

Programme de colles en Mathématiques

ECG 2 (semaine 19 : 2 mars 2026)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur les lois continues classiques, ainsi que sur les fonctions de plusieurs variables et sur la simulation des variables aléatoires en Python, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) Lois continues classiques:

Définition et propriétés de la loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$:
Calcul de la fonction de répartition (*), de l'espérance (*) et de la variance (*).
Définition et propriétés de la loi exponentielle de paramètre λ :
Calcul de la fonction de répartition (*), de l'espérance (*) et de la variance (*).
Définition d'une variable aléatoire suivant une loi sans mémoire.
"Si X suit une loi sans mémoire, alors X est nulle p.s. ou suit une loi exponentielle".
Loi gamma de paramètre ν (définition, densité, espérance (*), variance (*), stabilité par addition).
Définition et propriétés de base de la loi normale centrée réduite.
Définition de la loi normale de paramètres m, σ^2 (densité, espérance, variance).
Propriété de changement d'échelle - Stabilité par addition.

(2) Fonctions de plusieurs variables - Calcul différentiel d'ordre 1 et 2:

Distance (euclidienne) entre deux points.
Définition d'une boule ouverte et d'une boule fermée de $\mathbb{R}^n$.
Définition et propriétés de base des ouverts et des fermés de $\mathbb{R}^n$.
"Toute réunion quelconque et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert".
"Toute intersection quelconque et toute réunion finie de fermés est un fermé".
"Toute boule ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^n$ est ouverte (resp. fermée) dans $\mathbb{R}^n$ ".
"Tout produit cartésien de n ouverts de $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ ".
Définition et propriétés de base d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
Graphe et lignes de niveau d'une application d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Continuité en un point a et sur une partie U de $\mathbb{R}^n$ - Opérations algébriques.
Continuité des fonctions polynomiales et de la norme euclidienne canonique.
"Tout ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) < a\}$, où f est continue sur $\mathbb{R}^n$, est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ".
"Tout ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq a\}$, où f est continue sur $\mathbb{R}^n$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$ ".
Définition de la i -ème application partielle en un point d'une fonction d'un ouvert U dans $\mathbb{R}$.
Dérivées partielles d'ordre 1 et gradient en un point et sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ - Opérations algébriques (somme, produit, quotient, composition).
Expression de la dérivée d'une application de la forme $g(t) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en un point a pour les fonctions de U dans $\mathbb{R}$.
Définition d'une droite de $\mathbb{R}^n$ passant par un point a et de vecteur directeur $u \neq 0$.
Dérivée directionnelle première d'une fonction f en un point a et dans une direction u .
Définition d'un minimum/maximum/extremum local (resp. global) pour une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Définition d'un point critique pour une fonction de U dans $\mathbb{R}$.
Recherche de points critiques - Condition nécessaire d'existence d'un extremum local :
"Si f admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f ".
Définition des dérivées partielles d'ordre 2 de f en un point a et sur un ouvert U .
Notion de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$ - Opérations algébriques.
"Toute fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ ".
Théorème de Schwarz - Matrice hessienne associée à f au point a .
Expression de la forme quadratique q_a associée à la hessienne de f en a .
Définition de la dérivée seconde directionnelle - Expression en fonction de q_a .
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

(3) Programmation en Python:

Simulation de variables aléatoires discrètes (commandes : `rd.randint(a,b+1)`, `rd.binomial(n,p)`, `rd.geometric(p)`, `rd.poisson(1)`).
Notion de série statistique simple, effectifs et effectifs cumulés, fréquences et fréquences cumulées, diagramme en bâtons (`plt.bar(x,n)`) et histogramme (`plt.hist(x,c)`), calculs de moyenne, médiane, variance et écart-type (`np.mean(x)`, `np.median(x)`, `np.var(x)`, `np.std(x)`).
Simulation de variables aléatoires à densité (commandes : `rd.random()`, `rd.exponential(1/1)`, `rd.normal(m,s)`, `rd.gamma(nu)`).

Méthode d'inversion pour la simulation de variables aléatoires discrètes ou à densité dont on connaît la fonction de répartition.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes, définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = \max\{U_1, \dots, U_n\}$. Déterminer une densité de Y , son espérance et sa variance.

Exercice 2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$, et en déduire l'espérance et la variance de Y_n .

Exercice 3. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, puis calculer son gradient et déterminer ses points critiques.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \frac{x^2 + z^2}{1 + y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, puis calculer son gradient et déterminer ses points critiques.

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$ et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y sachant $[X = n]$ soit la loi $\mathcal{B}(n, 1/3)$. Ecrire une fonction en Python qui calcule et affiche une simulation de Y .

Exercice 6. Ecrire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 1$, réalise et affiche une simulation de la variable aléatoire $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, où $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.