

Corrigé du concours blanc de Mathématiques n°1

Corrigé de l'exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et telle que, pour tout entier $n \geq 2$, on ait $u_{n+2} = 6u_{n+1} + 7u_n$.

- (1) Ecrivons une fonction en Python qui, prenant en argument un entier $n \geq 0$, calcule et renvoie la valeur du terme u_n de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$. Pour ce faire, on procèdera comme suit :

```
import numpy as np

def suite(n):
    if n==0:
        return 2
    elif n==1:
        return 3
    else:
        return 6*suite(n-1)+7*suite(n-2)
```

- (2) Ecrivons une fonction en Python qui, étant donné un entier $n \geq 0$, calcule et affiche la liste $(u_0, u_1, \dots, u_n)$, puis qui représente dans le plan l'ensemble des points $M_k(k, y_k)$ avec $0 \leq k \leq n$. Pour ce faire, on va utiliser la fonction précédente pour calculer $u_0, u_1, \dots, u_n$, construire ainsi la liste $(u_0, u_1, \dots, u_n)$, puis on va se servir de la commande `plt.plot` pour représenter les points $M_0, M_1, \dots, M_n$ dans le plan, ce comme suit :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def listetrace():
    u=np.zeros(0,n+1)
    for i in range(0,n+1):
        u[i]=suite(i)
    print(u)
    v=np.arange(0,n+1,1)
    plt.plot(v,u,x)
    plt.show()
```

1. Sujet type ECRICOME

Corrigé de l'exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n . Pour tout polynôme $P \in E$, on pose : $\varphi(P) : x \mapsto P''(x) - 2xP'(x)$.

- (1) (a) Montrons que φ est un endomorphisme de E . Pour ce faire, on commence par remarquer que $E = \mathbb{R}_n[x]$ est stable par φ . En effet, soit P un élément de E . Alors $\deg(P) \leq n$, ce qui entraîne que $\deg(P'') \leq n - 2$ et $\deg(x \mapsto 2xP'(x)) \leq n - 1 + 1 = n$, et donc :

$$\deg(\varphi(P)) \leq \max\{\deg(P''), \deg(x \mapsto 2xP'(x))\} \leq \max\{n - 2, n\} = n.$$

En particulier, $\varphi(P)$ est un élément de E , ce qui signifie que $E = \mathbb{R}_n[x]$ est stable par φ . Reste à montrer que φ est linéaire. Soient P, Q des éléments de $\mathbb{R}_n[x]$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors, on trouve par linéarité de la dérivation que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + \mu Q)(x) &= (\lambda P + \mu Q)''(x) - 2x(\lambda P + \mu Q)'(x) \\ &= \lambda P''(x) + \mu Q''(x) - 2x(\lambda P'(x) + \mu Q'(x)) \\ &= \lambda P''(x) + \mu Q''(x) - \lambda 2xP'(x) - \mu 2xQ'(x) \\ &= \lambda(P''(x) - 2xP'(x)) + \mu(Q''(x) - 2xQ'(x)) \\ &= \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x) \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$, et donc φ est linéaire. Par conséquent :

φ est un endomorphisme de E .

- (b) Déterminons la matrice de φ dans la base canonique de E . Pour ce faire, on va calculer $f(x \mapsto x^k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par définition, on a $(x \mapsto 1)' = (x \mapsto 1)'' = 0$, et donc on trouve que $f(x \mapsto 1) = (x \mapsto 0)$. De plus, on a $(x \mapsto x)' = (x \mapsto 1)$ et $(x \mapsto x)'' = (x \mapsto 0)$, et donc $f(x \mapsto x) = -2(x \mapsto x)$. De façon générale, on trouve que, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} f(x \mapsto x^k) &= (x \mapsto x^k)'' - 2(x \mapsto x)(x \mapsto x^k)' \\ &= k(k-1)(x \mapsto x^{k-2}) - 2k(x \mapsto x)(x \mapsto x^{k-1}) \\ &= k(k-1)(x \mapsto x^{k-2}) - 2k(x \mapsto x^k). \end{aligned}$$

Dès lors, on vient de montrer que :

$$\begin{aligned} f(x \mapsto 1) &= 0, \quad f(x \mapsto x) = -4(x \mapsto x), \\ \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad f(x \mapsto x^k) &= k(k-1)(x \mapsto x^{k-2}) - 2k(x \mapsto x^k). \end{aligned}$$

En particulier, la matrice A de φ dans la base canonique de E est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -4 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -2n \end{pmatrix}.$$

- (c) Montrons que φ est diagonalisable et donnons ses valeurs propres. D'après la question précédente, on sait que la matrice A de φ dans la base canonique de E est triangulaire supérieure. Dès lors, les valeurs propres de φ sont exactement les coefficients diagonaux de A , c'est-à-dire $0, -2, \dots, -2n$. Mais comme φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes et que $\dim E = n+1$, on en déduit que :

l'endomorphisme φ est diagonalisable et : $\text{Sp}(\varphi) = \{0, -2, \dots, -2n\}$.

- (2) Pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose : $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$.

- (a) Montrons que $\langle P, Q \rangle$ est bien défini pour tout $(P, Q) \in E^2$. Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $(P, Q) \in E^2$, et donc l'intégrale $\langle P, Q \rangle$ est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, si P ou Q est nul, alors le produit PQ est nul, et donc l'intégrale $\langle P, Q \rangle$ est bien définie. Dès lors, supposons que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Comme PQ est un polynôme nul, l'expression $P(t)Q(t)$ est équivalente à son terme $a_r t^r$ de plus haut degré au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et donc :

$$\left| t^2 P(t)Q(t)e^{-t^2} \right|_{t \rightarrow \pm\infty} \sim |a_r| |t|^{r+2} e^{-t^2}.$$

Si l'on pose $y = t^2$, alors on voit que y tend vers $+\infty$ quand t tend vers $\pm\infty$, et donc on trouve par croissance comparée que :

$$|a_r| |t|^{r+2} e^{-t^2} = |a_r| y^{\frac{r}{2}+1} e^{-y} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} 0.$$

En particulier, on obtient que :

$$\left| t^2 P(t)Q(t)e^{-t^2} \right|_{t \rightarrow \pm\infty} \xrightarrow{} 0.$$

Dès lors, il s'ensuit qu'au voisinage de $\pm\infty$:

$$P(t)Q(t)e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge d'après le cours et que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive, les intégrales $\int_1^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ convergent d'après le critère de

négligeabilité. Mais comme $\int_{-1}^1 P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$ converge en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, il s'ensuit que l'intégrale $\langle P, Q \rangle$ converge d'après la relation de Chasles. Par conséquent :

$$\boxed{\langle P, Q \rangle \text{ est bien défini pour tout } (P, Q) \in E^2.}$$

- (b) Montrons que $\langle, \rangle$ est un produit scalaire sur E . Pour ce faire, on va montrer que $\langle, \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, et ce en plusieurs étapes :

Première étape : $\langle, \rangle$ est symétrique.

En effet, pour tous $P, Q \in E$, on voit que :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t^2} dt = \langle Q, P \rangle,$$

d'où il s'ensuit que $\langle, \rangle$ est symétrique.

Deuxième étape : $\langle, \rangle$ est bilinéaire.

En effet, pour tous $P, Q, R \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + \mu Q, R \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda P(t) + \mu Q(t)] R(t) e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda P(t) R(t) e^{-t^2} + \mu Q(t) R(t) e^{-t^2}] dt \\ &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) R(t) e^{-t^2} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t) R(t) e^{-t^2} dt \\ &= \lambda \langle P, R \rangle + \mu \langle Q, R \rangle. \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\langle, \rangle$ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire par symétrie.

Troisième étape : $\langle, \rangle$ est définie positive.

En effet, pour tout $P \in E$, on voit que $P^2(t)e^{-t^2} \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et donc par positivité de l'intégrale, on obtient que :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t) e^{-t^2} dt \geq 0,$$

d'où il s'ensuit que $\langle, \rangle$ est positive. De plus, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors on voit par stricte positivité de l'intégrale que $P^2(t)e^{-t^2} = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (car $t \mapsto P^2(t)e^{-t^2}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$). Dès lors, ceci entraîne que $P^2(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, P est le polynôme nul, d'où il s'ensuit que la forme bilinéaire $\langle, \rangle$ est définie positive.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\langle, \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

- (3) Montrons que φ est un endomorphisme symétrique de E pour ce produit scalaire. Comme φ est un endomorphisme de E d'après la question (1)(a), il suffit de montrer que φ est symétrique. Pour ce faire, considérons deux éléments P, Q de E . Alors, on trouve par des calculs simples que :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(P), Q \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(P)(t) Q(t) e^{-t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [P''(t) - 2tP'(t)] Q(t) e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Posons $u(t) = P'(t)e^{-t^2}$ et $v(t) = Q(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et de plus $u'(t) = [P''(t) - 2tP'(t)]e^{-t^2}$ et $v'(t) = Q'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dès lors, on obtient par une intégration

par parties que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$:

$$\begin{aligned}
 \int_x^y [P''(t) - 2tP'(t)]Q(t)e^{-t^2} dt &= \int_x^y u'(t)v(t)dt \\
 &= [u(t)v(t)]_x^y - \int_x^y u(t)v'(t)dt \\
 &= \left[P'(t)Q(t)e^{-t^2} \right]_x^y - \int_x^y P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt \\
 &= P'(y)Q(y)e^{-y^2} - P'(x)Q(x)e^{-x^2} - \int_x^y P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt.
 \end{aligned}$$

D'après les arguments de la question (2)(a), on voit que $P'(x)Q(x)e^{-x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$, et que $P'(y)Q(y)e^{-y^2}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Dès lors, il s'ensuit par passage à la limite quand x tend vers $-\infty$ et quand y tend vers $+\infty$ dans la relation ci-dessus que :

$$\langle \varphi(P), Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [P''(t) - 2tP'(t)]Q(t)e^{-t^2} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt.$$

Par des calculs analogues et par symétrie du produit scalaire, on trouve aussi que :

$$\langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle \varphi(Q), P \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} Q'(t)P'(t)e^{-t^2} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{-t^2} dt = \langle \varphi(P), Q \rangle.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E.}$$

(4) On définit une famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de polynômes de E par :

$$P_0 : x \mapsto 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P_k = (x \mapsto x^k) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle P_i, (x \mapsto x^k) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i.$$

(a) Montrons que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E . Pour ce faire, on va montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une famille orthogonale échelonnée de } \mathbb{R}_n[x]".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car $(P_0) = (1)$. A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale échelonnée de $\mathbb{R}_n[x]$, c'est-à-dire telle que $\deg(P_i) = i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Or, on sait par définition que :

$$P_{n+1} = (x \mapsto x^{n+1}) - \sum_{i=0}^n \frac{\langle P_i, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i.$$

Comme les expressions $\frac{\langle P_i, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}$ sont des réels et que P_i est de degré i pour tout $i \leq n$, on voit que P_i appartient à $\mathbb{R}_n[x]$ pour tout $i \leq n$. Comme $\mathbb{R}_n[x]$ est un espace vectoriel, on obtient que $\sum_{i=0}^n \frac{\langle P_i, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i$ appartient à $\mathbb{R}_n[x]$. En particulier, il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que :

$$\sum_{i=0}^n \frac{\langle P_i, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} P_i = a_0(x \mapsto 1) + \dots + a_n(x \mapsto x^n).$$

Dès lors, ceci entraîne que :

$$P_{n+1} = (x \mapsto x^{n+1}) - a_0(x \mapsto 1) - \dots - a_n(x \mapsto x^n),$$

d'où il s'ensuit que $\deg(P_{n+1}) = n+1$, et donc la famille $(P_0, \dots, P_n, P_{n+1})$ est échelonnée. En outre, on trouve par bilinéarité du produit scalaire que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned}
 \langle P_{n+1}, P_i \rangle &= \left\langle (x \mapsto x^{n+1}) - \sum_{j=0}^n \frac{\langle P_j, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} P_j, P_i \right\rangle \\
 &= \langle (x \mapsto x^{n+1}), P_i \rangle - \sum_{j=0}^n \frac{\langle P_j, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \langle P_j, P_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Comme la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale par hypothèse de récurrence, on voit que $\langle P_j, P_i \rangle = 0$ pour tout indice $j \neq i$, et donc on obtient par symétrie du produit scalaire que, pour tout $i \leq n$:

$$\begin{aligned} \langle P_{n+1}, P_i \rangle &= \langle (x \mapsto x^{n+1}), P_i \rangle - \sum_{j=0}^n \frac{\langle P_j, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \langle P_j, P_i \rangle \\ &= \langle (x \mapsto x^{n+1}), P_i \rangle - \frac{\langle P_i, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle} \langle P_i, P_i \rangle \\ &= \langle (x \mapsto x^{n+1}), P_i \rangle - \langle P_i, (x \mapsto x^{n+1}) \rangle = 0. \end{aligned}$$

En particulier, on voit que P_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes $P_0, \dots, P_n$. Mais comme la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est orthogonale par hypothèse de récurrence, il s'ensuit que la famille $(P_0, \dots, P_n, P_{n+1})$ l'est aussi, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une famille orthogonale échelonnée de } \mathbb{R}_n[x].$$

Comme toute famille échelonnée de polynômes est libre, on voit en particulier que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$. Mais comme cette famille compte $n+1$ éléments et que $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[x].$$

- (b) Montrons que la base $(P_0, \dots, P_n)$ est constituée de vecteurs propres de φ . Pour ce faire, on va montrer par récurrence la propriété $\mathcal{Q}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{Q}(n) : \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(P_i) = -2iP_i.$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{Q}(0)$ est vraie, car $P_0 = 1$ et $\varphi(P_0) = \varphi(1) = 0$ d'après la question (1)(b). A présent, supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ l'est aussi. D'après la question (1)(c), on sait que :

$$\mathbb{R}_{n+1}[x] = E_0(\varphi) \oplus \dots \oplus E_{-2n}(\varphi) \oplus E_{-2(n+1)}(\varphi).$$

De plus, tous les sous-espaces propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ sont de dimension 1. En outre, on sait par hypothèse de récurrence que $\varphi(P_i) = -2iP_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et donc la base $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ est constituée de vecteurs propres de φ . En particulier, comme chaque polynôme P_i est un vecteur propre de φ pour la valeur propre $-2i$ et ce pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, chacun des P_i est non nul et forme une famille libre (et donc une base) du sous-espace propre $E_{-2i}(\varphi)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après la question précédente, on sait que le polynôme P_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes $P_0, \dots, P_n$. Dès lors, le polynôme P_{n+1} est orthogonal à tous les sous-espaces propres $E_0(\varphi), \dots, E_{-2n}(\varphi)$, et donc il est orthogonal à $E_0(\varphi) \oplus \dots \oplus E_{-2n}(\varphi)$. Mais comme φ est symétrique d'après la question (3), tous ses sous-espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux, et donc :

$$E_{-2(n+1)}(\varphi) = (E_0(\varphi) \oplus \dots \oplus E_{-2n}(\varphi))^\perp.$$

En particulier, le polynôme P_{n+1} appartient à $E_{-2(n+1)}(\varphi)$, et donc P_{n+1} est vecteur propre de φ pour la valeur propre $-2(n+1)$, d'où il s'ensuit que $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{Q}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \varphi(P_i) = -2iP_i.$$

En particulier, on a trouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{la base } (P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est constituée de vecteurs propres de } \varphi.$$

Corrigé de l'exercice 3. On considère les fonctions φ et ψ définies pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t} - t \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \psi(t) = t - \frac{1}{t} - \ln(t).$$

Soit U la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par $U =]0, +\infty[^2 = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. On considère la fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in U$ par :

$$f(x, y) = x^y - y^x = e^{y \ln(x)} - e^{x \ln(y)}.$$

Dans cet exercice, on se propose de montrer que f n'admet aucun extremum sur U .

- (1) Justifions tout d'abord que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Comme $U =]0, +\infty[^2$, on voit que U est un produit de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, et donc :

$$\boxed{U \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2.}$$

A présent, montrons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Comme les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur U , qu'elles n'y prennent que des valeurs > 0 par construction de U et que la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $(x, y) \mapsto \ln(x)$ et $(x, y) \mapsto \ln(y)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Par produit, les fonctions $(x, y) \mapsto y \ln(x)$ et $(x, y) \mapsto x \ln(y)$ sont aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur U . Par composition avec l'exponentielle (qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$) puis par différence, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U.}$$

- (2) Etudions tout d'abord les variations de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par construction, la fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, on a pour tout $t > 0$:

$$\psi'(t) = \left(t - \frac{1}{t} - \ln(t) \right)' = 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - t + 1}{t^2}.$$

