Lycée Clemenceau **Samedi 14 février 2026**
ECG 2 **Durée : 4 heures**

Devoir Surveillé de Mathématiques $n^o 6$

Remarques : *Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits. Tous les étudiants auront le choix entre deux sujets, un de type EDHEC et un autre de type HEC-ESCP Maths I. Ils indiqueront lisiblement sur leur première copie le sujet qu'ils auront choisi, et ne pourront traiter que les questions de ce sujet. Si un(e) étudiant(e) traite une question du sujet qu'il/elle n'a pas indiqué en début de copie, cette question ne sera pas corrigée.*

1. Sujet type EDHEC

Exercice 1. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi normale centrée réduite (de densité notée φ et de fonction de répartition notée Φ). On pose $Z = \max\{X, Y\}$ et l'on se propose de déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.

(1) (a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité.
(b) Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x)$.

(2) (a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
(b) En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
(c) Vérifier que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(d) En déduire à l'aide d'une intégration par parties que :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$
(e) Montrer de même l'égalité suivante :
$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt.$$
(f) En déduire que Z admet une espérance et donner sa valeur.

(3) (a) Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.
(b) Calculer $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

(4) Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, réalise et affiche n simulations de la variable aléatoire Z.

Exercice 2. Soit a un réel > 0. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$. On pose $Z = |X - Y|$, et on admet que $-Y, X - Y, Z$ sont des variables à densité définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) (a) Déterminer une densité de $-Y$.
(b) En déduire que $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si} \quad x \in [-a, a] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [-a, a] \end{cases}.$$

(2) On désigne par G la fonction de répartition de $X - Y$.
(a) Exprimer la fonction de répartition H de Z en fonction de G.
(b) En déduire qu'une densité de Z est donnée par la fonction h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si} \quad x \in [0, a] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, a] \end{cases}.$$

(3) Montrer que Z admet une espérance et une variance et les calculer.

(4) A l'aide de la fonction `rd.random`, écrire une fonction en Python qui, étant donnés un réel $a > 0$ et deux entiers $n, m \geq 1$, réalise et affiche n simulations de la variable aléatoire Z, puis affiche l'histogramme correspondant pour une subdivision de l'intervalle $[0, a]$ en m classes de même amplitude.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $E = \mathbb{R}_{2n+1}[x]$. Pour tout $k \in \{0, ..., 2n+1\}$, on admet que l'expression $x \longmapsto x^{2n+1} \times \frac{1}{x^k}$ désigne le polynôme $x \longmapsto x^{2n+1-k}$. On désigne par Id l'endomorphisme identique de E et par f l'application qui, à tout élément P de E, associe le polynôme $f(P) : x \longmapsto x^{2n+1} P\left(\frac{1}{x}\right)$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
(2) (a) Vérifier que $f \circ f = \mathrm{Id}$.
(b) En déduire les deux valeurs propres possibles de f.
(3) Soit $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k$ un élément quelconque de $\ker(f - \mathrm{Id})$.
(a) Montrer que les a_k $(0 \leq k \leq 2n+1)$ sont solutions du système : $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $a_k = a_{2n+1-k}$.
(b) En déduire une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$.
(4) Déterminer de la même façon une base de $\ker(f + \mathrm{Id})$.
(5) Pour tout $P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{2n+1} a_k x^k \in E$ et tout $Q : x \longmapsto \sum_{k=0}^{2n+1} b_k x^k \in E$, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2n+1} a_k b_k.$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
(b) Etablir que f est un endomorphisme symétrique de E.
(c) En déduire que $\ker(f + \mathrm{Id})$ et $\ker(f - \mathrm{Id})$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Problème 1. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, lequel est défini pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et tout $u' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ par $\langle u, u' \rangle = xx' + yy' + zz'$. La norme du vecteur u est définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on rappelle que cette base est orthonormée pour le produit scalaire $\langle , \rangle$. Le but de ce problème est de montrer que l'on peut trouver une famille $\mathcal{F} = (e_1, ..., e_n)$ de cardinal maximal, formée de n vecteurs unitaires deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ ainsi qu'un réel α tels que, pour tout couple d'entiers (i, j) vérifiant $1 \leq i < j \leq n$, on ait : $\langle u_i, u_j \rangle = \alpha$. La partie 1 permet d'obtenir un résultat d'algèbre linéaire utile pour la suite, la partie 2 étudie les propriétés d'une telle famille et la partie 3 propose la construction d'une famille solution du problème pour $n = 4$ (cette valeur est d'ailleurs la valeur maximale possible de n mais ce résultat ne sera pas démontré ici).

