

Concours blanc de Mathématiques n°1

Remarques : Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables et les calculatrices, ainsi que tous matériels électroniques sont interdits. Tous les étudiants devront traiter l'exercice d'informatique du début et auront le choix entre deux sujets, un de type ECRICOME et un autre de type HEC-ESCP maths II. Ils indiqueront lisiblement sur leur première copie le sujet qu'ils auront choisi, et ne pourront traiter que les questions de ce sujet.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et telle que, pour tout entier $n \geq 2$, on ait $u_{n+2} = 6u_{n+1} + 7u_n$.

- (1) Ecrire une fonction en Python qui, prenant en argument un entier $n \geq 0$, calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
- (2) En déduire une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche la liste $(u_0, u_1, \dots, u_n)$, puis qui représente dans le plan l'ensemble des points $M_k(k, y_k)$ avec $0 \leq k \leq n$.

1. Sujet type ECRICOME

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour tout polynôme $P \in E$, on pose $\varphi(P) : x \mapsto P''(x) - 2xP'(x)$.

- (1) (a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
(b) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de E .
(c) Montrer que φ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.
- (2) Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.
(a) Montrer que $\langle P, Q \rangle$ est bien défini pour tout $(P, Q) \in E^2$.
(b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- (3) Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de E pour ce produit scalaire.
- (4) On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de E par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k = (x \mapsto x^k) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, (x \mapsto x^k) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i.$$

- (a) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[x]$.
- (b) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ .

Exercice 3. On considère les fonctions φ et ψ définies pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} - t \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

Soit U la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $U =]0, +\infty[^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. On considère la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in U$ par :

$$f(x, y) = x^y - y^x = e^{y \ln(x)} - e^{x \ln(y)}.$$

Dans cet exercice, on se propose de montrer que f n'admet aucun extremum sur U .

- (1) Justifier que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, puis que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .
- (2) Etudier les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $\psi(1)$ et préciser le signe de ψ .
- (3) Prouver la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculer sa somme.
- (4) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et de $\ln(t)$ (on admettra la convergence de cette série).
- (5) Justifier que : $\forall t \in]0, 1[, \varphi(t) < \ln(t)$ et $\forall t \in]1, +\infty[, \varphi(t) > \ln(t)$.
- (6) Soit $(x, y) \in U$. Montrer que (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} x > 1, y > 1 \\ \ln(x) \ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x) \end{cases}.$$

(7) Soit $(x, y) \in U$ un point critique de f . Justifier l'existence d'un réel $t > 0$ tel que :

$$x = e^t, \quad y = e^{\frac{1}{t}}, \quad \varphi(t) = \ln(t).$$

(8) Prouver que (e, e) est l'unique point critique de f .

(9) En comparant les signes des fonctions $t \mapsto f(e, e + t)$ et $t \mapsto f(e + t, e)$, justifier que f n'admet aucun extremum sur U .

Problème 1. Le problème suivant comporte trois parties.

Partie 1

(1) Soient x, y deux réels.

(a) Déterminer un équivalent simple de $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ au voisinage de 0.

(b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

(c) A l'aide du changement de variable $s = 1 - t$, montrer que les intégrales $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et

$$\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$$

sont de même nature.

(d) En déduire que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose désormais :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

(2) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $B(x, y) = B(y, x)$.

(3) Calculer $B(x, 1)$ pour tout $x > 0$.

(4) (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)$.

(b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$xB(x, y+1) = yB(x+1, y).$$

(c) En déduire que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.

(5) Montrer que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

Partie 2

(1) On définit la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall \nu \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$. On rappelle que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $\nu > 0$, on a $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\Gamma(n+1)$ en fonction de n .

(b) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{2t}$ que l'on justifiera, calculer $\Gamma(1/2)$.

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit $f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0 \end{cases}$.

(2) (a) Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge.

(b) Montrer que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

(3) (a) Soit X une variable aléatoire à densité, de densité $f_{a,1}$. Reconnaître la loi de X , et préciser son espérance et sa variance.

(b) Soit Y une variable aléatoire à densité, de densité $f_{1,b}$. Reconnaître la loi de Y et préciser son espérance. Montrer que Y admet une variance et la calculer.

(4) Soit X une variable aléatoire à densité, de densité $f_{a,b}$.

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire bX .

(b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les déterminer.

(5) Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires à densité, indépendantes et de densités respectives $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$, où a_1, a_2, b sont trois réels > 0 .

- (a) Montrer que $X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- (b) En déduire que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.
 (c) Calculer la valeur de $B(1/2, 1/2)$.

Partie 3

Dans cette partie, on suppose que, pour les questions d'informatique, les bibliothèques `numpy` et `numpy.random` ont été importées.

