

TRAVAUX DIRIGÉS : RECHERCHE D'EXTREMA

RÉPONSES - INDICATIONS

1. RECHERCHE D'EXTREMA

Exercice 1.

(1) A faire! Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x, y) = \left(2x - \frac{1}{(x+y)^2}, 2y - \frac{1}{(x+y)^2} \right) \\ \nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{(x+y)^3} & \frac{2}{(x+y)^3} \\ \frac{2}{(x+y)^3} & 2 + \frac{2}{(x+y)^3} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

(2) Montrer que $A = (1/2, 1/2)$ est l'unique point critique de f . Calculer ensuite les valeurs propres de $\nabla^2(f)(A)$ et conclure.

(3) Exprimer $q_{(x,y)}(h_1, h_2)$ sous forme d'une somme de carrés et conclure.

Exercice 2.

(1) A faire! Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x, y) = (2x + 2y + y^3, 2x + 2y + 3xy^2) \\ \nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 + 3y^2 \\ 2 + 3y^2 & 2 + 6xy \end{pmatrix} \\ q_{(x,y)}(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2(2 + 3y^2)h_1h_2 + (2 + 6xy)h_2^2 \end{cases}.$$

(2) On trouve que $\mathcal{C} = \{(0, 0)\}$.

(3) Vérifier que $\nabla^2(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\text{Sp}(\nabla^2(f)(0, 0)) = \{0, 4\}$.

(4) Vérifier que $f(x, 0) = x^2 \geq 0$ et $f(x, -x) = -x^4 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice 3.

(1) A faire!

(2) Etudier la fonction $z \mapsto ze^z$ sur $\mathbb{R}$.

(3) Vérifier que $\mathcal{C} = \{(a, b)\}$ avec $a = b$, $a = \sqrt{\frac{z_0}{2}}$ et $z_0 e^{z_0} = 1$.

(4) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x, y) = \left(2xe^{x^2+y^2} - \frac{1}{x}, 2ye^{x^2+y^2} - \frac{1}{y} \right) \\ \nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} (2 + 4x^2)e^{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & (2 + 4y^2)e^{x^2+y^2} + \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} \\ q_{(x,y)}(h_1, h_2) = \left((2 + 4x^2)e^{x^2+y^2} + \frac{1}{x^2} \right) h_1^2 + 8xye^{x^2+y^2} h_1 h_2 + \left((2 + 4y^2)e^{x^2+y^2} + \frac{1}{y^2} \right) h_2^2 \end{cases}.$$

(5) Exprimer $q_{(x,y)}(u, v)$ comme somme de carrés, et en déduire que $q_{(x,y)}(u, v) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

(6) Montrer à l'aide de la question précédente que f admet un minimum global en A .

Exercice 4.

- (1) A faire! Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x, y) = (2x(1+y)^3, 3x^2(1+y)^2 + 14y) \\ \nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2(1+y)^3 & 6x(1+y)^2 \\ 6x(1+y)^2 & 14 + 6x^2(1+y) \end{pmatrix} \end{cases}.$$

- (2) Vérifier que $\mathcal{C} = \{(0, 0)\}$, et donc $A = (0, 0)$.
 (3) Utiliser la hessienne en $(0, 0)$ pour conclure!
 (4) Montrer que $f(1, y)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand y tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). En déduire que f n'admet pas de minimum global.

Exercice 5.

- (1) A faire!
 (2) Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on trouve que :

$$\begin{cases} \nabla(f)(x, y) = \left(\ln(y) - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln(x) \right) \\ \nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2} & \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

- (3) Montrer que (e, e) est l'unique point critique de f , et que c'est un point-selle. Conclure.

Exercice 6.

- (1) A faire!
 (2) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on trouve que :

$$\nabla(f)(x) = \left(-\exp\left(n+1 - \sum_{k=1}^n x_k\right) + e^{x_1}, \dots, -\exp\left(n+1 - \sum_{k=1}^n x_k\right) + e^{x_n} \right).$$

- (3) Montrer que $\hat{x} = (1, \dots, 1)$ est l'unique point critique de f .
 (4) (a) Après calculs, on trouve que :

$$\nabla^2(f)(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 2e & e & \cdots & e \\ e & 2e & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & e \\ e & \cdots & e & 2e \end{pmatrix}.$$

- (b) Si $x_1, \dots, x_n$ sont les composantes du vecteur colonne X , vérifier que :

$${}^tX \nabla^2(f)(\hat{x}) X = e \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \right).$$

Conclure avec cette égalité!

