 1 \end{cases}$.

(1) Procéder par IPP.
(2) On trouve que $F_X(x) = 1 - \frac{1}{x^2}(1 + 2\ln(x))$ si $x > 1$ et $F_X(x) = 0$ sinon.
(3) Procéder par IPP. On trouve que $E(X) = 4$.
(4) De nouveau par IPP, on peut vérifier que X n'admet pas de variance.

Exercice 30. On trouve que :

$$(1)\ a = 2 \quad , \quad (2)\ a = \frac{1}{2e\sqrt{\pi}} \quad , \quad (3)\ a = \frac{2}{3}.$$

Exercice 31.

(1) A faire!
(2) On trouve que $F_X(x) = 0$ si $x < 0$, $F_X(x) = 1 - (1-x)^{4/3}$ si $x \in [0,1]$ et $F_X(x) = 1$ si $x > 1$.
(3) On trouve que $E(X) = \frac{3}{7}$ et $P\left(\frac{7}{8} \leq X\right) = \frac{1}{16}$.
(4) (a) On trouve que : $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - (1-x)^{4n/3} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.
 (b) Remarquer que Y_n est bornée, et donc elle admet une espérance. De plus : $E(Y_n) = \frac{3}{4n+3}$.

Exercice 32.

(1) On trouve que $\alpha = -4$.
(2) Par transfert, on trouve que $E(X^n) = \frac{4}{(n+2)^2}$, et donc $E(X) = \frac{4}{9}$ et $V(X) = \frac{17}{324}$.

Exercice 33.

(1) A faire!
(2) Vérifier que $0 \leq e^{-t^2/2} \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 2$. Par croissance de l'intégrale, on peut en déduire que $0 \leq x^n f(x) \leq x^n e^{-x}$ pour tout $x \geq 2$, et conclure par encadrement.
(3) Procéder par IPP.
(4) On trouve que $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ et $V(X) = 1 - \frac{\pi}{8}$.

Exercice 34.

(1) On trouve que $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -\ln(2) \\ e^x - \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [-\ln(2), 0] \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \in [0, \ln(2)] \\ 1 & \text{si} \quad x > \ln(2) \end{cases}$.
(2) On obtient que : $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 - 2e^{-x} & \text{si} \quad x \in [0, \ln(2)] \\ 1 & \text{si} \quad x > \ln(2) \end{cases}$.

(3) A faire! On trouve que : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2e^{-x} & \text{si} \quad x \in [0, \ln(2)] \\ 0 & \text{si} \quad x > \ln(2) \end{cases}$.

Exercice 35.

(1) On trouve que F est la fonction de répartition d'une variable à densité si et seulement si $a = 1$ et $b \geq -2$.

(2) Sous ces conditions, on trouve que $f(x) = \dfrac{b+2}{(b+x)^2}$ si $x \geq 2$ et $f(x) = 0$ sinon. X n'a pas d'espérance.

Exercice 36. Utiliser le changement de variable $u = a - x$. On trouve que $E(X) = \dfrac{a}{2}$.

Exercice 37.

(1) On trouve que $P(Y = k) = F(k+1) - F(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(2) Utiliser l'encadrement $Y \leq X < Y + 1$ et l'existence de l'espérance par domination.

(3) Utiliser la croissance de l'espérance.

Exercice 38.

(1) On trouve que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

(2) On obtient que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1/2])$ et $E(U) = \dfrac{1}{4}$.

(3) On trouve que $V \hookrightarrow \mathcal{U}([1/2,1])$ et $E(U) = \dfrac{3}{4}$.

(4) Montrer que $U + V$ est constante égale à 1 presque sûrement.

Exercice 39.

(1) A faire!

(2) (a) On trouve que $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$.

(b) Par convolution, on obtient que : $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -2 \\ 1 + x + \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \in [-2,-1[\\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \in [-1,1[\\ 1 - x + \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ 0 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

Exercice 40. On trouve que $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{2\sqrt{x}}{3} & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{3} & \text{si} \quad x \in [1,4[\\ 1 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$.

Exercice 41. On trouve que $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{-1}{2\ln(x)} & \text{si} \quad x \in]0, e^{-1}[\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x \in [e^{-1}, e[\\ 1 - \dfrac{1}{2\ln(x)} & \text{si} \quad x \geq e \end{cases}$.

Exercice 42.

(1) On trouve que : $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{\lambda x^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

(2) On obtient que $f_{X^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$. et $f_{X^3}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\lambda}{3x^{2/3}} e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve que $E(X^n) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$.

(4) Utiliser la σ-additivité de la probabilité et le fait que $\tan(X) > 0$ si et seulement si $X \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}[$.
On trouve alors que $P([\tan(X) > 0]) = \dfrac{1 - e^{-\lambda\pi/2}}{1 - e^{-\lambda\pi}}$. De plus, par transfert, on a $E(e^{-X}) = \dfrac{\lambda}{\lambda + 1}$.

Exercice 43. On trouve que : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$, $E(Y) = 1$, $V(Y) = 2$.

Exercice 44.

(1) On trouve que : $f_{-tX}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}e^{x/t} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

(2) Utiliser le lemme des coalitions et le produit de convolution.

(3) On trouve que $Z(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$P(Z \leq t) = P(Y - tX \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} h(x)dx.$$

Après calculs, on trouve que :

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \dfrac{t}{t+1} & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}.$$

(4) On trouve que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 45.