- (1) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

- (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance et la calculer en fonction de x, y .
 (b) Ecrire une fonction en Python, notée `simul`, qui prend en entrée deux réels $x, y > 0$ et qui renvoie une simulation de $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$.
 (c) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $]0, 1[$. Ecrire une fonction en Python, notée `simul2`, qui prend en entrée deux réels $x, y > 0$ et un entier $n \geq 1$, et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire :

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^{x-1} (1 - U_i)^{y-1}.$$

- (2) Soit a un réel ≥ 1 .

- (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que X^{a-1} admet une espérance et une variance et les donner.
 (b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{a-1}.$$

Montrer que M admet une espérance et une variance et les calculer.

- (c) Expliquer ce que renvoie la fonction `myst` suivante :

```
def myst(n):
    u=rd.random(n)
    x=-np.log(1-u)
    return x
```

- (d) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire M_n :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulmyst(n,a):
    x=myst(n)
    ..... (plusieurs lignes sont possibles)
```

2. Sujet type HEC-ESCP (maths II)

Problème 2. Dans ce problème, toutes les variables aléatoires qui interviennent sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et elles sont à valeurs réelles. L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $E(X)$, et on admet les résultats suivants :

- Toute variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$ et une variance égale à $\frac{1}{\lambda^2}$.
- La somme de n variables aléatoires réelles indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$ de densité g définie par $g(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$ si $t > 0$, et par 0 sinon.
- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev* : Pour toute variable aléatoire X admettant une variance et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Partie I : Définition de l'application L .

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ converge absolument, et soit F l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément f de E et tout réel $x > 0$, on pose :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

Enfin, pour tout réel $\lambda \geq 0$, on désigne par ε_λ la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$.

- (1) Vérifier que E est un espace vectoriel.
- (2) Vérifier que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$.
- (3) Vérifier que L est une application linéaire de E dans F .
- (4) Montrer que ε_λ appartient à E pour tout $\lambda \geq 0$, puis calculer $L(\varepsilon_\lambda)(x)$ pour tout $x > 0$.
- (5) Montrer que, pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $f \in E$, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ appartient aussi à E , puis vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda).$$

- (6) Soit H une fonction appartenant à E , de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer qu'alors la fonction H' appartient aussi à E , puis que, pour tout $x > 0$, on a :

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x).$$

- (7) Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ appartient aussi à E .

Partie II : Dérivabilité de la fonction $L(f)$.

Dans toute cette partie, on considère un réel $x > 0$, et une fonction f appartenant à E . Soit h un réel non nul tel que $|h| < \frac{x}{2}$.

- (1) Pour tout réel $t > 0$, justifier l'inégalité :

$$\left| e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \right| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{-\frac{xt}{2}}.$$

- (2) Pour tout réel $T > 0$, justifier l'inégalité :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.$$

- (3) En déduire que la fonction $L(f)$ est dérivable en x , et que son nombre dérivé en x est égal à :

$$(L(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

- (4) Montrer que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k -ème de $L(f)$ en x .

Partie III : Injectivité de l'application $L : f \mapsto L(f)$.

Dans toute cette partie, on considère un réel $x > 0$, et une fonction $f \in E$ continue et bornée sur $[0, +\infty[$. On désigne par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$ (et donc d'espérance x). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

- (1) Déterminer une densité de la variable aléatoire S_n .
- (2) Déterminer une densité (notée φ_n) de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.
- (3) On rappelle qu'en Python, la commande `rd.exponential(1/a, [p,q])` permet de simuler une matrice de taille $p \times q$ de variables aléatoires qui suivent la loi exponentielle de paramètre a . Ecrire une fonction en Python qui, à partir d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et d'un réel $x > 0$, simule la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$.
- (4) Justifier que $\frac{S_n}{n}$ admet une espérance et une variance, et les calculer en fonction de n et x .
- (5) Montrer que, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) = 0.$$

- (6) En utilisant la continuité de la fonction f en x , montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right].$$

- (7) Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right]\right) = 0.$$

- (8) Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$, et soit ε un réel > 0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'événement :

$$A_n = \left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon\right].$$

- (a) Soit 1_{A_n} l'indicatrice de A_n . Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}).$$

- (b) En déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x).$$

- (c) Déduire des questions précédentes l'égalité suivante :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt.$$