- (c) A faire avec la question précédente.
 (d) Calculer ${}^tX \nabla^2(f)(x) X$ et conclure comme à l'exo 1, question (3). La fonction f admet bien un minimum global au point $\hat{x}$.

2. RECHERCHE D'EXTREMA SOUS CONTRAINTES

Exercice 7.

- (1) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$.
 (2) Utiliser la convexité de la fonction $t \mapsto t^4$.
 (3) Sous la contrainte $\mathcal{C}$, on obtient avec la question (2) que $f(x, y, z, t) \geq x^4 + (1-x)^4 + 2y^4 \geq \frac{1}{8}$ avec égalité si $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$, $t = 0$. On peut alors conclure!

Exercice 8.

- (1) On trouve que $\mathcal{C} = \emptyset$.
 (2) Pas d'extremum local/global.

- (3) On trouve que $A = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
- (4) On obtient que $q_{(x,y,z)}(u,v,w) = \frac{2u^2}{x^3} + \frac{2v^2}{y^3} + \frac{2w^2}{z^3} \geq 0$.
- (5) Conclure comme à l'exo 1, question (3).

Exercice 9.

- (1) Vérifier que Γ est fermé borné, que f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et conclure quant à l'existence du maximum. Etablir ensuite que ce maximum est non nul.
- (2) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \left\{\left(\frac{s}{n}, \dots, \frac{s}{n}\right)\right\}$.
- (3) On trouve que $M = \left(\frac{s}{n}\right)^n$, conclure avec ça!

Exercice 10.

- (1) A faire!
- (2) On trouve que $\nabla(f)(x,y) = \left(2x + y - \frac{1}{x^2}, 2y + x - \frac{1}{y^2}\right)$ pour tout $(x,y) \in U$.
- (3) (a) Utiliser la relation $\nabla(f)(x,y) = (0,0)$, puis effectuer des opérations élémentaires sur les lignes du système obtenu.
- (b) Utiliser le théorème de la bijection.
- (c) On trouve que $M = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$.
- (4) (a) Par des calculs simples, on obtient que :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2 + 2/y^3 \end{pmatrix}.$$

Ecrire $q_{x,y}(u,v)$ comme une somme de carrés et conclure.

- (b) La fonction f admet un minimum global sur U , atteint au point M .
- (5) Dans cette question, on veut étudier les extrema de f sur U sous la contrainte $\mathcal{C} : x - y = -1$.
- (a) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que :

$$\begin{aligned} (x,y) \in \mathcal{C}_0 &\iff \begin{cases} x - y = -1 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} 2x + y - \frac{1}{x^2} = \lambda \\ x + 2y - \frac{1}{y^2} = -\lambda \end{cases} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - y = -1 \\ 3x + 3y - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- (b) Etudier la fonction $h : x \mapsto 3x + 3(x+1) - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et montrer qu'elle est bijective.

En déduire que, si x_0 est l'unique antécédent de 0 par h , alors $(x_0, x_0 + 1)$ est l'unique point critique sous contrainte de f . Conclure avec la question (4)(a) que la fonction f admet un maximum global en $(x_0, x_0 + 1)$ sous la contrainte $\mathcal{C}$.

Exercice 11.

- (1) Si $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$, on trouve que $H(Z) = \ln(n)$.
- (2) A faire! Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in]0, 1[^n$, on obtient que :

$$\nabla(f)(x) = (-(\ln(x_1) + 1), \dots, -(\ln(x_n) + 1)) \quad \text{et} \quad \nabla^2(f)(x) = \begin{pmatrix} -1/x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1/x_n \end{pmatrix}.$$

- (3) On trouve que $x^* = (1/n, \dots, 1/n)$.
- (4) (a) A faire!
- (b) Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour montrer que $h_n(x) \leq h_n(x^*)$ pour tout point x sur la contrainte, puis conclure. Comme h_n n'admet qu'un seul point critique sous contrainte, il n'y a pas d'autre point en lequel ce maximum est atteint.
- (5) L'entropie de Z est maximale si et seulement si Z suit une loi "uniforme" sur un ensemble fini à n éléments, c'est-à-dire si toutes les valeurs $z_1, \dots, z_n$ sont prises par Z avec probabilité $1/n$.

3. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 12.

