

Concours blanc de Mathématiques n°2

Remarques : Il est toujours permis d'admettre les résultats de questions précédentes pour traiter les questions suivantes. Chaque réponse doit être démontrée et toutes les étapes des calculs doivent être données. On attachera un soin tout particulier à la clarté et à la propreté de la rédaction. Les téléphones portables ainsi que tous appareils électroniques sont interdits. Tous les étudiants auront le choix entre deux sujets, un de type EML et un autre de type HEC-ESSEC Maths 1. Ils indiqueront lisiblement sur leur première copie le problème qu'ils auront choisi, et ne pourront traiter que les questions de ce problème.

1. Sujet type EML

Problème 1. Soit n un entier ≥ 2 . Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $a_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i -ème ligne et sur la j -ème colonne, et l'on pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par ailleurs, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la matrice colonne de composantes $v_1, \dots, v_n$, on la note $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Enfin, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la matrice colonne $C_j(A)$ constituée des coefficients de la j -ème colonne de A . En particulier, on a $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

(1) **Partie I : étude d'un exemple.**

Soient $U_0, V_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, de composantes respectives 1, 2, 3, 4 et 1, -1, 2, -1, et posons $A_0 = U_0^t V_0$.

- (a) Vérifier que 0 est valeur propre de A_0 et déterminer une base du sous-espace propre associé.
- (b)
 - (i) Calculer $A_0 U_0$.
 - (ii) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
 - (iii) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

(2) **Partie II : trace d'une matrice carrée.**

On rappelle que la trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux.

- (a) Montrer que la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
- (b) Démontrer que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- (c) Vérifier que, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\text{Tr}(^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

(3) **Partie III : une caractérisation des matrices de rang 1.**

- (a) Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 - (i) Justifier que $U^t V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer les coefficients de $U^t V$ à l'aide de ceux de U et V .
 - (ii) Exprimer $\text{Tr}(U^t V)$ à l'aide des coefficients de U et V .
 - (iii) Quel est le rang de $U^t V$? Justifier.
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
 - (i) Montrer qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.
 - (ii) En déduire qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$.
- (c) Énoncer une caractérisation des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

(4) **Partie IV : une application en probabilités.**

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose $m_{i,j} = P([X = i] \cap [Y = j])$, puis $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $U_X = (P([X = i]))_{1 \leq i \leq n}$ et $U_Y = (P([Y = i]))_{1 \leq i \leq n}$.

- (a) On suppose dans cette question que X et Y sont indépendantes. Calculer $U_X^t U_Y$ et en déduire que la matrice M est de rang 1.
- (b) Dans cette question, on suppose que la matrice M est de rang 1.
 - (i) Montrer que : $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$.
 - (ii) En déduire que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.
 - (iii) Montrer que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P([Y = j]) = \beta_j$.

(iv) En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(5) **Partie V : une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.

- Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- Montrer que ${}^t V U = (a)$, puis que $A^2 = aA$.
- Montrer que, si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On suppose que $a \neq 0$. Calculer AU et en déduire que A est diagonalisable.
- Enoncer une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour qu'une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit diagonalisable.

(6) **Partie VI : construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique.**

- Montrer que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On suppose désormais $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire. On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$, et l'on pose $S = V^t V$.
 - Montrer que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $S^2 = S$.
 - Montrer que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - Vérifier que $\Phi^2 = \Phi$. Que peut-on dire des valeurs propres de Φ ?
 - On note e l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problème 2.

Partie A : étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

- Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}$.
 - En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ .
- Montrer alors que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq \gamma \leq v_n$, puis que : $\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{v_n - u_n}{2}$.
 - En déduire une fonction en Python notée `approx` qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près.

Partie B : étude d'une fonction définie par une série

- Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$ converge.

Par la suite, on pose pour tout $x \in [0, +\infty[$: $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$.

- Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1+\frac{k}{n}}.$$

- En déduire la valeur de $S(1/2)$.

- Montrer que, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, on a : $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}$.

- (b) En déduire que la fonction S est croissante sur $[0, +\infty[$.
 (c) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in [0, +\infty[$, on a :

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

- (d) En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que : $\forall x \in [0, +\infty[, S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$.

Par la suite, on admet également que S' est continue sur $[0, +\infty[$.

- (4) (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}$.
 (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 (c) En utilisant la croissance de la fonction S , montrer que : $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.
 (5) (a) Si u_n est le réel défini dans la partie A, vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx.$$

- (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq \int_0^1 S(x) dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
 (c) Conclure que : $\int_0^1 S(x) dx = \gamma$.

Partie C : application en probabilité

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \geq 1$ et par $f(x) = 0$ sinon.

- (1) Montrer que f est une densité de probabilité.