- (d) En déduire l'égalité suivante :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} (L(f))^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

- (e) Montrer que, si deux fonctions f et g continues et bornées sur $[0, +\infty[$ vérifient l'égalité $L(f) = L(g)$, alors f et g sont égales.
- (f) Montrer plus précisément que, si deux fonctions f et g continues et bornées sur $[0, +\infty[$ vérifient l'égalité $L(f)(x) = L(g)(x)$ pour tout $x \in]a, +\infty[$ (où $a \geq 0$), alors f et g sont encore égales.

Partie IV : Etude du régime permanent d'une file d'attente.

Un certain jour, des clients arrivent dans une poste qui ne possède qu'un seul guichet. Un client qui arrive dans la poste soit se fait servir tout de suite si le guichet est libre, soit prend place dans la file d'attente si le guichet est occupé, et se fait servir dès que tous ses prédécesseurs dans la file ont été servis, puis il quitte aussitôt la poste. On modélise cette situation en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n l'instant d'arrivée dans la poste du n -ème client, U_n sa durée d'attente dans la file ($U_n = 0$ si le guichet est libre), S_n la durée de son service au guichet et $W_n = S_n + U_n$ la durée de sa présence dans la poste. On pose $T_0 = 0$ et, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$, de sorte que $T_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k$. On fait alors les hypothèses suivantes :

- Les variables aléatoires $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots, S_1, \dots, S_n, \dots$ sont indépendantes.
- Les variables aléatoires $S_1, \dots, S_n, \dots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre μ (d'espérance $\frac{1}{\mu}$).
- Les variables aléatoires $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ sont strictement positives et ont toutes la même densité égale sur $]0, +\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\frac{1}{\lambda}$).
- L'espérance commune des Δ_i est supérieure à celle des S_i , c'est-à-dire : $\mu > \lambda$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par F_n la fonction de répartition de U_n et par G_n celle de W_n . On admet que F_n et G_n sont continues sur $[0, +\infty[$. Dans les trois premières questions de cette partie, on considère un entier $n \geq 2$, un réel $x \geq 0$ et un réel $h > 0$.

- (1) Justifier les égalités : $U_n = 0$ si $W_{n-1} - \Delta_n < 0$, et $U_n = W_{n-1} - \Delta_n$ sinon.
- (2) Justifier l'indépendance des variables aléatoires W_{n-1} et Δ_n .
- (3) (a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité :

$$P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq P([W_{n-1} \leq x + (k+1)h] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).$$

- (b) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, en déduire l'inégalité :

$$P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

- (c) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, établir l'inégalité :

$$P([W_{n-1} \leq x + kh] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).$$

- (d) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'inégalité :

$$e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).$$

- (e) En déduire l'encadrement suivant :

$$e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq F_n(x) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

- (4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. A l'aide de l'encadrement précédent, montrer que : $F_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} G_{n-1}(x+s) ds$.

En raisonnant de la même façon, on montre et nous admettrons que :

$$G_n(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F_{n-1}(x-s) ds.$$

- (5) A partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on suppose que les fonctions F_n et G_n sont indépendantes de l'entier n , et l'on pose $F = F_n$ et $G = G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On dit alors qu'on étudie la file d'attente en régime permanent.

- (a) Pour tout réel $x \geq 0$, établir l'égalité : $F(x) = \lambda e^{\lambda x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt - \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \right)$.

- (b) Pour tout réel $x \geq 0$, en déduire l'égalité : $e^{-\lambda x} F(x) = F(0) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt$.

- (6) On considère la fonction $H : x \mapsto \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt$.

- (a) Montrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$.

- (b) Pour tout réel $x > 0$, établir l'égalité : $xL(H)(x) = L(G)(x + \lambda)$.

- (c) Montrer que, pour tout réel $x > \lambda$, on a : $L(F)(x) = \frac{F(0)}{x - \lambda} - \frac{\lambda}{x - \lambda} L(G)(x)$.

- (7) (a) Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$.

- (b) Pour tout réel $x > 0$, établir successivement les égalités :

$$G'(x) = -\mu G(x) + \mu F(x) \quad \text{et} \quad L(G)(x) = \frac{\mu}{x + \mu} L(F)(x).$$

- (8) (a) Montrer que, pour tout réel $x > \lambda$, on a : $L(F)(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda} \left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x + \mu - \lambda} \right)$.

(b) En déduire que, pour tout réel $x \geq 0$, on a : $F(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda} \left(\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x} \right)$.

(c) Justifier que la fonction F tend vers 1 en $+\infty$, et en déduire que, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)x}.$$

- (9) (a) Montrer qu'en régime permanent, le temps passé dans la poste suit une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.
- (b) On suppose qu'un autre jour, les arrivées des clients sont en moyenne deux fois plus fréquentes et la durée de service deux fois plus rapide. Que deviennent, en régime permanent, le temps moyen passé dans la poste par un client et la probabilité d'être servi tout de suite?