Comme le discriminant du trinôme $t^2 - t + 1$ est égal à $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$, ce dernier n'a pas de racine réelle et il est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$. Comme le coefficient de t^2 est > 0 , ce trinôme est > 0 sur $\mathbb{R}$, et donc $\psi'(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \psi \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* .}$$

A présent, calculons $\psi(1)$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\psi(1) = 1 - \frac{1}{1} - \ln(1) = 1 - 1 - 0 = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\psi(1) = 0.}$$

Enfin, précisons le signe de ψ . Comme la fonction ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\psi(1) = 0$, il s'ensuit que :

$$\boxed{\forall t \in]0, 1[, \psi(t) < 0 \text{ et } \forall t \in]1, +\infty[, \psi(t) > 0.}$$

- (3) Prouvons la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$ et calculons sa somme. Pour tout entier $n \geq 1$, on trouve par linéarité de la somme que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

Si l'on effectue le changement d'indice $l = k - 1$ dans la somme du milieu, on obtient par télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l!} - \frac{1}{n!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{n!}.$$

Dès lors, il s'ensuit après simplification que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$$

Comme $n!$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on obtient que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

En particulier, la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!}$ converge vers 1, et donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{n-1}{n!} \text{ est convergente, de somme égale à } 1.}$$

- (4) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Exprimons la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!}$ en fonction de $\varphi(t)$ et de $\ln(t)$ (on admettra la convergence de cette série). Par linéarité de la somme, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} - \frac{1}{t^{n-1}} - \ln(t^{n-1})}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{t^{n-1}}}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(t^{n-1})}{n!} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} t \frac{(\frac{1}{t})^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1) \ln(t)}{n!} \\
 &= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} - t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\frac{1}{t})^n}{n!} - \ln(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)}{n!}.
 \end{aligned}$$

D'après les propriétés des séries exponentielles, on obtient que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \frac{1}{t}(e^t - 1) - t\left(e^{\frac{1}{t}} - 1\right) - \ln(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)}{n!}.$$

D'après la question précédente et par définition de φ , on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln(t).}$$

- (5) Justifions que : $\forall t \in]0, 1[, \varphi(t) < \ln(t)$ et $\forall t \in]1, +\infty[, \varphi(t) > \ln(t)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $t > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = \varphi(t) - \ln(t).$$

Supposons tout d'abord que $0 < t < 1$. Comme $\psi(x) < 0$ pour tout $x \in]0, 1[$ d'après la question (2), et que t^{n-1} appartient à $]0, 1[$ pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in]0, 1[$, on voit que $\psi(t^{n-1}) < 0$ pour tout $n \geq 2$. Mais comme $t^0 = 1$ et que $\psi(1) = 0$, il s'ensuit que :

$$\varphi(t) - \ln(t) = \frac{\psi(t^0)}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = 0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} < 0.$$

Par conséquent, on en déduit que $\varphi(t) - \ln(t) < 0$ pour tout $t \in]0, 1[$, et donc :

$$\boxed{\forall t \in]0, 1[, \varphi(t) < \ln(t).}$$

Supposons maintenant que $t > 1$. Comme $\psi(x) > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$ d'après la question (2), et que t^{n-1} appartient à $]1, +\infty[$ pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in]0, 1[$, on voit que $\psi(t^{n-1}) > 0$ pour tout $n \geq 2$. Mais comme $t^0 = 1$ et que $\psi(1) = 0$, il s'ensuit que :

$$\varphi(t) - \ln(t) = \frac{\psi(t^0)}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} = 0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\psi(t^{n-1})}{n!} > 0.$$

Par conséquent, on en déduit que $\varphi(t) - \ln(t) > 0$ pour tout $t \in]1, +\infty[$, et donc :

$$\boxed{\forall t \in]1, +\infty[, \varphi(t) > \ln(t).}$$

- (6) Soit $(x, y) \in U$. Montrons que (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} x > 1, y > 1 \\ \ln(x) \ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x) \end{cases}.$$

Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x, y) &= (\partial_1(f)(x, y), \partial_2(f)(x, y)) \\
&= \left(\frac{y}{x} e^{y \ln(x)} - \ln(y) e^{x \ln(y)}, \ln(x) e^{y \ln(x)} - \frac{x}{y} e^{x \ln(y)} \right) \\
&= \left(\frac{y}{x} x^y - \ln(y) y^x, \ln(x) x^y - \frac{x}{y} y^x \right) \\
&= (yx^{y-1} - \ln(y)y^x, \ln(x)x^y - xy^{x-1}).
\end{aligned}$$

Dès lors, si $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des points critiques de f , ceci entraîne que :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \mathcal{C} &\iff (yx^{y-1} - \ln(y)y^x, \ln(x)x^y - xy^{x-1}) = (0, 0) \\
&\iff \begin{cases} yx^{y-1} - \ln(y)y^x = 0 \\ \ln(x)x^y - xy^{x-1} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y^{-(x-1)}x^{y-1} = \ln(y) \\ x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Comme x et y sont > 0 , on voit que $y^{-(x-1)}x^{y-1} = \ln(y) > 0$ et $x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) > 0$, et donc on obtient que $x > 1$ et $y > 1$, ce qui nous donne que :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \mathcal{C} &\iff \begin{cases} y^{-(x-1)}x^{y-1} = \ln(y) \\ x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^{-(x-1)}x^{y-1} = \ln(y) \\ x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Comme $y^{-(x-1)}x^{y-1} = \ln(y) > 0$, on trouve en remplaçant L_2 par $L_2 \times L_3$ que :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in \mathcal{C} &\iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^{-(x-1)}x^{y-1} = \ln(y) \\ x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^{-x+1+x-1}x^{y-1-y+1} = \ln(x) \ln(y) \\ x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ y^0 x^0 = \ln(x) \ln(y) \\ x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ \ln(x) \ln(y) = 1 \\ x^{-(y-1)}y^{x-1} = \ln(x) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ \ln(x) \ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \text{ si et seulement si } \begin{cases} x > 1, y > 1 \\ \ln(x) \ln(y) = 1 \\ y^{x-1} = x^{y-1} \ln(x) \end{cases}.$$

(7) Soit $(x, y) \in U$ un point critique de f . Justifions l'existence d'un réel $t > 0$ tel que :

$$x = e^t, \quad y = e^{\frac{1}{t}}, \quad \varphi(t) = \ln(t).$$

D'après la question précédente, on sait que $x > 1$. Dès lors, il existe un réel $t > 0$ tel que $x = e^t$, et donc $\ln(x) = \ln(e^t) = t$. En particulier, comme $\ln(x) \ln(y) = 1$, ceci entraîne que $\ln(y) = \frac{1}{t}$, et donc $y = e^{\frac{1}{t}}$. Par des calculs simples, on trouve alors que :

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \frac{e^t - 1}{t} - t \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) \\
 &= \frac{1}{t} \times (e^t - 1) - t \times \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) \\
 &= \ln(y)(x - 1) - \ln(x)(y - 1) \\
 &= \ln(y^{x-1}) - \ln(x^{y-1}) \\
 &= \ln(x^{y-1} \ln(x)) - \ln(x^{y-1}) \\
 &= \ln(x^{y-1}) + \ln(\ln(x)) - \ln(x^{y-1}) \\
 &= \ln(\ln(x)) \\
 &= \ln(\ln(e^t)) \\
 &= \ln(t).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, si $(x, y) \in U$ est un point critique de f , alors :

$$\boxed{\exists t > 0, \quad x = e^t, \quad y = e^{\frac{1}{t}}, \quad \varphi(t) = \ln(t).}$$

- (8) Prouvons que (e, e) est l'unique point critique de f . Pour ce faire, considérons un point critique (x, y) de f dans U . D'après la question précédente, il existe un réel $t > 0$ tel que $x = e^t$, $y = e^{\frac{1}{t}}$ et $\varphi(t) = \ln(t)$. Comme $\varphi(t) < \ln(t)$ pour tout $t \in]0, 1[$ et que $\varphi(t) > \ln(t)$ pour tout $t \in]1, +\infty[$ d'après la question (5), il s'ensuit que $t = 1$, et donc $x = e^1 = e$ et $y = e^1 = e$. En d'autres termes, on vient de montrer que le seul point critique éventuel de f sur U est le point (e, e) . Reste à vérifier que (e, e) est bien un point critique de f sur U . Par construction, on voit que $e > 0$, et donc (e, e) appartient bien à U . De plus, on trouve par des calculs simples que :

$$\begin{cases} e > 1, \quad e > 1 \\ \ln(e) \ln(e) = 1 \times 1 = 1 \\ e^{e-1} - e^{e-1} \ln(e) = e^{e-1} - e^{e-1} = 0 \end{cases}.$$

D'après la question (6), il s'ensuit que (e, e) est bien un point critique de f sur U . Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(e, e) \text{ est l'unique point critique de } f.}$$

- (9) Justifions que f n'admet aucun extremum sur U . D'après le cours, on sait que, si f admet un extremum sur U , alors cet extremum est atteint en un point critique de f sur U . En particulier, on voit avec les questions précédentes que cet extremum ne peut être atteint qu'au seul point critique de f sur U , à savoir le point (e, e) . Posons alors $g(t) = f(e, e + t)$ et $h(t) = f(e + t, e)$ pour tout $t > -e$. Par des calculs simples, on trouve que, pour tout $t > -e$:

$$g(t) + h(t) = f(e, e + t) + f(e + t, e) = e^{(e+t) \ln(e)} - e^{e \ln(e+t)} + e^{e \ln(e+t)} - e^{(e+t) \ln(e)} = 0.$$

En particulier, les expressions $g(t)$ et $h(t)$ sont de signes contraires pour tout $t > -e$. En outre, on voit que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -e, +\infty[$ comme composée et différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. De plus, on trouve par des calculs simples que :

$$\begin{cases} g'(t) &= (e^{e+t} - (e+t)^e)' &= e^{e+t} - e(e+t)^{e-1} \\ g''(t) &= (e^{e+t} - e(e+t)^{e-1})' &= e^{e+t} - e(e-1)(e+t)^{e-2} \end{cases}.$$

En particulier, on obtient pour $t = 0$ que :

$$\begin{cases} g'(0) &= e^{e+0} - e(e+0)^{e-1} &= e^e - e^e &= 0 \\ g''(0) &= e^{e+0} - e(e-1)(e+0)^{e-2} &= e^e - (e-1)e^{e-1} &= e^{e-1} \end{cases}.$$

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 appliquée à g en 0, on trouve qu'au voisinage de 0 :

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + o(t^2) = \frac{e^{e-1}}{2}t^2 + o(t^2).$$

Comme $g(t) + h(t) = 0$ pour tout $t > -e$, il s'ensuit qu'au voisinage de 0 :

$$h(t) = -g(t) = -\frac{e^{e-1}}{2}t^2 + o(t^2).$$

Comme le signe d'une fonction est donné par celui du premier terme non nul de son développement limité, on voit que $g(t) = f(e, e+t) > 0$ et $h(t) = f(e+t, e) < 0$ lorsque t est au voisinage de 0. En particulier, la fonction f prend des valeurs > 0 et < 0 au voisinage du point (e, e) . Mais comme $f(e, e) = 0$, il s'ensuit que f ne peut admettre ni maximum local, ni minimum local en (e, e) . Dès lors, la fonction f n'admet pas d'extremum local en (e, e) , et donc elle n'admet pas a fortiori d'extremum global en (e, e) . Par conséquent, on en déduit que :

la fonction f n'admet pas d'extremum sur U .

Corrigé du problème 1. Le problème suivant comporte trois parties.

Partie 1

(1) Soient x, y deux réels.

(a) Déterminons un équivalent simple de $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ au voisinage de 0. Comme $(1-t)^{y-1}$ tend vers 1 quand t tend vers 0 et que $1 \neq 0$, on voit que :

$$(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1.$$

Dès lors, ceci entraîne que :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1} \times 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}.$$

(b) Montrons que l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$. Comme la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1/2]$, l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ est impropre en 0. De plus, comme la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est positive sur $]0, 1/2]$ et que $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{x-1}$ d'après la question précédente, il s'ensuit par équivalence que les intégrales $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_0^{1/2} t^{x-1} dt$ sont de même nature. Mais comme l'intégrale de Riemann $\int_0^{1/2} t^{x-1} dt$ converge si et seulement si $x-1 > -1$, c'est-à-dire si $x > 0$, on en déduit que :

l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

(c) A l'aide du changement de variable $s = 1-t$, montrons que les intégrales $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$ sont de même nature. Tout d'abord, on voit que le changement de variable $s = 1-t$ est licite car il est affine, et de plus on a $ds = -dt$, s tend vers 0 quand t tend vers 1 et s tend vers $1/2$ quand t tend vers $1/2$. Dès lors, on obtient par changement de variable que les intégrales $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_{1/2}^0 (1-s)^{x-1}(1-(1-s))^{y-1}(-ds)$ sont de même nature. Or, on trouve avec la relation de Chasles et d'après la linéarité de l'intégrale que :

$$\int_{1/2}^0 (1-s)^{x-1}(1-(1-s))^{y-1}(-ds) = -\int_{1/2}^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}ds = \int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds.$$

Par conséquent, on en déduit que :

les intégrales $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ et $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$ sont de même nature.

- (d) Montrons que l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. Comme la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0, 1[$, l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est impropre en 0 et en 1, et donc elle converge si et seulement si les intégrales $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ et $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ convergent. D'après la question (1)(b), on sait que l'intégrale $\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$. De plus, d'après la question précédente, on sait aussi que les intégrales $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ et $\int_0^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds$ sont de même nature, et donc on obtient que l'intégrale $\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si $y > 0$. Par conséquent, on en déduit avec la relation de Chasles que :

l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose désormais :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

- (2) Montrons que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $B(x, y) = B(y, x)$. Tout d'abord, on voit que le changement de variable $s = 1 - t$ est licite car il est affine, et de plus on a $ds = -dt$, s tend vers 0 quand t tend vers 1 et s tend vers 1 quand t tend vers 0. Dès lors, comme l'intégrale $B(x, y)$ converge d'après la question (1), on obtient par changement de variable que :

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \int_1^0 (1-s)^{x-1}(1-(1-s))^{y-1}(-ds) \\ &= -\int_1^0 (1-s)^{x-1}s^{y-1}ds \\ &= \int_0^1 s^{y-1}(1-s)^{x-1}ds \\ &= B(y, x). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$B(x, y) = B(y, x).$

- (3) Calculons $B(x, 1)$ pour tout $x > 0$. Par définition, on voit que :

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{1-1}dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^0dt = \int_0^1 t^{x-1}dt.$$

En particulier, ceci nous donne que, pour tout $x > 0$:

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1}dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 t^{x-1}dt = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{t^x}{x} \right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{a^x}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$B(x, 1) = \frac{1}{x}.$

- (4) (a) Montrons que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a $B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)$. Par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\begin{aligned}
 B(x+1, y) + B(x, y+1) &= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\
 &= \int_0^1 [t^x (1-t)^{y-1} + t^{x-1} (1-t)^y] dt \\
 &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} [t + (1-t)] dt \\
 &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\
 &= B(x, y).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\boxed{B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)}.$$

- (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrons que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a :

$$xB(x, y+1) = yB(x+1, y).$$

Pour ce faire, on pose $u(t) = t^x/x$ et $v(t) = (1-t)^y$ pour tout $t \in]0, 1[$. Alors, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et de plus, on a $u'(t) = t^{x-1}$ et $v'(t) = -y(1-t)^{y-1}$ pour tout $t \in]0, 1[$. Dès lors, on obtient par intégration par parties et par linéarité de l'intégrale que, pour tous réels a, b tels que $0 < a < b < 1$:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b t^{x-1} (1-t)^y dt &= \int_a^b u'(t) v(t) dt \\
 &= [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt \\
 &= \left[\frac{t^x (1-t)^y}{x} \right]_a^b - \int_a^b \frac{-yt^x (1-t)^{y-1}}{x} dt \\
 &= \frac{b^x (1-b)^y}{x} - \frac{a^x (1-a)^y}{x} + \frac{y}{x} \int_a^b t^x (1-t)^{y-1} dt. \quad (*)
 \end{aligned}$$

Comme x et y sont des réels > 0 , on voit que :

$$\lim_{b \rightarrow 1} \frac{b^x (1-b)^y}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^x (1-a)^y}{x} = 0.$$

Dès lors, il s'ensuit par passage à la limite dans l'égalité (*) quand a tend vers 0 et quand b tend vers 1 que :

$$B(x, y+1) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt = \frac{y}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt = \frac{y}{x} B(x+1, y).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\boxed{xB(x, y+1) = yB(x+1, y)}.$$

- (c) Montrons que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$xB(x, y+1) = yB(x+1, y).$$

Comme $B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)$ d'après la question (4)(a), on a pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$yB(x+1, y) = xB(x, y+1) = x[B(x, y) - B(x+1, y)] = xB(x, y) - xB(x+1, y).$$

En particulier, ceci entraîne que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$(x+y)B(x+1, y) = xB(x, y).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y).$$

- (5) Montrons que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a : $B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$. Pour ce faire, on se fixe un entier $q > 0$, et on va montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(p)$ définie pour tout $p \geq 1$ par :