<u>**Partie 1 :**</u> Soit n est un entier ≥ 2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on désigne par M_a la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1, les autres étant égaux à a. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

(1) (a) La matrice J est-elle diagonalisable? Justifier.
(b) Calculer J^2 et en déduire les deux valeurs propres de J.
(2) (a) Utiliser une base de vecteurs propres de J pour calculer les valeurs propres de M_a.
(b) En déduire que M_a est inversible si et seulement si : $a \neq 1$ et $a \neq -\frac{1}{n-1}$.
(3) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés un réel a et un entier $n \geq 2$, affiche la matrice M_a puis détermine si cette matrice est inversible ou pas.

<u>**Partie 2 :**</u> On suppose que l'on a trouvé une famille $(u_1, ..., u_n)$ formée de n vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ et un réel α solutions du problème.

(1) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0$. Montrer que :

$$M_\alpha \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0.$$

(2) En déduire la valeur maximale de n lorsque $\alpha \neq 1$ et $\neq -\frac{1}{n-1}$.
(3) Etude du cas $\alpha = 1$.
(a) Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour u_i et u_j avec $i \neq j$. A quelle condition a-t-on égalité?
(b) En déduire que $n = 1$.
(4) Dans cette question, on admet qu'il existe une famille (u_1, u_2, u_3, u_4) formée de 4 vecteurs unitaires et deux à deux distincts de $\mathbb{R}^3$ solution du problème.
(a) Donner la valeur de α.
(b) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Calculer les coordonnées de u_4 dans cette base.

<u>**Partie 3 :**</u> On se propose de trouver des familles solutions du problème dans certains cas.

(1) Donner une famille solution du problème posé pour $n = 3$ et $\alpha = 0$.
(2) On pose $v_1 = e_1$, $v_2 = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$ et $v_3 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$.
(a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est solution du problème posé pour $\alpha = -\frac{1}{2}$.

(b) Déterminer deux réels λ, μ tels que la famille $(e_3, \lambda v_1 + \mu e_3, \lambda v_2 + \mu e_3, \lambda v_3 + \mu e_3)$ soit solution du problème posé pour $n = 4$.

(3) Ecrire une fonction en Python qui, étant donnés 3 vecteurs unitaires et distincts u, v, w de $\mathbb{R}^3$, détermine si (u, v, w) est solution du problème ou pas, et affiche la valeur de α dans ce cas.

2. Sujet type HEC-ESCP Maths I

Problème 2. Dans ce problème, on s'intéresse à des opérations de transport dans des situations déterministes ou aléatoires, modélisées de manière discrète ou continue, dans le but de trouver un programme de transport optimal dont le coût serait le plus faible possible. Les parties I, II et III sont largement indépendantes. Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Sous réserve d'existence, on note $E(Z)$ l'espérance d'une variable aléatoire Z. Enfin, pour tout entier $N \geq 1$, on note $\mathcal{E}_N$ l'ensemble des applications de $[\![1, N]\!]$ dans $[\![1, N]\!]$.

Préliminaire

(1) Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = \lfloor pX(\omega) \rfloor$, où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la fonction partie entière.
  (a) Vérifier que Y est une variable aléatoire discrète. Calculer $P([Y = n])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  (b) Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
  (c) Établir les inégalités strictes : $0 < E(Y) < p$.

(2) (a) Pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx$ est convergente (on pourra utiliser le changement de variable $u = -\ln x$ après avoir justifié précisément sa validité).
  (b) Établir pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{N}^2$, l'égalité : $\displaystyle\int_0^1 x^r (\ln x)^s dx = \frac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}$.

Partie I. Transport dans une situation aléatoire.