- (1) On trouve que $\mathcal{C} = \left\{ \left(2, \frac{1}{4} \right), \left(2, \frac{1}{4} \right) \right\}$, les deux points critiques sont des points selles et il n'y a pas d'extremum local.
- (2) On trouve que $\mathcal{C} = \left\{ \left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2} \right) \right\}$, le point critique correspond à un minimum local.
- (3) On trouve que $\mathcal{C} = \left\{ (0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$, les trois premiers points critiques sont des points selles, le quatrième correspond à un minimum local.
- (4) On trouve que $\mathcal{C} = \left\{ (0, 0), (1, 0), (0, 1), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$, les trois premiers points critiques sont des points selles, le quatrième correspond à un maximum local.
- (5) On trouve que $\mathcal{C} = \left\{ (1, 0), (e^{-2}, 0) \right\}$, le premier point critique correspond à un minimum local et le second est un point selle.
- (6) On trouve que $\mathcal{C} = \{(-1, -1)\}$ et le point critique est un point selle.

Exercice 13.

- (1) On trouve que $\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1)\}$, le point critique $(0, 0, 0)$ correspond à un minimum local et tous les autres sont des points selles.
- (2) On trouve que $\mathcal{C} = \{(-1, 0, 0)\}$ et le point critique correspond à un minimum local.
- (3) On trouve que $\mathcal{C} = \{(1, 1, -1)\}$ et le point critique est un point selle.
- (4) On trouve que $\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (2, 2, 2)\}$ et les deux points critiques sont des points selles.

Exercice 14.

- (1) On trouve que $\mathcal{C} = \{(1, 2), (-1, 0)\}$.
- (2) A traiter avec la hessienne!
- (3) Oui car $f(1, 2) = f(-1, 0) = 0$ et f est positive sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15.

- (1) A faire!
- (2) On trouve que $\mathcal{C} = \{(t, \dots, t), t \in \mathbb{R}_+^*\}$ et $f(t, \dots, t) = n^2$ pour tout $t > 0$.
- (3) On se propose de montrer que f admet un minimum global en ces points. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose :

$$P(t) = \sum_{k=1}^n \left(t\sqrt{x_k} + \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right)^2.$$

- (a) Après calculs, on obtient que : $P(t) = t^2 \sum_{k=1}^n x_k + 2tn + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$.
- (b) Le polynôme P est du second degré et positif sur $\mathbb{R}$, donc son discriminant est négatif. Calculer le discriminant pour conclure.
- (c) On a égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Exercice 16.

- (1) On trouve que $\mathcal{C} = \emptyset$.
- (2) Pas d'extremum local/global.
- (3) Si $\mathcal{C}_a$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_a = \left\{ \left(\frac{e^{-1/3}}{\sqrt{a}}, \sqrt{a}e^{-1/3} \right) \right\}$. De plus, ce point critique sous contrainte correspond à un minimum global sous contrainte.

Exercice 17.

- (1) On trouve que $\mathcal{C} = \{(1, 1, 1)\}$ et le point critique est un point selle. Pas d'extremum local/global sur $\mathbb{R}^3$.
- (2) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \left\{ \left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{3}{7} \right) \right\}$. De plus, ce point critique sous contrainte correspond à un maximum global sous contrainte.

Exercice 18. Dans les deux cas, on trouve que $(1, \dots, 1)$ est l'unique point critique sous contrainte de f , et qu'il correspond à un maximum global sous contrainte.

Exercice 19.

- (1) La fonction h est croissante sur $]0, e^{-1}[$, croissante sur $]e^{-1}, +\infty[$, tend vers 0 en 0 et vers $+\infty$ en $+\infty$.
- (2) Utiliser la question (1) pour voir que la fonction f est minorée sur $\mathcal{D}$ par $-3e^{-1}$, et qu'elle n'est ni majorée, ni bornée sur $\mathcal{D}$.
- (3) A faire!
- (4) On trouve que $A = (e^{-1}, e^{-1}, e^{-1})$.
- (5) Utiliser la hessienne en A , puis vérifier avec la question (1) que f admet un minimum global en A .
- (6) (a) Si $\mathcal{C}_a$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_a = \{(a, a, a)\}$.
 (b) Calculer la hessienne de f en tout point et utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour montrer que f admet un minimum global sous la contrainte $\mathcal{C}_a$, atteint en (a, a, a) et valant $3a \ln(a)$.

Exercice 20.

