

Corrigé du concours blanc de Mathématiques n°2

1. Sujet type EML

Corrigé du problème 1. Soit n un entier ≥ 2 . Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par $a_{i,j}$ le coefficient de A situé sur la i -ème ligne et sur la j -ème colonne, et l'on pose $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Par ailleurs, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la matrice colonne de composantes $v_1, \dots, v_n$, on la note $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$. Enfin, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la matrice colonne $C_j(A)$ constituée des coefficients de la j -ème colonne de A . En particulier, on a $C_j(A) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n}$.

(1) **Partie I : étude d'un exemple.**

Soient $U_0, V_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, de composantes respectives 1, 2, 3, 4 et 1, -1, 2, -1, et posons $A_0 = U_0 {}^t V_0$.

(a) Vérifions tout d'abord que 0 est valeur propre de A_0 . Par des calculs simples, on trouve que :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \quad -1 \quad 2 \quad -1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Comme les deux premières colonnes de A_0 sont proportionnelles, on voit que $\text{rg}(A_0) < 4$. En particulier, ceci entraîne que $\text{rg}(A_0 - 0 \cdot \text{Id}) < 4$, et donc :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A_0.}$$

A présent, déterminons une base du sous-espace propre associé $E_0(A_0)$. Soit X un vecteur colonne de composantes x_1, x_2, x_3, x_4 . Alors :

$$X \in E_0(A_0) \iff A_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - 0 \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En termes de coordonnées, cela nous donne que (x_1, x_2, x_3, x_4) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}.$$

On résout alors ce système par la méthode du pivot de Gauss. En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$, on obtient que :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Si l'on choisit x_2, x_3, x_4 comme paramètres, on trouve que $x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4$, $x_2 = x_2$, $x_3 = x_3$ et $x_4 = x_4$, et donc :

$$\begin{aligned} X \in E_0(A_0) &\iff \exists (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3, \quad X = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

En particulier, si X_2, X_3, X_4 sont les vecteurs colonnes de composantes respectives $1, 1, 0, 0, -2, 0, 1, 0$ et $1, 0, 0, 1$, alors on voit que $E_0(A_0) = \text{Vect}(X_2, X_3, X_4)$, et donc la famille (X_2, X_3, X_4) est génératrice dans $E_0(A_0)$. De plus, on voit que :

$$\text{rg}(X_2, X_3, X_4) = \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 3.$$

Comme la famille (X_2, X_3, X_4) est de rang 3 et qu'elle compte 3 éléments, il s'ensuit qu'elle est libre, d'où l'on déduit que :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(A_0).$$

(b) (i) Calculons $A_0 U_0$. D'après la question précédente, on trouve que :

$$A_0 U_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$A_0 U_0 = U_0.$$

(ii) Montrons que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on sait que $A_0 U_0 = U_0$ et que $U_0 \neq 0$, et donc U_0 est vecteur propre de A_0 pour la valeur propre 1. En particulier, on voit que 1 est valeur propre de A_0 , et donc :

$$\dim E_1(A_0) \geq 1.$$

De plus, on sait d'après la question (1)(a) que 0 est valeur propre de A_0 et que :

$$\dim E_0(A_0) = 3.$$

En particulier, on obtient que $\dim E_0(A_0) + \dim E_1(A_0) \geq 4$. Mais comme A_0 est une matrice carrée d'ordre 4, on sait par ailleurs que $\dim E_0(A_0) + \dim E_1(A_0) \leq 4$, et donc :

$$\dim E_0(A_0) + \dim E_1(A_0) = 4 = \dim \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent, on en déduit d'après le cours que :

$$A_0 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

(iii) Déterminons une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A_0 = PDP^{-1}$. D'après la question précédente, on sait que $\dim E_0(A_0) + \dim E_1(A_0) = 4$. Comme $\dim E_0(A_0) = 3$ d'après la question (1)(a), on obtient que $\dim E_1(A_0) = 1$. Mais comme U_0 est vecteur propre de A_0 pour la valeur propre 1, on voit que U_0 appartient à $E_1(A_0)$. Qui plus est, la famille (U_0) est libre (car $U_0 \neq 0$). Comme $\dim E_1(A_0) = 1$, il s'ensuit que (U_0) est une base de $E_1(A_0)$. Mais comme (X_2, X_3, X_4) est une base de $E_0(A_0)$, on en déduit que :

$$A_0 = PDP^{-1}, \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Partie II : trace d'une matrice carrée.