On dit que la loi d'une variable aléatoire Y est *accessible* depuis une variable aléatoire X, s'il existe une application $T : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que la variable aléatoire $T(X)$ suit la même loi que Y. L'application T est alors appelée une *fonction de transport* de la variable aléatoire X vers la loi de Y. On associe à T un *coût de transport* $C(T)$ défini, sous réserve d'existence, par $C(T) = E\big((X - T(X))^2\big)$. Dans toute cette partie, X désigne une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) =]0, 1[$ et suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, c'est-à-dire admettant pour densité la fonction f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

(1) Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$. Pour tout réel $a \in [0, 1 - p]$, on note dans cette question T_a la fonction définie sur $]0, 1[$ par :

$$T_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, a + p[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  (a) Calculer la probabilité $P([T_a(X) = 1])$ et en déduire que les fonctions T_a sont des fonctions de transport de X vers une même loi que l'on précisera.
  (b) Vérifier que le coût de transport $C(T_a)$ est égal à $\frac{1}{3} + p(1 - p) - 2ap$.
  (c) En déduire la valeur de a qui minimise $C(T_a)$ et exprimer le coût minimal correspondant en fonction de p.

(2) Soit T_1 et T_2 les applications définies sur $]0, 1[$ par $T_1(x) = -\ln x$ et $T_2(x) = -\ln(1 - x)$.
  (a) Vérifier que T_1 et T_2 sont des fonctions de transport de X vers une loi que l'on précisera.
  (b) En utilisant les résultats du préliminaire, comparer les coûts de transport $C(T_1)$ et $C(T_2)$.
  (c) A l'aide du préliminaire, montrer que toutes les lois géométriques sont accessibles depuis X.

(3) Dans cette question, Y désigne une variable aléatoire admettant une densité f_Y continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$.
  (a) Justifier que la fonction de répartition F_Y de Y réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.
  (b) On note F_Y^{-1} la bijection réciproque de F_Y. Montrer que F_Y^{-1} est une fonction de transport de la variable aléatoire X vers la loi de Y.

(4) *Cas particulier: on suppose que Y suit la loi normale centrée réduite.* On note F_Y la fonction de répartition de Y et φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ de Y.
  (a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} y\, F_Y(y)\, \varphi(y) dy$, puis montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y\, F_Y(y)\, \varphi(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

  (b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \big(y - F_Y(y)\big)^2 \varphi(y) dy$ est convergente et la calculer.

(c) En déduire que le coût de transport $C(F_Y^{-1})$ est égal à $\frac{4}{3} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Partie II. Transport optimal dans une situation déterministe.
Dans toute cette partie, N désigne un entier supérieur ou égal à 2. On considère N réels $d_1, d_2, \dots, d_N$ (appelés points de départ) et N réels $a_1, a_2, \dots, a_N$ (appelés points d'arrivée) vérifiant $d_1 < d_2 < \cdots < d_N$ et $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$. On pose $D = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$.

(1) (a) Montrer que pour tout couple $(k, l) \in [\![1, N]\!]^2$, on a: $d_k a_k \geq d_k a_l + d_l a_k - d_l a_l$.
(b) En déduire à l'aide d'une double sommation que, pour tout N-uplet $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathbb{R}_+^N$ tel que $\sum_{k=1}^N p_k = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{N} p_k d_k a_k \geq \left(\sum_{k=1}^{N} p_k d_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{N} p_k a_k\right) \qquad (1)$$

(2) Soit $t \in \mathcal{E}_N$. On réordonne la liste $\big(t(1), t(2), \dots, t(N)\big)$ selon les valeurs croissantes et on note alors $\big(\widehat{t}(1), \widehat{t}(2), \dots, \widehat{t}(N)\big)$ la liste ordonnée obtenue. On a donc $\widehat{t}(1) \leq \widehat{t}(2) \leq \cdots \leq \widehat{t}(N)$.
(a) Justifier pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, l'inégalité : $\sum_{k=n}^N a_{t(k)} \leq \sum_{k=n}^N a_{\widehat{t}(k)}$.
(b) On pose $d_0 = 0$. Justifier l'égalité : $\sum_{n=1}^N d_n a_{t(n)} = \sum_{n=1}^N \Big((d_n - d_{n-1}) \sum_{k=n}^N a_{t(k)}\Big)$.
(c) Établir l'inégalité : $\sum_{n=1}^N d_n a_{t(n)} \leq \sum_{n=1}^N d_n a_{\widehat{t}(n)}$. (2)

On appelle *programme de transport* toute bijection T de D sur A et *coût* d'un programme de transport T la somme $c(T)$ définie par $c(T) = \sum_{k=1}^N \big(d_k - T(d_k)\big)^2$.