- (1) On trouve que $\mathcal{C} = \{(10, 10)\}$ et le point critique correspond à un maximum global.
- (2) Si $\mathcal{C}_0$ est l'ensemble des points critiques sous contrainte, vérifier que $\mathcal{C}_0 = \{(9, 4)\}$. De plus, le point critique sous contrainte correspond à un maximum sous contrainte, qui vaut 1064.

Exercice 21.

- (1) (a) On trouve que $\mathcal{C} = \{(0, 0), (1, 1)\}$, le premier point critique est un point selle et le deuxième correspond à un minimum local.
 (b) En calculant $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x, y)$, on peut vérifier que f n'a aucun extremum global.
 (c) La réponse est non (considérer la restriction de f à la droite $\text{Vect}((1, 0))$).
- (2) Utiliser le théorème de la bijection après avoir étudié la fonction $h : y \mapsto f(x, y)$ si $x < \frac{1}{2}$.
- (3) Calculer $f(x, \varphi(x))$ en utilisant un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\varphi(x)$, de la forme $\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0. On trouve que $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = b = 1$ et $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$ au voisinage de 0.

Exercice 22.

- (1) Question de cours : Cf. cours. On rappelle que $f'_h(x) = \langle \nabla(f)(x), h \rangle$ et $f''_h(x) = q_x(h) = {}^t H \nabla^2(f)(x) H$.
- (2) (a) Utiliser la formule de Koenig-Huygens, la linéarité de l'espérance et le fait que les variables aléatoires soient indépendantes.
 (b) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 (c) Sous la contrainte $\sum_{k=1}^n x_k = 1$, on a $f(x_1, \dots, x_n) = \sigma^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq \frac{\sigma^2}{n}$, avec égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$. Conclure.
- (3) (a) La fonction f est polynomiale, et donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla(f)(x) = \left(2\sigma^2 x_1 + 2\mu^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k - 1 \right), \dots, 2\sigma^2 x_n + 2\mu^2 \left(\sum_{k=1}^n x_k - 1 \right) \right).$$

$$\text{On trouve alors que } a = \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2}, \dots, \frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2} \right).$$

- (b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, on trouve que :

$$f(a+h) = f(a) + 2 \int_0^1 (1-t) \left(\mu^2 \left(\sum_{i=1}^n h_i \right)^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n h_i^2 \right) dt.$$

Par positivité de l'intégrale, il s'ensuit que $f(a+h) \geq f(a)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, et donc f admet un minimum global en a .

Exercice 23.

- (1) La matrice J_n est de rang 1, ses valeurs propres sont 0 et n et elle est de plus diagonalisable.
- (2) A faire!
- (3) On trouve que $\mathcal{C} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2n}} \right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2n}}, \dots, \frac{-1}{\sqrt{2n}} \right) \right\}$.
- (4) Avec la question (1), vérifier que les valeurs propres de $H_n(a)$ sont toutes < 0 , et donc f_n admet un maximum local en a , qui vaut $f(a) = \sqrt{\frac{n}{2}} e^{-1/2}$.

- (5) (a) La fonction h est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.
 (b) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 (c) Si $s = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$, on voit avec les 2 questions précédentes que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, \dots, x_n) \leq \sqrt{n}h(s) \leq \sqrt{n}h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2}.$$

On en déduit que f_n admet un maximum global en a . Idem pour b .

Exercice 24. Si l'on pose $g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ et $h(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3$, alors les points recherchés sont les points critiques de f sous contraintes, lesquels sont les solutions du système :

$$\begin{cases} g(x_1, x_2, x_3) = 5 \\ h(x_1, x_2, x_3) = 1 \\ \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \nabla(f)(x_1, x_2, x_3) = \lambda \nabla(g)(x_1, x_2, x_3) + \mu \nabla(h)(x_1, x_2, x_3) \end{cases},$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad (2x_1, 4x_2, 12x_3) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 4, 6) \end{cases}.$$

Après résolution, on trouve que $\lambda = 17$, $\mu = -28/3$, $x_1 = 23/3$, $x_2 = -5/6$, $x_3 = -11/6$, et donc la fonction f admet un unique point critique x^* sous contraintes, à savoir :

$$x^* = \left(\frac{23}{3}, \frac{-5}{6}, \frac{-11}{6}\right).$$

De plus, on peut montrer (soit par substitution, soit à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral) que x^* correspond à un minimum de f sous contraintes.