Par la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f . De plus, on définit la variable aléatoire Y par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

- (2) (a) Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
 (b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance? Justifier.
 (c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right).$$

- (d) En déduire une fonction en Python notée `simulX` qui réalise et affiche une simulation de X .
 (3) (a) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$: $P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x)$, puis que : $P(Y \leq x) = S(x)$.
 (b) En déduire la fonction de répartition de Y .
 (c) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Y .
 (4) Justifier que Y admet une espérance puis, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $E(Y) = 1 - \gamma$.

2. Sujet type HEC-ESSEC Maths 1

Le problème comporte cinq parties. Dans les trois premières parties, on étudie des propriétés usuelles des matrices de la forme tAA , où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on lui associe la matrice :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$.

- On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne qui lui est associée est notée $\| \cdot \|$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tA désigne sa transposée et $\text{Tr}(A)$ désigne sa trace.
- I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
- Endomorphisme adjoint : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A , on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice tA . On notera aussi $s_f = f^* \circ f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice tAA .
- Si λ est un nombre réel, on définit :

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \text{Id}) \quad \text{et} \quad E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (A - \lambda I_n)X = 0\}.$$

- Liste étendue des valeurs propres : Lorsqu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on appelle liste étendue des valeurs propres de A une liste de nombres réels où chaque valeur propre λ de A se trouve répétée $\dim E_\lambda(A)$ fois. Par exemple, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

admet $(1, 4, 4)$ pour liste étendue des valeurs propres.

- $S(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- $S^+(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n^+(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) à valeurs propres positives ou nulles.
- On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que P est une matrice orthogonale si P est inversible et si $P^{-1} = {}^tP$.
- On rappelle la propriété suivante notée $(*)$: "toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, et toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure".
- Matrices définies par bloc : Considérons $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

où $(A_1, B_1) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})^2$, $(A_4, B_4) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})^2$, $(A_2, B_2) \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})^2$ et $(A_3, B_3) \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R})^2$. On utilisera sans démonstration les égalités suivantes :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_2 \\ {}^tA_3 & {}^tA_4 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Un premier exemple.

Soit a un réel différent de 1 et posons : $A = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$.

- (1) Quel est le rang de A ? Calculer A^2 . Que peut-on dire de l'endomorphisme f canoniquement associé à A ? Est-ce un endomorphisme diagonalisable? Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ?
- (2) Calculer $M = {}^tAA$. La matrice M est-elle diagonalisable? Comparer $\ker f$ et $\ker(s_f)$. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f ?
- (3) À quelle condition nécessaire et suffisante M est-elle la matrice d'un projecteur?

Partie II : Généralités.

(1) Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner l'expression de $\text{Tr}(^tAB)$ en fonction des coefficients de A et de B .
- (b) Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}(^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite du problème, on notera $\langle A, B \rangle_2 = \text{Tr}(^tAB)$ et $\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(^tAA)}$ la norme euclidienne associée.

(c) Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis vérifier que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(A^2) \leq \text{Tr}(^tAA).$$

Montrer également que : $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(^tAA) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A .

(2) Caractérisation de la matrice de f^* en base orthonormée : Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}'$ et A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

- (a) Rappeler la relation liant A et A' .
- (b) Rappeler pourquoi P est une matrice orthogonale.
- (c) En déduire que $^tA'$ est la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}'$.

(3) Réduction de s_f .

- (a) Vérifier que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $^tX(^tAA)X = \|AX\|^2$.
- (b) Montrer que $\ker f = \ker(s_f)$ et $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(f)$.
- (c) Vérifier que s_f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.
- (d) Montrer que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles.

On note $r = \text{rg}(f)$ et on suppose pour la fin de la question (3) que $1 \leq r \leq n-1$.

(e) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$

où D est une matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont strictement positifs et où $0_{r,n-r}, 0_{n-r,r}, 0_{n-r,n-r}$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls.

(f) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $A_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$. Vérifier que $^tA_1A_1 + ^tA_3A_3 = D$.

(4) Étude des valeurs propres de A^tA : On note $\tau_f = f \circ f^*$ l'endomorphisme canoniquement associé à A^tA .

- (a) Montrer que $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(\tau_f)$ et $\dim \ker(s_f) = \dim \ker(\tau_f)$.
- (b) Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé. Vérifier que λ est une valeur propre de τ_f et que $f(x)$ est un vecteur propre associé. Montrer alors que :

$$\dim E_\lambda(s_f) \leq \dim E_\lambda(\tau_f).$$

(c) Montrer que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ , on a :

$$\dim E_\lambda(s_f) = \dim E_\lambda(\tau_f).$$

(d) En déduire enfin qu'il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^tA = \Omega(^tAA)\Omega$.