$$\mathcal{P}(p) : "B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}."$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. En effet, on trouve d'après les questions (2) et (3) que :

$$B(1, q) = B(q, 1) = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \frac{(1-1)!(q-1)!}{(1+q-1)!} = \frac{0!(q-1)!}{q!} = \frac{(q-1)!}{q \times (q-1)!} = \frac{1}{q},$$

et donc on a bien :

$$B(1, q) = \frac{(1-1)!(q-1)!}{(1+q-1)!}.$$

A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}$ vraie à un ordre $p \geq 1$, et montrons-la à l'ordre $p+1$. Par hypothèse de récurrence et d'après la question précédente, on obtient que :

$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \frac{p}{p+q} B(p, q) \\ &= \frac{p}{p+q} \times \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} \\ &= \frac{p(p-1)!(q-1)!}{(p+q)(p+q-1)!} \\ &= \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!}, \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $p \geq 1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}.$$

Partie 2

- (1) On définit la fonction Γ sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall \nu \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} t^{\nu-1} e^{-t} dt$. On rappelle que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $\nu > 0$, on a $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$.

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminons $\Gamma(n+1)$ en fonction de n . Pour ce faire, on va montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout $n \geq 0$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "\Gamma(n+1) = n!."$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, d'après les propriétés des intégrales exponentielles, on trouve que :

$$\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{1} = 1 = 0!.$$

A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}$ vraie à un ordre $n \geq 0$, et montrons-la à l'ordre $n+1$. Par hypothèse de récurrence et d'après la propriété rappelée en début de question, on obtient que :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+2) &= (n+1)\Gamma(n+1) \\ &= (n+1)n! \\ &= (n+1)!, \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \geq 0$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

- (b) Calculons $\Gamma(1/2)$. Pour ce faire, on pose $u = \sqrt{2t}$. Comme la fonction $t \mapsto \sqrt{2t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, le changement de variable est licite et de plus, on a $t = u^2/2$, $dt = u du$, u tend vers 0 quand t tend vers 0 et u tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Par changement de variable, on trouve que :

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{1/2-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (u^2/2)^{-1/2} e^{-u^2/2} u du.$$

Par linéarité de l'intégrale, ceci nous donne que :

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}u}{u} e^{-u^2/2} du = \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-u^2/2} du = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Comme la fonction $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est paire, ceci entraîne que :

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Mais comme l'intégrale gaussienne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$ est égale à $\sqrt{2\pi}$, il s'ensuit que :

$$\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{\sqrt{4\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.}$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit $f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0 \end{cases}$.

- (2) (a) Justifions que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge. Comme la fonction $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, 0]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 f_{a,b}(t) dt$ converge et est nulle. De plus, comme la fonction $f_{a,b}$ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$. Posons alors $u = bt$. Comme u est une fonction affine de t , ce changement de variable est licite et de plus, on a $du = b dt$, u tend vers 0 quand t tend vers 0 et u tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Dès lors, on obtient par changement de variable que les intégrales $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(u/b) du/b$ sont de même nature. Or, on trouve par des calculs simples que :

$$\int_0^{+\infty} f_{a,b}(u/b) du/b = \int_0^{+\infty} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{u}{b}\right)^{a-1} e^{-bu/b} \frac{du}{b} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-u} du.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du$ converge en tant que valeur de la fonction Γ d'Euler, on obtient par linéarité de l'intégrale que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-u} du$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge. Par conséquent, on en déduit d'après la relation de Chasles que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt \text{ converge.}}$$

- (b) Montrons que $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

- Tout d'abord, comme la fonction $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, 0]$, elle est positive sur $] -\infty, 0]$. De plus, comme $f_{a,b}(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$ pour tout $t > 0$, on voit que $f_{a,b}$ est positive sur $]0, +\infty[$, et donc $f_{a,b}$ est positive sur $\mathbb{R}$.
- Par ailleurs, comme la fonction $f_{a,b}$ est nulle sur $] -\infty, 0]$, elle est continue sur $] -\infty, 0]$. En outre, comme $f_{a,b}(t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-bt}$ pour tout $t > 0$, on voit que $f_{a,b}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$, et donc $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- Reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t) dt$ converge et est égale à 1. D'après la question précédente, on sait déjà que cette intégrale converge. De plus, toujours d'après la question précédente, on sait aussi que :

$$\int_{-\infty}^0 f_{a,b}(t) dt = 0.$$

D'après la question précédente, on sait de même que :

$$\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-u} du.$$

Par linéarité de l'intégrale et par définition de la fonction Γ d'Euler, il s'ensuit que :

$$\int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a)} = 1.$$

D'après la relation de Chasles, ceci entraîne que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = \int_{-\infty}^0 f_{a,b}(t)dt + \int_0^{+\infty} f_{a,b}(t)dt = 0 + 1 = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

(3) (a) Soit X une variable aléatoire à densité, de densité $f_{a,1}$. Par définition, on voit que :

$$f_{a,1} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{X \hookrightarrow \gamma(a), \quad E(X) = a, \quad V(X) = a.}$$

(b) Soit Y une variable aléatoire à densité, de densité $f_{1,b}$. Par définition, on voit que :

$$f_{1,b} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{b^1}{\Gamma(1)} t^{1-1} e^{-bt} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Comme $\Gamma(1) = 0! = 1$ d'après la question (1)(a) de la partie 2, on obtient que :

$$f_{1,b} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ be^{-bt} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{E}(b), \quad E(Y) = \frac{1}{b}.}$$

Montrons maintenant que Y admet une variance et calculons-la. Par transfert, la variable aléatoire Y admet une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t)dt$ converge absolument. Comme la fonction $t \mapsto t^2 f_{1,b}(t)$ est nulle sur $] -\infty, 0]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 t^2 f_{1,b}(t)dt$ converge et est nulle. De plus, comme la fonction $t \mapsto t^2 f_{1,b}(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t)dt$ est impropre en $+\infty$. Posons alors $u = bt$. Comme u est une fonction affine de t , ce changement de variable est licite et de plus, on a $du = bdt$, u tend vers 0 quand t tend vers 0 et u tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$. Dès lors, on obtient par changement de variable que les intégrales $\int_0^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} (u/b)^2 f_{1,b}(u/b)du/b$ sont de même nature. Or, on trouve par des calculs simples que :

$$\int_0^{+\infty} (u/b)^2 f_{1,b}(u/b)du/b = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{b}\right)^2 be^{-bu/b} \frac{du}{b} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{b^2} u^2 e^{-u} du.$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du$ converge en tant que valeur de la fonction Γ d'Euler, on obtient par linéarité de l'intégrale que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{b^2} u^2 e^{-u} du$ converge, et donc $\int_0^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t)dt$ converge. Par conséquent, on en déduit d'après la relation de Chasles que $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t)dt$ converge, et donc :

$$\boxed{\text{la variable aléatoire } Y \text{ admet une variance.}}$$

Toujours d'après le théorème de transfert et la relation de Chasles, on trouve que :

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t)dt = \int_{-\infty}^0 t^2 f_{1,b}(t)dt + \int_0^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t)dt.$$

D'après le changement de variable précédent et par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 E(Y^2) &= 0 + \int_0^{+\infty} t^2 f_{1,b}(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} (u/b)^2 f_{1,b}(u/b) du/b \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{b^2} u^2 e^{-u} du \\
 &= \frac{1}{b^2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du \\
 &= \frac{1}{b^2} \Gamma(3).
 \end{aligned}$$

D'après la question (1)(a) de la partie 2, on obtient que :

$$E(Y^2) = \frac{1}{b^2} \Gamma(3) = \frac{1}{b^2} (3-1)! = \frac{2}{b^2}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on trouve que :

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{b^2} - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{V(Y) = \frac{1}{b^2}.$$

(4) Soit X une variable aléatoire à densité, de densité $f_{a,b}$.

(a) Déterminons la loi de la variable aléatoire bX . Comme $b > 0$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{bX}(x) = P(bX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{b}\right) = F_X\left(\frac{x}{b}\right).$$

Comme X est à densité, de densité $f_{a,b}$, la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Par composition avec la fonction $x \mapsto x/b$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), la fonction $x \mapsto F_X(x/b)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et donc bX est une variable aléatoire à densité. De plus, on obtient par dérivation que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f_{bX}(x) = \left(F_X\left(\frac{x}{b}\right)\right)' = (F_X)'\left(\frac{x}{b}\right) \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{x}{b}\right).$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\begin{aligned}
 f_{bX}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{b^a}{\Gamma(a)b} \left(\frac{x}{b}\right)^{a-1} e^{-bx/b} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{b^a}{\Gamma(a)b^a} x^{a-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{bX \hookrightarrow \gamma(a).$$

(b) Montrons que X admet une espérance et une variance et déterminons-les. Comme la variable aléatoire bX suit la loi $\gamma(a)$, on sait qu'elle admet une espérance et une variance. Dès lors, comme $X = \frac{1}{b} \times bX$, on obtient que X admet une espérance et une variance. De plus, comme bX suit la loi $\gamma(a)$, on voit par linéarité de l'espérance que :

$$E(X) = E\left(\frac{1}{b} \times bX\right) = \frac{1}{b} E(bX) = \frac{a}{b}.$$

En outre, comme bX suit la loi $\gamma(a)$, on obtient que :

$$V(X) = V\left(\frac{1}{b} \times bX\right) = \frac{1}{b^2} V(bX) = \frac{a}{b^2}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$X \text{ admet une espérance et une variance et : } E(X) = \frac{a}{b}, \quad V(X) = \frac{a}{b^2}.$$

- (5) Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires à densité, indépendantes et de densités respectives $f_{a_1,b}$ et $f_{a_2,b}$, où a_1, a_2, b sont trois réels > 0 .

- (a) Montrons que $X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Comme X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes et à densité, une densité f de $X_1 + X_2$ est donnée par le produit de convolution, lequel est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(x-t) dt.$$

On distingue alors deux cas :

Premier cas : $x \leq 0$

Dans ce cas, on voit que $f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$, et donc :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Deuxième cas : $x > 0$

Dans ce cas, on voit que $f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(x-t) \neq 0$ si et seulement si $t \in [0, x]$, et donc on obtient par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(x-t) dt \\ &= \int_0^x f_{a_1,b}(t) f_{a_2,b}(x-t) dt \\ &= \int_0^x \frac{b^{a_1}}{\Gamma(a_1)} t^{a_1-1} e^{-bt} \frac{b^{a_2}}{\Gamma(a_2)} (x-t)^{a_2-1} e^{-b(x-t)} dt \\ &= \int_0^x \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1} e^{-b(t+x-t)} dt \\ &= \int_0^x \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1} e^{-bx} dt \\ &= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^x t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1} dt \end{aligned}$$

Posons alors $t = xu$. Comme t est une fonction affine de u , ce changement de variable est licite et de plus, on a $dt = xdu$, u tend vers 0 quand t tend vers 0 et u tend vers 1 quand t tend vers x . Dès

lors, on obtient par changement de variable que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^x t^{a_1-1} (x-t)^{a_2-1} dt \\
&= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^1 (xu)^{a_1-1} (x-xu)^{a_2-1} x du \\
&= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^1 x^{a_1+a_2-2+1} u^{a_1-1} (1-u)^{a_2-1} du \\
&= \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} \int_0^1 x^{a_1+a_2-1} u^{a_1-1} (1-u)^{a_2-1} du.
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, ceci entraîne que :

$$f(x) = \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} x^{a_1+a_2-1} \int_0^1 u^{a_1-1} (1-u)^{a_2-1} du.$$

Mais par définition de B , il s'ensuit que :

$$f(x) = \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} e^{-bx} x^{a_1+a_2-1} B(a_1, a_2).$$

Par conséquent, on en déduit que $X_1 + X_2$ admet pour densité la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- (b) Montrons que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on a : $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. Pour ce faire, considérons deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes et à densité, de densités respectives $f_{a_1, b}$ et $f_{a_2, b}$, où a_1, a_2, b sont trois réels > 0 . Comme la fonction f de la question précédente est une densité de probabilité, on voit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, ceci entraîne par linéarité de l'intégrale que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = \frac{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = 1.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$\int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)}. \quad (1)$$

De même, considérons une variable aléatoire X à densité, de densité $f_{a_1+a_2, b}$. Comme la fonction $f_{a_1+a_2, b}$ est une densité de probabilité, on voit que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a_1+a_2, b}(x) dx = 1.$$

Comme $f_{a_1+a_2, b}$ est nulle sur $\mathbb{R}_-$, ceci entraîne par linéarité de l'intégrale que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1+a_2)} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = \frac{b^{a_1+a_2}}{\Gamma(a_1+a_2)} \int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = 1.$$

En particulier, il s'ensuit que :

$$\int_0^{+\infty} x^{a_1+a_2-1} e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{b^{a_1+a_2}}. \quad (2)$$

En d'autres termes, les égalités (1) et (2) nous donnent que :

$$\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{b^{a_1+a_2} B(a_1, a_2)} = \frac{\Gamma(a_1+a_2)}{b^{a_1+a_2}}.$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que, pour tout $(a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$B(a_1, a_2) = \frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}.$$

- (c) Calculons la valeur de $B(1/2, 1/2)$. D'après la question précédente, on trouve que :

$$B(1/2, 1/2) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2 + 1/2)} = \frac{(\Gamma(1/2))^2}{\Gamma(1)}.$$

Comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma(1) = 0! = 1$ d'après les questions (1)(a) et (1)(b) de la partie 2, on a :

$$B(1/2, 1/2) = \frac{(\Gamma(1/2))^2}{\Gamma(1)} = \frac{(\sqrt{\pi})^2}{1}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{B(1/2, 1/2) = \pi.}$$

Partie 3

Dans cette partie, on suppose que, pour les questions d'informatique, les bibliothèques `numpy` et `numpy.random` ont été importées.

- (1) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

- (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrons que $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance et calculons-la en fonction de x, y . Par transfert, la variable aléatoire $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1} f_U(t) dt$ converge absolument. Comme U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, on voit que f_U est nulle en dehors de $]0, 1[$ et vaut 1 sur $]0, 1[$, et donc $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge absolument. A noter que la convergence absolue équivaut à la convergence ici car la fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est positive sur $]0, 1[$. Comme cette intégrale correspond à $B(x, y)$ par définition, laquelle converge d'après la question (1)(d) de la partie 1, il s'ensuit que :

la variable aléatoire $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$ admet une espérance.

De plus, toujours par transfert, on voit que :

$$E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{x-1}(1-t)^{y-1} f_U(t) dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = B(x, y).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E(U^{x-1}(1-U)^{y-1}) = B(x, y).}$$

- (b) Ecrivons une fonction en Python, notée `simul`, qui prend en entrée deux réels $x, y > 0$ et qui renvoie une simulation de $U^{x-1}(1-U)^{y-1}$. Pour ce faire, on procède comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(x,y):
    u=rd.random()
    s=(u**(x-1))*((1-u)**(y-1))
    return s
```