On rappelle que la trace d'une matrice carrée d'ordre est la somme de ses coefficients diagonaux.

(a) Montrons que la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Par construction, la trace est une application qui, à toute matrice carrée d'ordre n , associe la somme de ses coefficients diagonaux, et donc c'est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Reste à montrer qu'elle est linéaire. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si l'on pose $C = \lambda A + \mu B = (c_{i,j})$, alors

on voit d'après les propriétés du calcul matriciel que $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, et donc on trouve par linéarité de la somme que :

$$\text{Tr}(\lambda A + \mu B) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n [\lambda a_{i,i} + \mu b_{i,i}] = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \mu \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la trace est une application linéaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

- (b) Démontrons que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Pour ce faire, on considère deux matrices carrées $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ d'ordre n . Si l'on pose $C = AB = (c_{i,j})$ et $D = BA = (d_{i,j})$, alors on a d'après les propriétés du produit matriciel que, pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{et} \quad d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j}.$$

Par définition de la trace, on trouve que :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}.$$

Par intervention des signes sommes et en permutant les indices i et k , on obtient que :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{k,i} b_{i,k} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{i,k} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \text{Tr}(D) = \text{Tr}(BA).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$:

$$\boxed{\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).}$$

- (c) Vérifions que, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\text{Tr}(^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$. Si l'on pose $^tA = M = (m_{i,j})$, alors on constate que $m_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Dès lors, on obtient avec les calculs de la question précédente que :

$$\text{Tr}(^tAA) = \text{Tr}(MA) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{i,k} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a_{k,i})^2.$$

En remplaçant les indices i et k par j et i respectivement, on trouve que :

$$\text{Tr}(^tAA) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (a_{i,j})^2.$$

Par conséquent, on en déduit par intervention des sommes que, pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\text{Tr}(^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2.}$$

(3) Partie III : une caractérisation des matrices de rang 1.

- (a) Soient $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
 (i) Justifions que $U^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminons les coefficients de U^tV à l'aide de ceux de U et V .
 Comme U, V appartiennent à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on voit que U appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que V appartient à $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Dès lors, on obtient d'après les propriétés du produit matriciel que :

$$\boxed{U^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Toujours d'après les propriétés du produit matriciel, on trouve que :

$$U^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{U^tV = (u_i v_j)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}.$$

- (ii) Exprimons $\text{Tr}(U^t V)$ à l'aide des coefficients de U et V . D'après la question précédente et par définition de la trace, on trouve que :

$$\text{Tr}(U^t V) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix} \right) = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{Tr}(U^t V) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

- (iii) Déterminons le rang de $U^t V$. D'après les questions précédentes, on voit que toutes les colonnes de $U^t V$ sont proportionnelles au vecteur colonne U , et donc :

$$\text{rg}(U^t V) \leq 1.$$

En outre, comme U et V sont deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe des indices i, j tels que $u_i \neq 0$ et $v_j \neq 0$. En particulier, on voit que $u_i v_j \neq 0$. Mais comme $u_i v_j$ est le coefficient de $U^t V$ situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne, il s'ensuit que $U^t V \neq 0$, et donc :

$$\text{rg}(U^t V) > 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{rg}(U^t V) = 1.$$

- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

- (i) Montrons qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$. Comme A est une matrice de rang 1, elle est non nulle et donc l'une de ses colonnes est non nulle. En particulier, il existe un indice $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_{j_0}(A) \neq 0$. Fixons cet indice j_0 . Comme A est une matrice de rang 1, ses colonnes engendrent un espace vectoriel E de dimension 1. Comme $C_{j_0}(A) \neq 0$, on voit que $(C_{j_0}(A))$ est une famille libre de E . Mais comme E est de dimension 1, cette famille est aussi génératrice dans E . En particulier, toutes les colonnes de A sont des multiples de $C_{j_0}(A)$. Par conséquent, on en déduit qu'il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A).$$