(5) Une inégalité : Dans cette question, on pose $V = [0, +\infty[^n$, $U =]0, +\infty[^n$ et on considère l'application φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i.$$

On admet que V est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Montrer que $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.
- (b) En déduire que φ admet un maximum global noté M sur W .
- (c) Calculer $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$.
- (d) En déduire que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$.

- (e) Déterminer alors la valeur du maximum M et préciser en quel vecteur de U il est atteint.
 (f) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives ou nulles et on note $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ une liste étendue des valeurs propres de S . Dédurre de ce qui précède que :

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{\text{Tr}(S)}{n} \right)^n.$$

Dans quel cas a-t-on égalité dans cette inégalité?

- (6) Dans cette question, on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de tAA . On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x) = \prod_{i=1}^n (x + \lambda_i).$$

Montrer alors que, pour tout réel $x \geq 0$:

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{\text{Tr}(xI_n + {}^tAA)}{n} \right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n.$$

Partie III : Étude de deux cas particuliers.

Dans cette partie encore, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- (1) On suppose dans cette question que f est un projecteur de rang $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 (a) Montrer que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme f est égale à r .
 (b) On reprend les notations de la question (3) de la partie II selon lesquelles :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r, n-r} \\ A_3 & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $A_1^2 = A_1$ et que $\text{Tr}(A_1) = r$, et en déduire la matrice A_1 .

- (c) Montrer alors que les valeurs propres non nulles de tAA sont supérieures ou égales à 1 et que $\text{Tr}({}^tAA) \geq r$.
 (d) Quels sont les projecteurs orthogonaux pour lesquels $\text{Tr}({}^tAA) = r$?
 (2) On suppose dans cette question que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \text{Id}$.
 (a) Justifier que tAA est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et de tA .
 (b) Montrer que, si λ est une valeur propre de tAA , alors $1/\lambda$ est aussi une valeur propre de tAA et que :

$$\dim E_{\lambda}({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}({}^tAA).$$

- (c) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

puis établir l'équivalence logique : $x + \frac{1}{x} = 2 \iff x = 1$.

- (d) On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de tAA . Montrer que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 2^n.$$

- (e) Quelles sont les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = 2^n$? Montrer que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Partie IV : Décomposition polaire.

Dans cette partie encore, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A et on suppose de plus que A est inversible.

- (1) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i.$$

On pose alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i$.

Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$.

- (2) Soit ω un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\omega \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $\omega^2 = s_f$. Montrer que, pour toute valeur propre μ de ω , on a $E_{\mu}(\omega) \subset E_{\mu^2}(s_f)$, et montrer ensuite que :

$$E_{\mu}(\omega) = E_{\mu^2}(s_f) \quad \text{et} \quad \text{Sp}(\omega) = \left\{ \sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(s_f) \right\}.$$

- (3) En déduire qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et tel que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f , la matrice de v est diagonale.

- (4) En déduire qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tAA}$ appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^2 = {}^tAA$.
- (5) Vérifier que la matrice $A\left(\sqrt{{}^tAA}\right)^{-1}$ est orthogonale. Montrer alors qu'il existe un unique couple $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$. C'est ce qu'on appelle la décomposition polaire de A .

Partie V : Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on note $d(M)$ la distance de M à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \inf_{V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2.$$

- (1) Justifier que $d(M)$ est bien définie.
- (2) Soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.$$

Montrer que les applications $V \mapsto VR^{-1}$ et $V \mapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même. En déduire que :

$$d(M) = d(RM) = d(MR).$$

- (3) On note $A = \Omega S$ la décomposition polaire de A . On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$S = PD^tP.$$

Vérifier que $d(A) = d(D)$.

- (4) Soit $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On note $W = \frac{1}{2}(V + {}^tV)$ et v l'endomorphisme canoniquement associé à V .
- (a) Justifier que W est diagonalisable. On note ω l'endomorphisme canoniquement associé à W .
- (b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifier que $\langle \omega(x), x \rangle = \langle v(x), x \rangle$ et que $\|v(x)\| = \|x\|$. En déduire que :
- $$|\langle \omega(x), x \rangle| \leq \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \langle x - \omega(x), x \rangle \geq 0.$$
- (c) Montrer alors que les valeurs propres de $I_n - W$ sont positives ou nulles.
- (d) On note $W = (w_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $1 - w_{i,i} \geq 0$.
- (e) Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $w_{i,i} = 1$ si et seulement si $W = I_n$.
- (5) On conserve les notations des deux questions précédentes.
- (a) Montrer que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\langle I_n - V, D \rangle_2 = 2\langle I_n - W, D \rangle_2.$$

- (b) En déduire que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0.$$

- (c) Montrer alors que :

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \left\| \sqrt{{}^tAA} - I_n \right\|_2,$$

et montrer aussi que I_n est l'unique élément V de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $d(A) = \|D - V\|_2$.