- (c) Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $]0, 1[$. Ecrivons une fonction en Python, notée `simul2`, qui prend en entrée deux réels $x, y > 0$ et un entier $n \geq 1$, et qui renvoie une simulation de la variable aléatoire :

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i^{x-1}(1-U_i)^{y-1}.$$

Pour ce faire, on procède comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul2(x,y,n):
    u=rd.random(n)
    r=np.mean((u**(x-1))*((1-u)**(y-1)))
    return r
```

- (2) Soit a un réel ≥ 1 .

- (a) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. Montrons que X^{a-1} admet une espérance et une variance et donnons-les. Par transfert, la variable aléatoire X^{a-1} admet une espérance et une variance si et seulement si elle admet un moment d'ordre 2, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2(a-1)} f_X(t) dt$ converge absolument. Comme X suit la loi exponentielle de paramètre 1, on voit que f_X est nulle sur $] -\infty, 0]$ et que $f_X(t) = e^{-t}$ pour tout $t > 0$, et donc X^{a-1} admet un moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{2(a-1)} e^{-t} dt$ converge absolument. A noter que la convergence absolue équivaut à la convergence ici car la fonction $t \mapsto t^{2(a-1)} e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme cette intégrale correspond à $\Gamma(2a-1)$ par définition, laquelle converge d'après la question (1) de la partie 2 car $2a-1 \geq 1 > 0$ vu que $a \geq 1$ par hypothèse, il s'ensuit que la variable aléatoire X^{a-1} admet un moment d'ordre 2, et donc :

la variable aléatoire X^{a-1} admet une espérance et une variance.

De plus, toujours par transfert, on voit que :

$$E(X^{a-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{a-1} f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \Gamma(a).$$

De nouveau par transfert, on obtient que :

$$E(X^{2(a-1)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2(a-1)} f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} t^{2a-2} e^{-t} dt = \Gamma(2a-1).$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on trouve que :

$$V(X^{a-1}) = E(X^{2(a-1)}) - (E(X^{a-1}))^2 = \Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$E(X^{a-1}) = \Gamma(a) \text{ et } V(X^{a-1}) = \Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2.$$

- (b) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{a-1}.$$

Montrons que M admet une espérance et une variance et calculons-les. Comme X_i^{a-1} admet une espérance et une variance d'après la question précédente, et que M_n est une combinaison linéaire de telles variables aléatoires, on voit que :

M_n admet une espérance et une variance.

De plus, toujours d'après la question précédente, on a par linéarité de l'espérance que :

$$E(M_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{a-1}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i^{a-1}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Gamma(a) = \Gamma(a).$$

En outre, comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, les variables aléatoires $X_1^{a-1}, \dots, X_n^{a-1}$ sont aussi indépendantes d'après le lemme des coalitions. En particulier, comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la même loi par hypothèse, les variables aléatoires $X_1^{a-1}, \dots, X_n^{a-1}$ suivent aussi toutes la même loi. Elles ont donc toutes la même variance, ce qui nous donne que :

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{a-1}\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n X_i^{a-1}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i^{a-1}) = \frac{V(X_1^{a-1})}{n}.$$

Avec la question précédente, il s'ensuit que :

$$V(M_n) = \frac{V(X_1^{a-1})}{n} = \frac{\Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2}{n}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$E(M_n) = \Gamma(a) \text{ et } V(M_n) = \frac{\Gamma(2a-1) - \Gamma(a)^2}{n}.$$

- (c) Expliquons ce que renvoie la fonction `myst` suivante :

```
def myst(n):
    u=rd.random(n)
    x=-np.log(1-u)
    return x
```

Par définition, la fonction `myst` renvoie n simulations indépendantes de variables aléatoires suivant la même loi que $Z = -\ln(1 - U)$, où U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$. Reste à déterminer la loi de Z . Comme U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, on voit que $1 - U$ prend ses valeurs dans $]0, 1[$, et donc Z ne prend que des valeurs positives. En particulier, on a $F_Z(x) = 0$ pour tout $x < 0$. De plus, si $x \geq 0$, alors on trouve par croissance de l'exponentielle que :

$$\begin{aligned}
 F_Z(x) &= P(Z \leq x) \\
 &= P(-\ln(1 - U) \leq x) \\
 &= P(\ln(1 - U) \geq -x) \\
 &= P(1 - U \geq e^{-x}) \\
 &= P(U \leq 1 - e^{-x}).
 \end{aligned}$$

Comme $x \geq 0$, on voit que $0 \leq 1 - e^{-x} \leq 1$. Dès lors, comme U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, il s'ensuit que $F_Z(x) = 1 - e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$, et donc Z suit la loi exponentielle de paramètre 1. Par conséquent, on en déduit que :

la fonction `myst` renvoie n simulations indépendantes de la loi $\mathcal{E}(1)$.

- (d) Complétons la fonction suivante pour qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire M_n :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulmyst(n,a):
    x=myst(n)
    ..... (plusieurs lignes sont possibles)
```