(1) (a) A faire en posant $u = \ln(x) - 1$

(b) On trouve que $F_X(x) = \Phi(\ln(x) - 1)$ si $x > 0$ et $F_X(x) = 0$ sinon.

(c) On obtient que $E(X) = e^{3/2}$ et $V(X) = e^4 - e^3$.

(2) (a) On trouve que : $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-(\ln(x))^2/2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

(b) On obtient que $E(Y) = e^{1/2}$ et $V(X) = e^2 - e$.

Exercice 46.

(1) Vérifier que f est une densité si et seulement si $\lambda = \dfrac{\alpha}{a}$.

(2) (a) On trouve que : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq x_0 + a \\ 1 - \dfrac{a^\alpha}{(x - x_0)^\alpha} & \text{si} \quad x > x_0 + a \end{cases}$.

(b) Vérifier que X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas :

$$E(X) = x_0 + \frac{\alpha a}{\alpha - 1}.$$

De plus, on peut montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$, et dans ce cas :

$$V(X) = \frac{\alpha a^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}.$$

(c) On trouve que Z suit la loi de Pareto de paramètres :

$$\lambda = \frac{\mu}{\ln(\gamma)\beta}, \quad a = \beta, \quad x_0 = 0, \quad \alpha = \frac{\mu}{\ln(\gamma)}.$$

Exercice 47.

(1) La fonction η est croissante sur $]0, \frac{1}{e}[$.

(2) Comme f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, les seules impropretés de $H(X)$ sont $+\infty$ et $-\infty$. Comme $x \longmapsto x^2 f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, on trouve que :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

et donc $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Comme $y^{1/4}\ln(y)$ tend vers 0 quand y tend vers 0 par croissances comparées, on obtient par composition des limites que :

$$f(x)^{1/4}\ln(f(x)) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En outre, comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, on trouve que :

$$f(x)^{3/4} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{9/8}}\right).$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$f(x)\ln(f(x)) = f(x)^{3/4}f(x)^{1/4}\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{9/8}}\right),$$

et on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ln(f(x))dx$ converge par négligeabilité. Idem pour la borne $-\infty$.

(3) Par croissances comparées, on peut montrer que :

$$x^2 g_{\mu,\sigma}(x) = \frac{x^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui entraine que $x \longmapsto x^2 g_{\mu,\sigma}(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et donc $Y_{\mu,\sigma}$ appartient à $\mathcal{E}$. De plus, on trouve après calculs que :

$$H(Y_{\mu,\sigma}) = \frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right).$$

(4) (a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{g_{\mu,\sigma}(x)}\right) = f(x)\ln(f(x)) + f(x)\ln\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right) + \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}f(x).$$

Comme X admet un moment d'ordre 2, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}f(x)dx$ converge par transfert. En particulier, comme f est une densité, on obtient d'après la question (2) et par linéarité de l'intégrale que $K_{\mu,\sigma}(X)$ converge bien.

(b) Par concavité de ln, on voit que $\ln(a) \geq a-1$ pour tout $a > 0$, d'où la première inégalité. Pour la deuxième, on part du fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x)\ln\left(\frac{f(x)}{g_{\mu,\sigma}(x)}\right) = -f(x)\ln\left(\frac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)}\right) \geq f(x)\left(1 - \frac{g_{\mu,\sigma}(x)}{f(x)}\right) = f(x) - g_{\mu,\sigma}(x).$$

Comme f et $g_{\mu,\sigma}$ sont des densités, on obtient que $K_{\mu,\sigma}(X) \geq 0$ par croissance de l'intégrale.

(c) D'après la question précédente, on voit que :

$$K_{\mu,\sigma}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(f(x)\right)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(g_{\mu,\sigma}(x)\right)dx \geq 0.$$

Dès lors, ceci entraine en prenant $\mu = m$ et $\sigma = s$ que :

$$H(X) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\frac{(x-m)^2}{2s^2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}s\right)\right)dx$$

Par transfert, on en déduit que :

$$H(X) \leq \frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}s\right) = H(Y_{m,s}).$$

Exercice 48.

(1) (a) Par convolution, on trouve que :

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x}) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(b) Procéder par récurrence en utilisant le produit de convolution et le lemme des coalitions.

(c) On trouve que : $\displaystyle E(Z_n) = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\alpha}$.

(d) On obtient que $\displaystyle V(Z_n) = \frac{1}{\alpha^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$, qui est la somme partielle d'une série de Riemann convergente.

(2) (a) Avec la question (1)(b), on trouve que :

$$H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ (1-e^{-n\alpha x})^n & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(b) Avec la question (2)(a), on obtient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Avec les questions (1)(c) et (1)(d), on trouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(U_n) = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V(U_n) = 0$.

Exercice 49.

(1) Par croissance de l'intégrale, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$\sqrt{2\pi}\,(1 - \Phi(x)) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{t}{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

Pour la deuxième inégalité, on étudiera la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{2\pi}\,(1 - \Phi(x)) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2}$.

(2) Utiliser la question (1) pour montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} P_{[X \geq x]}\left(X \geq x + \frac{1}{x}\right) = e^{-1}$.

Exercice 50. En utilisant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$, vérifier tout d'abord à l'aide du théorème sur la projection orthogonale que :

$$Y = \frac{(aX_1 - X_2)^2}{1 + a^2}.$$

Déterminer ensuite la loi de $aX_1 - X_2$, et en déduire que $E(Y) = 1$.