(3) Soit $\widehat{T}$ le programme de transport défini pour tout $k \in [\![1, N]\!]$ par $\widehat{T}(d_k) = a_k$. Déduire des questions précédentes que le programme $\widehat{T}$ est optimal, c'est-à-dire que, pour tout programme de transport T, on a : $c(T) \geq c(\widehat{T})$.

(4) *Interprétation probabiliste des inégalités* (1) *et* (2). Soit h une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(a) En utilisant l'inégalité (1), établir pour toute variable aléatoire discrète X ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, l'inégalité : $E(Xh(X)) \geq E(X)E(h(X))$.
(b) Que peut-on en déduire pour le coefficient de corrélation linéaire de X et $h(X)$ lorsque les variances de X et $h(X)$ sont strictement positives?
(c) En utilisant l'inégalité (2), montrer que, si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et si t est un élément de $\mathcal{E}_N$, alors on a : $E(h(X)t(X)) \leq E(h(X)\widehat{t}(X))$.

Partie III. Transport optimal dans une situation aléatoire
Les définitions de fonction de transport et de coût de transport sont identiques à celles données dans le préambule de la partie I. Dans toute cette partie, U désigne une variable aléatoire vérifiant $U(\Omega) = [0, 1]$ et suivant la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Soit Y une variable aléatoire admettant une densité f_Y nulle hors d'un segment $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ et dont la restriction à ce segment est continue et strictement positive. On note F_Y la fonction de répartition de Y. On suppose l'existence d'une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[\alpha, \beta]$, telle que la variable aléatoire $Z = g(U)$ suit la même loi que Y.

(1) Pour tout entier $N \geq 1$, on pose pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X_N(\omega) = \begin{cases} \lfloor 1 + NU(\omega) \rfloor & \text{si} \quad 0 \leq U(\omega) < 1 \\ N & \text{si} \quad U(\omega) = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \quad Y_N(\omega) = g\left(\frac{X_N(\omega)}{N}\right).$$

(a) Trouver la loi de la variable aléatoire X_N.
(b) Etablir l'existence d'un réel $\lambda > 0$ indépendant de N tel que : $\forall \omega \in \Omega$, $|Z(\omega) - Y_N(\omega)| \leq \frac{\lambda}{N}$.
(c) Montrer que pour tout réel y, on a : $F_Y\big(y - \frac{\lambda}{N}\big) \leq P([Y_N < y])$.

(2) Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on pose $t_N(k) = g\big(\frac{k}{N}\big)$. On définit alors $\widehat{t}_N$ à partir de t_N, comme $\widehat{t}$ à partir de t dans la question (2) de la partie II.
(a) Etablir pour tout $k \in [\![1, N]\!]$ les inégalités : $F_Y\big(\widehat{t}_N(k) - \frac{\lambda}{N}\big) \leq P([Y_N < \widehat{t}_N(k)]) < \frac{k}{N}$.
(b) On note F_Y^{-1} la fonction réciproque de la restriction à $[\alpha, \beta]$ de la fonction F_Y. Montrer que, pour tout entier $N \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) \leq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{N} \left(F_Y^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) + \frac{\lambda}{N}\right).$$

(c) En déduire l'inégalité $E(Ug(U)) \leq E(UF_Y^{-1}(U))$.

(3) (a) Parmi les fonctions de transport de classe $\mathcal{C}^1$ de U vers la loi de Y, trouver une fonction de transport T^* de coût minimal.
(b) On suppose que $Y = |4U - 2|$. Déterminer T^* et $C(T^*)$.