A noter que M_n est la moyenne de $X_1^{a-1}, \dots, X_n^{a-1}$, où les X_i sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 1. Comme la fonction de la question précédente renvoie n simulations indépendantes de la loi $\mathcal{E}(1)$, on pourra donc procéder comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulmyst(n,a):
    x=myst(n)
    m=np.mean(x**(a-1))
    return m
```

2. Sujet type HEC-ESCP (maths II)

Corrigé du problème 2. Dans ce problème, toutes les variables aléatoires qui interviennent sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et elles sont à valeurs réelles. L'espérance d'un variable aléatoire X est notée $E(X)$, et on admet les résultats suivants :

- Toute variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ admet une espérance égale à $\frac{1}{\lambda}$ et une variance égale à $\frac{1}{\lambda^2}$.
- La somme de n variables aléatoires réelles indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ suit la loi $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, n)$ de densité g définie par $g(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$ si $t > 0$, et par 0 sinon.
- *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev* : Pour toute variable aléatoire X admettant une variance et pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Partie I : Définition de l'application L .

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ converge absolument, et soit F l'espace vectoriel des fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément f de E et tout réel $x > 0$, on pose :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

Enfin, pour tout réel $\lambda \geq 0$, on désigne par ε_λ la fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $\varepsilon_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$.

- (1) Vérifions que E est un espace vectoriel. Considérons l'espace vectoriel F_0 des fonctions de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Comme E est un sous-ensemble de F_0 , il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de F_0 . Pour ce faire, on peut commencer par remarquer que E n'est pas vide. En effet, il contient la fonction nulle sur $[0, +\infty[$, puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} 0 dt$ converge absolument pour tout réel $x > 0$. De plus, on voit que E est stable par combinaisons linéaires. En effet, soient f et g deux éléments de E , soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soit x un réel > 0 quelconque. Comme f, g sont continues sur $[0, +\infty[$, $\lambda f + \mu g$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme combinaison linéaire de fonctions continues. De plus, comme les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} g(t) dt$ convergent absolument, on sait que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-xt} |g(t)| dt$ convergent. Or, d'après l'inégalité triangulaire, on voit que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|\lambda f(t)e^{-xt} + \mu g(t)e^{-xt}| \leq |\lambda| |f(t)| e^{-xt} + |\mu| |g(t)| e^{-xt}.$$

Dès lors, il s'ensuit par linéarité que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (|\lambda| |f(t)| e^{-xt} + |\mu| |g(t)| e^{-xt}) dt$ converge. En particulier, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\lambda f(t)e^{-xt} + \mu g(t)e^{-xt}| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} [\lambda f(t) + \mu g(t)] e^{-xt} dt$ converge absolument. Mais comme ceci est vrai pour tout $x > 0$, il s'ensuit que $\lambda f + \mu g$ appartient à E , et donc E est stable par combinaisons linéaires. Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de F_0 , et donc :

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$

- (2) Vérifions que E contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$. Pour ce faire, considérons une fonction f continue et bornée sur $[0, +\infty[$ et un réel $x > 0$ quelconque. Alors la fonction $t \mapsto |e^{-xt} f(t)|$ est continue sur $[0, +\infty[$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} |e^{-xt} f(t)| dt$ est a priori bien définie et présente une impropriété en $+\infty$. De plus, comme f est bornée sur $[0, +\infty[$, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |f(t)| \leq M.$$

Par multiplication avec e^{-xt} , on obtient que, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$|e^{-xt} f(t)| \leq M e^{-xt}.$$

Par ailleurs, pour tout $y > 0$, on voit que :

$$\int_0^y M e^{-xt} dt = \left[-\frac{M e^{-xt}}{x} \right]_0^y = -\frac{M e^{-xy}}{x} + \frac{M}{x}.$$

Comme $x > 0$, on voit que e^{-xy} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} M e^{-xt} dt$ converge. Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |e^{-xt} f(t)| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales

de fonctions positives, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge absolument. Mais comme ceci est vrai pour tout $x > 0$, on en déduit que f appartient à E , et donc :

E contient les fonctions continues et bornées sur $[0, +\infty[$.

- (3) Vérifions que L est une application linéaire de E dans F . Tout d'abord, on voit que, pour tout $f \in E$, l'expression $L(f)(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$, puisqu'il s'agit d'une intégrale absolument convergente (et donc convergente). En particulier, $L(f)$ est bien une application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et donc L est une application de E dans F . Reste à montrer que L est linéaire. Soient f et g deux éléments de E , soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soit x un réel > 0 quelconque. D'après la question (1), les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} [\lambda f(t) + \mu g(t)]e^{-xt}dt$ convergent absolument, et donc elles convergent. Dès lors, par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} [\lambda f(t) + \mu g(t)]e^{-xt}dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt + \mu \int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)dt,$$

d'où il s'ensuit que $L(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda L(f)(x) + \mu L(g)(x)$ pour tout $x > 0$, et donc :

$$L(\lambda f + \mu g) = \lambda L(f) + \mu L(g).$$

Par conséquent, on en déduit que :

L est une application linéaire de E dans F .

- (4) Montrons que ε_λ appartient à E pour tout $\lambda \geq 0$, puis calculons $L(\varepsilon_\lambda)(x)$ pour tout $x > 0$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on voit que la fonction ε_λ est continue et bornée (par 1) sur $[0, +\infty[$. D'après la question (2), il s'ensuit que :

ε_λ appartient à E pour tout $\lambda \geq 0$.

De plus, d'après les calculs de la question (2), on sait que, pour tout $x' > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x't}dt$ converge et que, de plus :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x't}dt = \frac{1}{x'}.$$

Si l'on pose $x' = x + \lambda$, alors on voit que $x' > 0$ car $x > 0$ et $\lambda \geq 0$, et que de plus :

$$L(\varepsilon_\lambda)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t}dt = \frac{1}{x + \lambda}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$L(\varepsilon_\lambda)(x) = \frac{1}{x + \lambda}.$$

- (5) Montrons que, pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $f \in E$, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ appartient aussi à E , et vérifions que :

$$\forall x > 0, \quad L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda).$$

Pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $f \in E$, on voit que la fonction $\varepsilon_\lambda f$ est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues. De plus, pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0, +\infty[$, on trouve que :

$$f(t)\varepsilon_\lambda(t)e^{-xt} = f(t)e^{-\lambda t}e^{-xt} = f(t)e^{-(x+\lambda)t}.$$

Si l'on pose $x' = x + \lambda$, alors on voit que $x' > 0$ car $x > 0$ et $\lambda \geq 0$. Mais comme f appartient à E , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-x't}dt$ converge absolument, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\varepsilon_\lambda(t)e^{-xt}dt$ aussi. Comme ceci est vrai pour tout $x > 0$, il s'ensuit que :

pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $f \in E$, la fonction $\varepsilon_\lambda f$ appartient aussi à E .

En outre, d'après les calculs ci-dessus, on trouve que :

$$L(\varepsilon_\lambda f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\varepsilon_\lambda(t)e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}e^{-xt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(x+\lambda)t}dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$L(\varepsilon_\lambda f)(x) = L(f)(x + \lambda).$$

- (6) Soit H une fonction appartenant à E , de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Montrons qu'alors la fonction H' appartient aussi à E , puis que, pour tout $x > 0$, on a :

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x).$$

Pour ce faire, fixons un réel $y > 0$, et posons $u(t) = H(t)$ et $v(t) = e^{-xt}$ pour tout $t \in [0, y]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, y]$, et de plus : $u'(t) = H'(t)$ et $v'(t) = -xe^{-xt}$ pour tout $t \in [0, y]$. Par intégration par parties et linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$\begin{aligned} \int_0^y H'(t)e^{-xt} dt &= \int_0^y u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^y - \int_0^y u(t)v'(t) dt \\ &= [H(t)e^{-xt}]_0^y - \int_0^y -xH(t)e^{-xt} dt \\ &= H(y)e^{-xy} - H(0) + x \int_0^y H(t)e^{-xt} dt. \end{aligned}$$

Comme H est bornée sur $[0, +\infty[$ et que e^{xy} tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$ (car $x > 0$), il s'ensuit que $H(y)e^{xy}$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$. Comme de plus H appartient à E , l'intégrale $\int_0^{+\infty} H(t)e^{-xt} dt$ converge absolument (et donc converge). En particulier, la fonction $y \mapsto \int_0^y H(t)e^{-xt} dt$ admet une limite finie en $+\infty$, ce qui entraîne d'après les calculs ci-dessus que la fonction $y \mapsto \int_0^y H'(t)e^{-xt} dt$ admet aussi une limite finie en $+\infty$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} H'(t)e^{-xt} dt$ converge. À noter que, comme H est croissante sur $[0, +\infty[$, la fonction H' est positive sur $[0, +\infty[$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} H'(t)e^{-xt} dt$ converge absolument (puisque'elle converge et que la fonction à intégrer est positive). Dès lors, il s'ensuit que :

$$\boxed{\text{la fonction } H' \text{ appartient à } E.}$$

De plus, par passage à la limite quand y tend vers $+\infty$ dans les calculs ci-dessus, on obtient que :

$$\int_0^{+\infty} H'(t)e^{-xt} dt = -H(0) + x \int_0^{+\infty} H(t)e^{-xt} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x).}$$

- (7) Soit $f \in E$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ appartient aussi à E . Tout d'abord, on peut remarquer que cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues. Ensuite, fixons un réel $x > 0$, un entier $n > 0$ (le cas $n = 0$ étant trivial), posons $z = \frac{x}{2}$ et considérons l'application g définie pour tout $t \in [0, +\infty[$ par :

$$g(t) = t^n e^{-zt}.$$

Alors, on voit que l'application est dérivable sur $[0, +\infty[$, et que de plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$g'(t) = nt^{n-1}e^{-zt} - zt^n e^{-zt} = t^{n-1}e^{-zt}[n - zt].$$

Comme $z > 0$ par construction, on trouve que g' est positive sur $[0, \frac{n}{z}]$ et négative sur $[\frac{n}{z}, +\infty[$. En particulier, la fonction g est croissante sur $[0, \frac{n}{z}]$ et décroissante sur $[\frac{n}{z}, +\infty[$, et donc elle admet un maximum M sur $[0, +\infty[$. Mais comme g est positive sur $[0, +\infty[$, il s'ensuit que $0 \leq g(t) \leq M$ pour tout $t \in [0, +\infty[$, et donc g est bornée (par M) sur $[0, +\infty[$. Dès lors, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a :

$$|t^n f(t)e^{-xt}| = |g(t)f(t)e^{-zt}| \leq M|f(t)e^{-zt}|.$$

Comme f appartient à l'espace vectoriel E , on sait que Mf appartient aussi à E . Comme de plus $z > 0$, on voit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} M|f(t)|e^{-zt} dt$ converge (puisque $\int_0^{+\infty} Mf(t)e^{-zt} dt$ converge absolument). Dès lors, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |t^n f(t)e^{-xt}| dt$ converge d'après le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-xt} dt$ converge absolument. Mais comme ceci est vrai pour tout réel $x > 0$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\text{si } f \in E, \text{ alors la fonction } t \mapsto t^n f(t) \text{ appartient aussi à } E.}$$

Partie II : Dérivabilité de la fonction $L(f)$.

Dans toute cette partie, on considère un réel $x > 0$, et une fonction f appartenant à E . Soit h un réel non nul tel que $|h| < \frac{x}{2}$.

(1) Pour tout réel $t > 0$, justifions l'inégalité :

$$\left| e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \right| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{-\frac{xt}{2}}.$$

Pour ce faire, on fixe un réel $t > 0$. D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction $g : y \mapsto e^{-yt}$ sur l'intervalle $[x, x+h]$, il existe un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$g(x+h) - g(x) - hg'(x) = \frac{1}{2} g''(x+\theta h) h^2,$$

ce qui se réécrit sous la forme :

$$e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} = \frac{h^2 t^2}{2} e^{-(x+\theta h)t}.$$

En passant aux valeurs absolues, on obtient que :

$$\left| e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \right| = \frac{h^2 t^2}{2} e^{-(x+\theta h)t}.$$

Comme $|h| < \frac{x}{2}$, on voit que $-\frac{x}{2} < h < \frac{x}{2}$ et donc $-\frac{x}{2} < \theta h < \frac{x}{2}$ (vu que $\theta \in]0, 1[$), d'où l'encadrement :

$$\frac{x}{2} < x + \theta h < \frac{3x}{2}.$$

Comme $t > 0$ et que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il s'ensuit que :

$$e^{-\frac{3x}{2}t} < e^{-(x+\theta h)t} < e^{-\frac{x}{2}t}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\left| e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt} \right| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{-\frac{xt}{2}}.}$$

(2) Pour tout réel $T > 0$, justifions l'inégalité :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.$$

D'après l'inégalité triangulaire pour l'intégrale, on trouve que :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \int_0^T \left| \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}}{h} \right| |f(t)| dt.$$

D'après la question précédente et la croissance de l'intégrale, on obtient que :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \int_0^T \frac{|h| t^2}{2} e^{-\frac{xt}{2}} |f(t)| dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on trouve alors que :

$$\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^T t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.$$

D'après la question (7) de la partie (1), on sait que, comme f appartient à E , la fonction $t \mapsto t^2 f(t)$ appartient aussi à E , et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-\frac{xt}{2}} dt$ converge absolument (car $\frac{x}{2} > 0$). De plus, d'après la relation de Chasles, on voit que :

$$\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt = \int_0^T t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt + \int_T^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.$$

Par positivité de l'intégrale, on obtient que $\int_T^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt \geq 0$, et donc :

$$\int_0^T t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt \leq \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\left| \int_0^T \left(\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{h} f(t) + te^{-xt} f(t) \right) dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.}$$

- (3) Montrons que la fonction $L(f)$ est dérivable en x , et que son nombre dérivé en x est égal à :

$$(L(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

Pour ce faire, pour tous réels $T, x > 0$, on pose :

$$A_T(x) = \int_0^T e^{-xt} f(t) dt \quad \text{et} \quad B_T(x) = - \int_0^T t e^{-xt} f(t) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, l'inégalité de la question précédente se réécrit sous la forme :

$$\left| \frac{A_T(x+h) - A_T(x)}{h} - B_T(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.$$

Comme $f \in E$, on sait que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-(x+h)t} f(t) dt$ convergent (vu qu'elles convergent absolument car $x, x+h > 0$), et donc les expressions $A_T(x)$ et $A_T(x+h)$ tendent respectivement vers $L(f)(x)$ et $L(f)(x+h)$ quand T tend vers $+\infty$. De plus, d'après la question (7) de la partie (1), l'intégrale $-\int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt$ converge (vu qu'elle converge absolument car $x > 0$), et donc l'expression $B_T(x)$ tend vers $-L(g)(x)$ quand T tend vers $+\infty$, où $g : t \mapsto t f(t)$. Dès lors, par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus quand T tend vers $+\infty$, on obtient que :

$$\left| \frac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} + L(g)(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| e^{-\frac{xt}{2}} dt.$$

Comme l'expression de droite ci-dessus tend vers 0 quand h tend vers 0, il s'ensuit que c'est aussi le cas pour celle de gauche, et donc :

$$\frac{L(f)(x+h) - L(f)(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -L(g)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$L(f) \text{ est dérivable en } x, \text{ et de plus : } (L(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

- (4) Montrons que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, donnons à l'aide d'une intégrale la valeur de la dérivée k -ème de $L(f)$ en x . Pour ce faire, on va montrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "L(f) \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } : \forall x > 0, \quad L(f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente. A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on sait que $L(f)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x > 0$, on a :

$$L(f)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt.$$

Considérons alors l'application $g : t \mapsto t^n f(t)$. Comme f appartient à E , on sait que g appartient à E d'après la question (7) de la partie (1), et l'on voit de plus que, pour tout $x > 0$:

$$L(f)^{(n)}(x) = (-1)^n L(g)(x).$$

Mais comme g appartient à E , il s'ensuit d'après la question précédente que la fonction $L(g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et que de plus, pour tout $x > 0$:

$$(L(g))'(x) = - \int_0^{+\infty} t g(t) e^{-xt} dt = - \int_0^{+\infty} t^{n+1} f(t) e^{-xt} dt.$$

Dès lors, la fonction $L(f)^{(n)} = (-1)^n L(g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, pour tout $x > 0$:

$$\left(L(f)^{(n)} \right)'(x) = -(-1)^n \int_0^{+\infty} t^{n+1} f(t) e^{-xt} dt = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} f(t) e^{-xt} dt.$$

En particulier, la fonction $L(f)$ est $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus, pour tout $x > 0$:

$$L(f)^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} t^{n+1} f(t) e^{-xt} dt,$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, comme $L(f)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que :

la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, on en déduit que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t) e^{-xt} dt.$$

A noter que cette formule est encore vraie pour $k = 0$, et ce par définition de $L(f)$.

Partie III : Injectivité de l'application $L : f \mapsto L(f)$.

Dans toute cette partie, on considère un réel $x > 0$, et une fonction $f \in E$ continue et bornée sur $[0, +\infty[$. On désigne par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$ (et donc d'espérance x). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

- (1) Déterminons une densité de la variable aléatoire S_n . Comme les X_k sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on sait d'après l'énoncé que $S_n = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\Gamma(x, n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, laquelle admet pour densité :

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{(n-1)!x^n} t^{n-1} e^{-\frac{t}{x}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

- (2) Déterminons une densité (notée φ_n) de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$F_{\frac{S_n}{n}}(t) = P\left(\left[\frac{S_n}{n} \leq t\right]\right) = P([S_n \leq nt]) = F_{S_n}(nt).$$

Par dérivation, on obtient que $\varphi_n(t) = n f_{S_n}(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$. Dès lors, une densité de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{n^n}{(n-1)!x^n} t^{n-1} e^{-\frac{nt}{x}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

- (3) On rappelle qu'en Python, la commande `rd.exponential(1/a, [p,q])` permet de simuler une matrice de taille $p \times q$ de variables aléatoires qui suivent la loi exponentielle de paramètre a . Pour écrire une fonction en Python qui, à partir d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et d'un réel $x > 0$, simule la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$, on procède comme suit :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simvars(n,x):
    x=rd.exponential(1/x,n)
    s=np.sum(x)/n
    return s
```

- (4) Justifions que $\frac{S_n}{n}$ admet une espérance et une variance, et calculons-les en fonction de n et x . Comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$, on sait d'après le cours que les X_k admettent toutes une variance. Comme de plus elles sont indépendantes, on voit que la variable aléatoire $S_n = X_1 + \dots + X_n$ admet une variance. En particulier, la variable aléatoire $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \times S_n$ admet aussi une variance. Mais comme toute variable aléatoire admettant une variance (ou un moment d'ordre 2) admet aussi une espérance, il s'ensuit que :

$\frac{S_n}{n}$ admet une espérance et une variance.

De plus, comme les X_k suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$, leurs espérances sont toutes égales à x , et donc on obtient par linéarité de l'espérance que :

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{nx}{n} = x.$$

De même, comme les X_k suivent toutes la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{x}$ et qu'elles sont indépendantes, on trouve d'après les propriétés de la variance que :

$$V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{V(X_1) + \dots + V(X_n)}{n^2} = \frac{nx^2}{n^2} = \frac{x^2}{n}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{E\left(\frac{S_n}{n}\right) = x \text{ et } V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{x^2}{n}.$$

(5) Montrons que, pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]\right) = 0.$$

Comme la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$ admet une variance d'après la question précédente, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev rappelée en début de sujet entraîne que :

$$P\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]\right) = P\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| > \alpha\right]\right) \leq \frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\alpha^2} = \frac{x^2}{n\alpha^2}.$$

Dès lors, on voit que, pour tout $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq P\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]\right) \leq \frac{x^2}{n\alpha^2}.$$

Comme les membres de gauche et de droite de cet encadrement tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]\right) = 0.}$$

(6) Montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right].$$

Pour ce faire, on va utiliser la continuité de la fonction f en x . Par définition de la continuité de f en x , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y \in [0, +\infty[$, on ait :

$$|y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Par contraposée, on voit que, pour tout $y \in [0, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| > \varepsilon \implies |y - x| > \alpha.$$

En remplaçant y par $\frac{S_n}{n}$, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon \implies \left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha.$$

En particulier, si l'événement $\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right]$ est réalisé, alors l'événement $\left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right]$ l'est aussi, d'où l'inclusion :

$$\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right].$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\boxed{\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right] \subset \left[\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right].}$$

(7) Montrons que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \right) = 0.$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \subset \left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right].$$

Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et un réel $\alpha > 0$ satisfaisant la condition ci-dessus. Par croissance des probabilités, on obtient que :

$$0 \leq P \left(\left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \right) \leq P \left(\left[\left| \frac{S_n}{n} - x \right| > \alpha \right] \right).$$

Comme les membres de gauche et de droite de cet encadrement tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après la question (3) de la partie (3), on en déduit d'après le théorème des gendarmes que, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| > \varepsilon \right] \right) = 0.}$$

(8) Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0, +\infty[$, et soit ε un réel > 0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'événement :

$$A_n = \left[\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right].$$

(a) Soit 1_{A_n} l'indicatrice de A_n . Justifions l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}).$$

Soit ω un élément quelconque de l'univers Ω . On distingue alors deux cas :

Premier cas : $\omega \in A_n$.

Dans ce cas, on voit que $1_{A_n}(\omega) = 1$ et $1 - 1_{A_n}(\omega) = 0$, de sorte que :

$$\varepsilon 1_{A_n}(\omega) + 2M(1 - 1_{A_n})(\omega) = \varepsilon.$$

Comme $\omega \in A_n$, on trouve par définition de A_n que :

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n}(\omega) \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, si $\omega \in A_n$, on obtient que :

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n}(\omega) \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon 1_{A_n}(\omega) + 2M(1 - 1_{A_n})(\omega).$$

Deuxième cas : $\omega \notin A_n$.

Dans ce cas, on voit que $1_{A_n}(\omega) = 0$ et $1 - 1_{A_n}(\omega) = 1$, de sorte que :

$$\varepsilon 1_{A_n}(\omega) + 2M(1 - 1_{A_n})(\omega) = 2M.$$

En outre, d'après l'inégalité triangulaire et par définition de M , on trouve que :

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n}(\omega) \right) - f(x) \right| \leq \left| f \left(\frac{S_n}{n}(\omega) \right) \right| + |f(x)| \leq M + M = 2M.$$

En particulier, si $\omega \notin A_n$, on obtient que :

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n}(\omega) \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon 1_{A_n}(\omega) + 2M(1 - 1_{A_n})(\omega).$$

Dans tous les cas, on a montré que, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\left| f \left(\frac{S_n}{n}(\omega) \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon 1_{A_n}(\omega) + 2M(1 - 1_{A_n})(\omega),$$

ce qui signifie exactement que :

$$\boxed{\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(x) \right| \leq \varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}).}$$

(b) Montrons l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x).$$

Pour ce faire, on se fixe un réel $\varepsilon > 0$, et on part de l'inégalité de la question précédente, que l'on écrit sous la forme :

$$-\varepsilon 1_{A_n} - 2M(1 - 1_{A_n}) \leq f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \leq \varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n}).$$

Par croissance de l'espérance, on obtient que :

$$E(-\varepsilon 1_{A_n} - 2M(1 - 1_{A_n})) \leq E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) \leq E(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n})).$$

Par linéarité de l'espérance, on trouve que :

$$-\varepsilon E(1_{A_n}) - 2M[1 - E(1_{A_n})] \leq E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \leq \varepsilon E(1_{A_n}) + 2M[1 - E(1_{A_n})].$$

Comme $E(1_{A_n}) = P(A_n)$, on obtient que :

$$-\varepsilon P(A_n) - 2M[1 - P(A_n)] \leq E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \leq \varepsilon P(A_n) + 2M[1 - P(A_n)],$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon P(A_n) + 2M[1 - P(A_n)] \quad (*).$$

D'après la question (5) de la partie (3) on sait que $P(\overline{A_n})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc $P(A_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. En particulier, on trouve que :

$$\varepsilon P(A_n) + 2M[1 - P(A_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varepsilon.$$

D'après la définition de la limite d'une suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$:

$$|\varepsilon P(A_n) + 2M[1 - P(A_n)] - \varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Dès lors, il s'ensuit que $\varepsilon P(A_n) + 2M[1 - P(A_n)] - \varepsilon \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, et donc :

$$\forall n \geq n_0, \quad \varepsilon P(A_n) + 2M[1 - P(A_n)] \leq 2\varepsilon.$$

En particulier, on obtient avec l'inégalité (*) que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon.$$

En résumé, on vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui signifie exactement que :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x).}$$

(c) Montrons l'égalité suivante :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-nt/x} dt.$$

D'après le théorème de transfert et la question (2) de la partie (3), on voit que :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} f(t) t^{n-1} e^{-\frac{nt}{x}} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} f(t) t^{n-1} e^{-\frac{nt}{x}} dt.$$

D'après la question précédente, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} f(t)t^{n-1}e^{-\frac{nt}{x}} dt.$$

(d) Montrons l'égalité suivante :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} (L(f))^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

D'après la question (4) de la partie (2), on sait que, pour tout $x > 0$:

$$L(f)^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-xt} dt.$$

En remplaçant x par $\frac{n}{x}$ (qui est aussi > 0), on obtient que :

$$L(f)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{-\frac{nt}{x}} dt.$$

D'après la question précédente, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(f)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

(e) Montrons que, si deux fonctions f et g continues et bornées sur $[0, +\infty[$ vérifient l'égalité $L(f) = L(g)$, alors f et g sont égales. Pour ce faire, considérons deux fonctions f et g continues et bornées sur $[0, +\infty[$ telles que $L(f) = L(g)$. Alors, leurs dérivées $(n-1)$ -èmes sont aussi égales pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc pour tout $x > 0$:

$$L(f)^{(n-1)}(x) = L(g)^{(n-1)}(x).$$

En remplaçant x par $\frac{n}{x}$ (qui est aussi > 0) et après multiplication par $\frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n}$, on obtient que, pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(f)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(g)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(f)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(g)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right),$$

d'où il s'ensuit d'après la question précédente que $f(x) = g(x)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in]0, +\infty[$, on en déduit que $f = g$ sur $]0, +\infty[$. En outre, comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$, elles sont continues en 0, et donc :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0).$$

Dès lors, on voit que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, et donc $f = g$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } f, g \text{ sont continues et bornées sur } \mathbb{R}_+ \text{ et si } L(f) = L(g), \text{ alors } f = g.}$$

(f) Montrons plus précisément que, si deux fonctions f et g continues et bornées sur $[0, +\infty[$ vérifient l'égalité $L(f)(x) = L(g)(x)$ pour tout $x \in]a, +\infty[$ (où $a \geq 0$), alors f et g sont encore égales. Pour ce faire, on va reprendre la démonstration précédente plus en détails. Considérons deux fonctions f et g continues et bornées sur $[0, +\infty[$ telles que $L(f)(x) = L(g)(x)$ pour tout $x \in]a, +\infty[$. Alors, leurs dérivées $(n-1)$ -èmes sont aussi égales sur $]a, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui signifie que, pour tout $x > a$:

$$L(f)^{(n-1)}(x) = L(g)^{(n-1)}(x).$$

Fixons un réel $x > 0$. Comme $\frac{n}{x}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $\frac{n}{x} > a$. En remplaçant x par $\frac{n}{x}$ (qui est $> a$ pour tout $n \geq n_0$) et après multiplication par $\frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n}$, on obtient que, pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(f)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(g)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(f)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(g)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right),$$

d'où il s'ensuit d'après la question précédente que $f(x) = g(x)$. Comme ceci est vrai pour tout $x \in]0, +\infty[$, on en déduit que $f = g$ sur $]0, +\infty[$. En outre, comme f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$, elles sont continues en 0, et donc :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0).$$

Dès lors, on voit que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$, et donc $f = g$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } f, g \text{ sont continues, bornées sur } \mathbb{R}_+ \text{ et si } L(f) = L(g) \text{ sur }]a, +\infty[, \text{ alors } f = g.}$$

Partie IV : Etude du régime permanent d'une file d'attente.

Un certain jour, des clients arrivent dans une poste qui ne possède qu'un seul guichet. Un client qui arrive dans la poste soit se fait servir tout de suite si le guichet est libre, soit prend place dans la file d'attente si le guichet est occupé, et se fait servir dès que tous ses prédécesseurs dans la file ont été servis, puis il quitte aussitôt la poste. On modélise cette situation en notant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n l'instant d'arrivée dans la poste du n -ème client, U_n sa durée d'attente dans la file ($U_n = 0$ si le guichet est libre), S_n la durée de son service au guichet et $W_n = S_n + U_n$ la durée de sa présence dans la poste. On pose $T_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\Delta_n = T_n - T_{n-1}$, de sorte que $T_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k$. On fait alors les hypothèses suivantes :

- Les variables aléatoires $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots, S_1, \dots, S_n, \dots$ sont indépendantes.
- Les variables aléatoires $S_1, \dots, S_n, \dots$ suivent toutes la loi exponentielle de paramètre μ (d'espérance $\frac{1}{\mu}$).
- Les variables aléatoires $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ sont strictement positives et ont toutes la même densité égale sur $]0, +\infty[$ à la densité d'une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ (d'espérance $\frac{1}{\lambda}$).
- L'espérance commune des Δ_i est supérieure à celle des S_i , c'est-à-dire : $\mu > \lambda$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par F_n la fonction de répartition de U_n et par G_n celle de W_n . On admet que F_n et G_n sont continues sur $[0, +\infty[$. Dans les trois premières questions de cette partie, on considère un entier $n \geq 2$, un réel $x \geq 0$ et un réel $h > 0$.

- (1) Justifions les égalités : $U_n = 0$ si $W_{n-1} - \Delta_n < 0$, et $U_n = W_{n-1} - \Delta_n$ sinon. Pour ce faire, considérons un élément ω quelconque de l'univers Ω . On distingue alors deux cas :

Premier cas : $(W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) < 0$.

Dans ce cas, on voit que $W_{n-1}(\omega) < \Delta_n(\omega)$, et donc le temps passé dans la poste par le $(n-1)$ -ème client est strictement inférieur au temps écoulé entre son arrivée et l'arrivée du n -ème client. Dès lors, le temps d'attente du n -ième client sera nul, et donc :

$$U_n(\omega) = 0.$$

Deuxième cas : $(W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) \geq 0$.

Dans ce cas, on voit que $W_{n-1}(\omega) \geq \Delta_n(\omega)$, et donc le temps passé dans la poste par le $(n-1)$ -ème client est supérieur au temps écoulé entre son arrivée et l'arrivée du n -ème client. Dès lors, le temps d'attente du n -ème client sera égal à la durée du service du $(n-1)$ -ème client à laquelle on soustrait le temps écoulé entre les arrivées des $(n-1)$ -ème et n -ème clients, et donc :

$$U_n(\omega) = (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$U_n = \begin{cases} 0 & \text{si } W_{n-1} - \Delta_n < 0 \\ W_{n-1} - \Delta_n & \text{si } W_{n-1} - \Delta_n \geq 0 \end{cases}.$$

- (2) Justifions l'indépendance des variables aléatoires W_{n-1} et Δ_n . Pour ce faire, montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \geq 2$ par :

$$\mathcal{P}(n) : "W_{n-1} \text{ est fonction de } \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, \dots, S_{n-1}."$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(2)$ est vraie, car $W_1 = U_1 + S_1 = S_1$, et donc W_1 est fonction de S_1 seulement. En effet, on constate que $U_1 = 0$, puisque le premier client n'a pas à attendre dans la file

d'attente (vu qu'il est le premier). A présent, supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, il existe une fonction ψ_{n-1} de $\mathbb{R}^{2n-2}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$W_{n-1} = \psi_{n-1}(\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, \dots, S_{n-1}).$$

Comme $W_n = U_n + S_n$, on obtient avec la question précédente que, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$W_n(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega) & \text{si } (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) < 0 \\ S_n(\omega) + (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) & \text{si } (W_{n-1} - \Delta_n)(\omega) \geq 0 \end{cases}.$$

Considérons alors l'application ψ_n définie pour tout $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ par :

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} y_n & \text{si } \psi_{n-1}(x_1, \dots, y_{n-1}) - x_n < 0 \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, y_{n-1}) - x_n + y_n & \text{si } \psi_{n-1}(x_1, \dots, y_{n-1}) - x_n \geq 0 \end{cases}.$$

Alors, on obtient par construction que, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$W_n(\omega) = \psi_n(\Delta_1(\omega), \dots, \Delta_n(\omega), S_1(\omega), \dots, S_n(\omega)),$$

d'où il s'ensuit que W_n est fonction de $\Delta_1, \dots, \Delta_n, S_1, \dots, S_n$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \geq 2$. Dès lors, comme W_{n-1} est fonction de $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, S_1, \dots, S_{n-1}$ et que $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n, S_1, \dots, S_{n-1}$ sont indépendantes, le lemme des coalitions entraîne que :

$$\boxed{W_{n-1} \text{ est indépendant de } \Delta_n.}$$

(3) (a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, établissons l'inégalité :

$$P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq P([W_{n-1} \leq x + (k+1)h] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).$$

Pour ce faire, posons pour tout entier $n \geq 2$:

$$A_n = [W_{n-1} - \Delta_n \leq x], \quad B_n = [kh \leq \Delta_n < (k+1)h], \quad C_n = [W_{n-1} \leq x + (k+1)h].$$

Montrons à présent que $A_n \cap B_n \subset C_n \cap B_n$. Soit ω un élément de $A_n \cap B_n$. Alors ω appartient à la fois à A_n et à B_n , ce qui implique que :

$$W_{n-1}(\omega) - \Delta_n(\omega) \leq x \quad \text{et} \quad kh \leq \Delta_n(\omega) < (k+1)h.$$

Par addition, on obtient que :

$$W_{n-1}(\omega) = W_{n-1}(\omega) - \Delta_n(\omega) + \Delta_n(\omega) \leq x + (k+1)h,$$

d'où il s'ensuit que ω appartient à C_n . Comme de plus ω appartient à B_n , on en déduit que ω appartient à $C_n \cap B_n$, et donc :

$$A_n \cap B_n \subset C_n \cap B_n.$$

Par croissance des probabilités, on obtient que :

$$P(A_n \cap B_n) \leq P(C_n \cap B_n).$$

Mais par définition de A_n, B_n, C_n , on en déduit que :

$$\boxed{P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq P([W_{n-1} \leq x + (k+1)h] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).}$$

(b) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, montrons l'inégalité :

$$P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Pour ce faire, on reprend les notations de la question précédente. Par définition de G_{n-1} , on a :

$$P(C_n) = P([W_{n-1} \leq x + (k+1)h]) = G_{n-1}(x + (k+1)h).$$

Comme Δ_n suit la loi exponentielle de paramètre λ , on obtient que :

$$P(B_n) = P([kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) = 1 - e^{-\lambda(k+1)h} - (1 - e^{-\lambda kh}) = e^{-\lambda kh}(1 - e^{-\lambda h}).$$

Comme G_{n-1} est croissante sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction de répartition de W_{n-1}), on trouve que, pour tout $s \in [(k+1)h, (k+2)h]$:

$$G_{n-1}(x + (k+1)h) \leq G_{n-1}(x + s).$$

Par multiplication par $\lambda e^{-\lambda s}$, on obtient que, pour tout $s \in [(k+1)h, (k+2)h]$:

$$\lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + (k+1)h) \leq \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s).$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + (k+1)h) ds \leq \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient que :

$$G_{n-1}(x + (k+1)h) \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} ds \leq \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds,$$

d'où il s'ensuit que :

$$G_{n-1}(x + (k+1)h) [-e^{-\lambda s}]_{(k+1)h}^{(k+2)h} \leq \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds.$$

Après simplification, on trouve que :

$$G_{n-1}(x + (k+1)h) e^{-\lambda(k+1)h} (1 - e^{-\lambda h}) \leq \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds.$$

Comme W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes, on voit que B_n et C_n le sont. Dès lors, d'après les calculs du début, on obtient que :

$$\begin{aligned} P(B_n \cap C_n) &= P(B_n)P(C_n) \\ &= G_{n-1}(x + (k+1)h) e^{-\lambda k h} (1 - e^{-\lambda h}) \\ &= e^{\lambda h} G_{n-1}(x + (k+1)h) e^{-\lambda(k+1)h} (1 - e^{-\lambda h}) \\ &\leq e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds. \end{aligned}$$

Mais comme $P(A_n \cap B_n) \leq P(C_n \cap B_n)$ d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$P(A_n \cap B_n) \leq e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds.$$

Par définition de A_n, B_n , on en déduit que :

$$P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds.$$

- (c) En suivant le même raisonnement qu'à la question (3)(a) de la partie (4), on montre de même que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P([W_{n-1} \leq x + kh] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) \leq P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).$$

- (d) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, montrons l'inégalité :

$$e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) ds \leq P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).$$

Pour ce faire, on pose pour tout entier $n \geq 2$:

$$A'_n = [W_{n-1} \leq x + kh], \quad B'_n = [kh \leq \Delta_n < (k+1)h], \quad C'_n = [W_{n-1} - \Delta_n \leq x].$$

Par définition de G_{n-1} , on a :

$$P(A'_n) = P([W_{n-1} \leq x + kh]) = G_{n-1}(x + kh).$$

Comme Δ_n suit la loi exponentielle de paramètre λ , on obtient que :

$$P(B'_n) = P([kh \leq \Delta_n < (k+1)h]) = 1 - e^{-\lambda(k+1)h} - (1 - e^{-\lambda kh}) = e^{-\lambda kh} (1 - e^{-\lambda h}).$$

Comme G_{n-1} est croissante sur $\mathbb{R}$ (en tant que fonction de répartition de W_{n-1}), on trouve que, pour tout $s \in [(k-1)h, kh]$:

$$G_{n-1}(x + s) \leq G_{n-1}(x + kh).$$

Par multiplication par $\lambda e^{-\lambda s}$, on obtient que, pour tout $s \in [(k-1)h, kh]$:

$$\lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + s) \leq \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x + kh).$$

Par croissance de l'intégrale, on trouve que :

$$\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+kh) ds.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient que :

$$\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq G_{n-1}(x+kh) \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} ds,$$

d'où il s'ensuit que :

$$\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq G_{n-1}(x+kh) [-e^{-\lambda s}]_{(k-1)h}^{kh}.$$

Après simplification, on trouve que :

$$\int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq G_{n-1}(x+kh) e^{-\lambda(k-1)h} (1 - e^{-\lambda h}),$$

d'où l'on déduit que :

$$e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq G_{n-1}(x+kh) e^{-\lambda k h} (1 - e^{-\lambda h}),$$

Comme W_{n-1} et Δ_n sont indépendantes, on voit que A'_n et B'_n le sont. Dès lors, d'après les calculs du début, on obtient que :

$$\begin{aligned} P(A'_n \cap B'_n) &= P(A'_n)P(B'_n) \\ &= G_{n-1}(x+kh) e^{-\lambda k h} (1 - e^{-\lambda h}) \\ &\geq e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds. \end{aligned}$$

Mais comme $P(A'_n \cap B'_n) \geq P(C'_n \cap B'_n)$ d'après la question précédente, il s'ensuit que :

$$P(C'_n \cap B'_n) \geq e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Par définition de B'_n, C'_n , on en déduit que :

$$e^{-\lambda h} \int_{(k-1)h}^{kh} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]).$$

(e) Montrons l'encadrement suivant :

$$e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq F_n(x) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Pour ce faire, on pose $D_k = [kh \leq \Delta_n < (k+1)h]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme Δ_n ne prend que des valeurs réelles ≥ 0 (vu que Δ_n est la différence entre le temps d'arrivée du n -ème client et celui du $(n-1)$ -ème client), la famille (D_k) est un système complet d'événements. De plus, on sait d'après la question (3)(b) de la partie (4) que :

$$P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap D_k) \leq e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Par sommation sur k , on obtient que, pour tout entier $N \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^N P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap D_k) \leq \sum_{k=0}^N e^{\lambda h} \int_{(k+1)h}^{(k+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

D'après la relation de Chasles, on trouve que, pour tout entier $N \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^N P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap D_k) \leq e^{\lambda h} \int_h^{(N+2)h} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Comme G_{n-1} est une fonction de répartition et qu'elle est continue par hypothèse, on voit que G_{n-1} est continue et bornée (par 1) sur $[0, +\infty[$. D'après la question (2) de la partie (1), G_{n-1} appartient donc à E , et en particulier l'intégrale $\int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds$ converge. Dès lors, par passage à la

limite dans l'inégalité ci-dessus quand N tend vers $+\infty$ et sachant que (D_k) est un système complet d'événements, on obtient que :

$$P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x]) = \sum_{k=0}^{+\infty} P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x] \cap D_k) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Or, d'après la question (1) de la partie (4), on voit que $U_n = \max\{0, W_{n-1} - \Delta_n\}$. Dès lors, comme x est supposé ≥ 0 , on voit que $U_n \leq x$ si et seulement si $W_{n-1} - \Delta_n \leq x$, et donc :

$$F_n(x) = P([U_n \leq x]) = P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x]) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

En procédant exactement de la même façon avec la minoration de la question (3)(d) de la partie (4), on montre aussi que :

$$F_n(x) = P([U_n \leq x]) = P([W_{n-1} - \Delta_n \leq x]) \geq e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq F_n(x) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

(4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrons que :

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} G_{n-1}(x+s) ds.$$

D'après la question précédente, on a l'encadrement suivant pour tout $h > 0$:

$$e^{-\lambda h} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds \leq F_n(x) \leq e^{\lambda h} \int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds.$$

Comme $e^{-\lambda h}$ tend vers 1 et que $\int_h^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds$ tend vers $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda s} G_{n-1}(x+s) ds$ quand h tend vers 0, le théorème des gendarmes entraîne que :

$$F_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} G_{n-1}(x+s) ds.$$

En raisonnant de la même façon, on montre et nous admettons que :

$$G_n(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F_{n-1}(x-s) ds.$$

(5) A partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, on suppose que les fonctions F_n et G_n sont indépendantes de l'entier n , et l'on pose $F = F_n$ et $G = G_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On dit alors qu'on étudie la file d'attente en régime permanent.

(a) Pour tout réel $x \geq 0$, établissons l'égalité :

$$F(x) = \lambda e^{\lambda x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt - \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \right).$$

D'après la question précédente et au vu des nouvelles hypothèses, on sait que, pour tout $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} G(x+s) ds.$$

Posons alors $t = x + s$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Alors t est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[x, +\infty[$, et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $dt = ds$, que $t = x$ si $s = 0$ et que t tend vers $+\infty$ quand s tend vers $+\infty$, on obtient par changement de variables que :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda(t-x)} G(t) dt = \int_x^{+\infty} \lambda e^{\lambda x} e^{-\lambda t} G(t) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$F(x) = \lambda e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt.$$

Enfin, d'après la relation de Chasles, on en déduit que :

$$F(x) = \lambda e^{\lambda x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt - \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \right).$$

(b) Pour tout réel $x \geq 0$, montrons l'égalité :

$$e^{-\lambda x} F(x) = F(0) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt.$$

D'après la question précédente, on constate que, pour $x = 0$, on a :

$$F(0) = \lambda e^{\lambda 0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt - \int_0^0 e^{-\lambda t} G(t) dt \right) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt.$$

Dès lors, toujours d'après la question précédente, on obtient que, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda x} F(x) &= \lambda e^{-\lambda x} e^{\lambda x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt - \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \right) \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \\ &= F(0) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \geq 0$:

$$e^{-\lambda x} F(x) = F(0) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt.$$

(6) On considère la fonction $H : x \mapsto \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt$.

(a) Montrons que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Tout d'abord, on voit que H est une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-\lambda t} G(t)$, qui est continue comme produit de fonctions continues (vu que G est continue par hypothèse), et donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. Comme de plus $H'(x) = e^{-\lambda x} G(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ (vu que $G \geq 0$ car c'est une fonction de répartition), la fonction H est croissante sur $[0, +\infty[$. Enfin, comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt$ converge d'après la question précédente, et qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction positive, on obtient par positivité de l'intégrale que, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq H(x) = \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) dt.$$

Par conséquent, la fonction H est bornée sur $[0, +\infty[$, et on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } H \text{ est de classe } \mathcal{C}^1, \text{ croissante et bornée sur } [0, +\infty[.}$$

(b) Pour tout réel $x > 0$, établissons l'égalité : $xL(H)(x) = L(G)(x + \lambda)$. Tout d'abord, comme H est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$, elle est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, et donc elle appartient à E d'après la question (2) de la partie (1). De plus, comme H est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$, on sait d'après la question (6) de la partie (1) que H' appartient aussi à E , et que pour tout $x > 0$:

$$L(H')(x) = -H(0) + xL(H)(x).$$

En outre, comme $H'(t) = e^{-\lambda t} G(t)$ pour tout $t \geq 0$, on voit que $H' = \varepsilon_\lambda G$, et donc :

$$L(\varepsilon_\lambda G)(x) = -H(0) + xL(H)(x).$$

Par ailleurs, comme $H(0) = \int_0^0 e^{-\lambda t} G(t) dt = 0$, on obtient que :

$$L(\varepsilon_\lambda G)(x) = xL(H)(x).$$

Enfin, comme $L(\varepsilon_\lambda G)(x) = L(G)(x + \lambda)$ d'après la question (5) de la partie (1), on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{L(G)(x + \lambda) = xL(H)(x).}$$

(c) Montrons que, pour tout réel $x > \lambda$, on a :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{x - \lambda} - \frac{\lambda}{x - \lambda} L(G)(x).$$

Pour ce faire, partant de la question (5)(b) de la partie (4), on voit que, pour tout $x > 0$:

$$e^{-\lambda x} F(x) = F(0) - \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} G(t) dt = F(0) - \lambda H(x),$$

que l'on peut réécrire sous la forme $\varepsilon_\lambda F = F(0) - \lambda H$. En effet, cette relation est vraie pour tout $x > 0$, et elle reste vraie en $x = 0$ puisque les deux fonctions de part et d'autre de cette égalité sont continues sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, on obtient par linéarité de L que, pour tout $x > 0$:

$$L(\varepsilon_\lambda F)(x) = L(F(0) - \lambda H)(x) = F(0)L(1)(x) - \lambda L(H)(x)$$

Comme $1 = \varepsilon_0$, on voit d'après la question (4) de la partie (1) que $L(1)(x) = \frac{1}{x}$. Comme de plus $L(\varepsilon_\lambda F)(x) = L(F)(x + \lambda)$ d'après la question (5) de la partie (1), on a pour tout $x > 0$:

$$L(F)(x + \lambda) = F(0)\frac{1}{x} - \lambda L(H)(x).$$

Mais comme $L(G)(x + \lambda) = xL(H)(x)$ pour tout $x > 0$ d'après la question précédente, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$L(F)(x + \lambda) = \frac{F(0)}{x} - \frac{\lambda}{x}L(G)(x + \lambda).$$

Si l'on remplace $x + \lambda$ par x , on en déduit que, pour tout $x > \lambda$:

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{x - \lambda} - \frac{\lambda}{x - \lambda}L(G)(x).$$

- (7) (a) Montrons que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Tout d'abord, comme G est une fonction de répartition, elle est croissante et bornée (par 1) sur $[0, +\infty[$. De plus, on sait par hypothèse que, pour tout $x > 0$:

$$G(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu s} F(x - s) ds.$$

Posons alors $t = x - s$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Alors t est une bijection strictement décroissante de $[0, x]$ dans $[0, x]$, et elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. Comme $dt = -ds$, que $t = x$ si $s = 0$ et que $t = 0$ si $s = x$, on obtient par changement de variables que :

$$G(x) = \int_x^0 -\mu e^{-\mu(x-t)} F(t) dt = \int_0^x \mu e^{-\mu x} e^{\mu t} F(t) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on trouve que :

$$G(x) = \mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu t} F(t) dt.$$

Dès lors, on voit que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de la fonction $x \mapsto \mu e^{\mu x}$ et d'une primitive d'une fonction continue (qui est donc de classe $\mathcal{C}^1$). Par conséquent :

$$\boxed{\text{la fonction } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1, \text{ croissante et bornée sur } [0, +\infty[.}$$

- (b) Pour tout réel $x > 0$, établissons successivement les égalités :

$$G'(x) = -\mu G(x) + \mu F(x) \quad \text{et} \quad L(G)(x) = \frac{\mu}{x + \mu} L(F)(x).$$

D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \geq 0$:

$$G(x) = \mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu t} F(t) dt.$$

Par dérivation, on obtient que, pour tout $x \geq 0$:

$$G'(x) = -\mu \left(\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{\mu t} F(t) dt \right) + \mu e^{-\mu x} e^{\mu x} F(x) = -\mu G(x) + \mu F(x),$$

d'où il s'ensuit que, pour tout $x \geq 0$:

$$\boxed{G'(x) = -\mu G(x) + \mu F(x).}$$

A présent, comme la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$, on sait que G appartient à E d'après la question (2) de la partie (1). De plus, d'après la question (6) de la partie (1), on voit que G' appartient aussi à E et que, pour tout $x > 0$:

$$L(G')(x) = -G(0) + xL(G)(x).$$

Comme $G(0) = \mu e^{-\mu 0} \int_0^0 e^{\mu t} F(t) dt = 0$, on obtient que, pour tout $x > 0$:

$$L(G')(x) = xL(G)(x).$$

Mais comme $G' = -\mu G + \mu F$ d'après les calculs précédents, il s'ensuit par linéarité de L que, pour tout $x > 0$:

$$L(G')(x) = xL(G)(x) = L(-\mu G + \mu F)(x) = -\mu L(G)(x) + \mu L(F)(x),$$

d'où il s'ensuit que, pour tout $x > 0$:

$$(x + \mu)L(G)(x) = \mu L(F)(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$L(G)(x) = \frac{\mu}{x + \mu} L(F)(x).$$

(8) (a) Montrons que, pour tout réel $x > \lambda$, on a :

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda} \left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x + \mu - \lambda} \right).$$

Pour tout $x > \lambda$, on trouve d'après les questions précédentes que :

$$\begin{aligned} L(F)(x) &= \frac{F(0)}{x - \lambda} - \frac{\lambda}{x - \lambda} L(G)(x) \\ &= \frac{F(0)}{x - \lambda} - \frac{\lambda}{x - \lambda} \frac{\mu}{x + \mu} L(F)(x), \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que, pour tout $x > \lambda$:

$$\begin{aligned} \frac{F(0)}{x - \lambda} &= L(F)(x) + \frac{\lambda}{x - \lambda} \frac{\mu}{x + \mu} L(F)(x) \\ &= L(F)(x) \left[\frac{(x - \lambda)(x + \mu) + \lambda\mu}{(x - \lambda)(x + \mu)} \right] \\ &= L(F)(x) \left[\frac{x^2 + (\mu - \lambda)x}{(x - \lambda)(x + \mu)} \right] \\ &= L(F)(x) \left[\frac{x(x + \mu - \lambda)}{(x - \lambda)(x + \mu)} \right]. \end{aligned}$$

En simplifiant les dénominateurs, on obtient alors que, pour tout $x > \lambda$:

$$F(0) = L(F)(x) \left[\frac{x(x + \mu - \lambda)}{(x + \mu)} \right],$$

d'où il s'ensuit par inversion que, pour tout $x > \lambda$:

$$L(F)(x) = F(0) \left[\frac{(x + \mu)}{x(x + \mu - \lambda)} \right].$$

Par des calculs simples, on vérifie que, pour tout $x > \lambda$:

$$\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x + \mu - \lambda} = \frac{\mu(x + \mu - \lambda) - \lambda x}{x(x + \mu - \lambda)} = \frac{(\mu - \lambda)(x + \mu)}{x(x + \mu - \lambda)},$$

d'où il s'ensuit que :

$$\frac{1}{\mu - \lambda} \left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x + \mu - \lambda} \right) = \frac{(x + \mu)}{x(x + \mu - \lambda)}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > \lambda$:

$$L(F)(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda} \left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x + \mu - \lambda} \right).$$

(b) Montrons que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda} \left(\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x} \right).$$

D'après la question (4) de la partie (1), on sait que :

$$L(1) = L(\varepsilon_0) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad L(\varepsilon_{\mu - \lambda}) = \frac{1}{x + \mu - \lambda}.$$

Par linéarité de L , on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$L\left(\frac{F(0)}{\mu - \lambda}(\mu - \lambda \varepsilon_{\mu - \lambda})\right)(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda}(\mu L(1)(x) - \lambda L(\varepsilon_{\mu - \lambda})(x)) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda}\left(\frac{\mu}{x} - \frac{\lambda}{x + \mu - \lambda}\right).$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x > \lambda$:

$$L(F)(x) = L\left(\frac{F(0)}{\mu - \lambda}(\mu - \lambda \varepsilon_{\mu - \lambda})\right)(x).$$

D'après la question (6)(f) de la partie (3), on trouve que :

$$F = \frac{F(0)}{\mu - \lambda}(\mu - \lambda \varepsilon_{\mu - \lambda}).$$

En particulier, on en déduit que, pour tout $x \geq 0$:

$$\boxed{F(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda}(\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x})}.$$

(c) Justifions que la fonction F tend vers 1 en $+\infty$, et montrons que, pour tout $x \geq 0$, on a :

$$F(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)x}.$$

Comme F est une fonction de répartition, on sait d'après le cours que :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ tend vers 1 en } +\infty}.$$

D'après la question précédente, on obtient par passage à la limite en $+\infty$ (vu que $\mu > \lambda$) que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(0)}{\mu - \lambda}(\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x}) = \frac{F(0)\mu}{\mu - \lambda} = 1.$$

Dès lors, on obtient par des calculs simples que, pour tout $x \geq 0$:

$$F(x) = \frac{F(0)}{\mu - \lambda}(\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x}) = \frac{1}{\mu}(\mu - \lambda e^{-(\mu - \lambda)x}).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \geq 0$:

$$\boxed{F(x) = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)x}}.$$

(9) (a) Montrons qu'en régime permanent, le temps passé dans la poste suit une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on trouve d'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale que :

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \mu e^{-\mu s} F(x-s) ds \\ &= \int_0^x \mu e^{-\mu s} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu - \lambda)(x-s)}\right) ds \\ &= \int_0^x \left(\mu e^{-\mu s} - \lambda e^{-\mu s} e^{-(\mu - \lambda)(x-s)}\right) ds \\ &= \int_0^x \mu e^{-\mu s} ds - \int_0^x \lambda e^{-\mu s} e^{-(\mu - \lambda)(x-s)} ds \\ &= \int_0^x \mu e^{-\mu s} ds - \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} e^{-(\mu - \lambda)x} ds \\ &= \int_0^x \mu e^{-\mu s} ds - e^{-(\mu - \lambda)x} \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= 1 - e^{-\mu x} - e^{-(\mu - \lambda)x} [1 - e^{-\lambda x}] \\ &= 1 - e^{-\mu x} - e^{-(\mu - \lambda)x} + e^{-\mu x} \\ &= 1 - e^{-(\mu - \lambda)x}. \end{aligned}$$

Dès lors, il s'ensuit que, pour tout $x \geq 0$:

$$G(x) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)x}.$$

Comme G est la fonction de répartition de W_n et que W_n est le temps passé à la poste, on voit que $W_n \geq 0$, et donc :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(\mu-\lambda)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

le temps passé à la poste suit une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$.

- (b) On suppose qu'un autre jour, les arrivées des clients sont en moyenne deux fois plus fréquentes et la durée de service deux fois plus rapide, et que l'on se trouve en régime permanent. Dans ce cas, les paramètres λ et μ sont remplacés par 2λ et 2μ . Comme le temps W_n passé à la poste suit une loi exponentielle de paramètre $2\mu - 2\lambda$, on voit que le temps moyen T passé à la poste est donné par :

$$T = E(W_n) = \frac{1}{2\mu - 2\lambda} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Dès lors, cela signifie que :

dans ces conditions, le temps moyen passé à la poste est divisé par 2.

Par ailleurs, la probabilité P d'être servi tout de suite correspond à la probabilité que $U_n = 0$. Comme F est la fonction de répartition de U_n , on trouve que :

$$P = P([U_n = 0]) = P([U_n \leq 0]) = F(0) = 1 - \frac{2\lambda}{2\mu} e^{-(2\mu-2\lambda)0} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} e^{-(\mu-\lambda)0}.$$

Dès lors, cela signifie que :

dans ces conditions, la probabilité d'être servi tout de suite ne change pas.

A noter que ces résultats peuvent sembler assez paradoxaux a priori. En effet, un client qui entre à la poste pourrait légitimement se dire que, s'il y a deux fois plus de monde au guichet et s'ils sont servis deux fois plus vite, alors il risque finalement d'attendre autant de temps en moyenne. De plus, comme il y a deux fois plus de clients, il risquerait de devoir attendre plus souvent, et donc la probabilité d'être servi tout de suite devrait décroître. En fait, on peut expliquer ces résultats en modélisant la situation à la poste de la façon suivante. Imaginons que l'on dispose d'une caméra de surveillance dans la poste qui filme les allées et venues des clients, leur temps d'attente et leur temps passé au guichet, et ce au cours d'une journée. Dire que les arrivées des clients sont en moyenne deux fois plus fréquentes et la durée de service deux fois plus rapide revient à se repasser le film de la journée en accéléré (deux fois plus vite). Dans ce cas, le temps moyen passé à la poste est divisé par 2, puisque tout se passe deux fois plus vite. Par contre, on verra autant de clients entrer dans la poste et autant de clients servis tout de suite, ce qui explique que la probabilité d'être servi tout de suite ne change pas.