- (ii) Montrons qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$. Pour ce faire, fixons la matrice colonne $C_{j_0}(A)$ trouvée à la question précédente, et posons $U = (u_i) = C_{j_0}(A)$. D'après la question précédente, on sait que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, C_j(A) = \alpha_j U$. Si l'on pose $V = (v_i)$ avec $v_i = \alpha_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors on trouve que :

$$\begin{aligned} U^t V &= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (v_1 \quad \dots \quad v_n) \\ &= \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1 & \dots & \alpha_n u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 u_n & \dots & \alpha_n u_n \end{pmatrix} \\ &= (\alpha_1 C_{j_0}(A) \quad \dots \quad \alpha_n C_{j_0}(A)) \\ &= (C_1(A) \quad \dots \quad C_n(A)). \end{aligned}$$

Mais comme $C_1(A), \dots, C_n(A)$ sont les colonnes de A , il s'ensuit que $U^t V = A$. A noter que les matrices colonnes U et V sont non nulles, sinon la matrice A serait nulle, ce qui est impossible vu qu'elle est de rang 1 par hypothèse. Par conséquent, on en déduit qu'il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = U^t V.$$

- (c) D'après la question (3)(a)(iii), on sait que toute matrice de la forme $A = U^t V$, où U, V sont des matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, est de rang 1. Réciproquement, on sait d'après la question précédente que toute matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de la forme $A = U^t V$, où U, V sont des matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\text{rg}(A) = 1 \iff \exists (U, V) \in (\mathcal{M}_{n,1} \setminus \{0\})^2, A = U^t V.}$$

(4) **Partie IV : une application en probabilités.**

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on pose $m_{i,j} = P([X = i] \cap [Y = j])$, puis $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, $U_X = (P([X = i]))_{1 \leq i \leq n}$ et $U_Y = (P([Y = j]))_{1 \leq j \leq n}$.

- (a) On suppose dans cette question que X et Y sont indépendantes. Calculons tout d'abord $U_X^t U_Y$. D'après les calculs de la question (3)(a)(i) et par définition de U_X et U_Y , on trouve que :

$$U_X^t U_Y = \begin{pmatrix} P([X = 1])P([Y = 1]) & \dots & P([X = 1])P([Y = n]) \\ \vdots & & \vdots \\ P([X = n])P([Y = 1]) & \dots & P([X = n])P([Y = n]) \end{pmatrix}.$$

Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on sait que $P([X = i])P([Y = j]) = P([X = i] \cap [Y = j])$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, et donc :

$$U_X^t U_Y = \begin{pmatrix} P([X = 1] \cap [Y = 1]) & \dots & P([X = 1] \cap [Y = n]) \\ \vdots & & \vdots \\ P([X = n] \cap [Y = 1]) & \dots & P([X = n] \cap [Y = n]) \end{pmatrix}.$$

Par définition de la matrice M , on en déduit que :

$$\boxed{U_X^t U_Y = M.}$$

A présent, montrons que la matrice M est de rang 1. Comme X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, les familles $([X = i])_{1 \leq i \leq n}$ et $([Y = j])_{1 \leq j \leq n}$ sont des systèmes complets d'événements, et donc :

$$\sum_{i=1}^n P([X = i]) = \sum_{j=1}^n P([Y = j]) = 1.$$

Dès lors, la somme des composantes de U_X (resp. U_Y) est non nulle, et donc l'une des composantes de U_X (resp. U_Y) est non nulle. En particulier, les matrices colonnes U_X et U_Y sont non nulles. Mais comme $M = U_X^t U_Y$, on en déduit avec la question (3)(c) que :

$$\boxed{\text{rg}(M) = 1.}$$

- (b) Dans cette question, on suppose que la matrice M est de rang 1.

(i) Montrons que : $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$. Par définition des $C_i(M)$, on trouve que :

$$\begin{aligned} C_1(M) + \dots + C_n(M) &= \begin{pmatrix} P([X = 1] \cap [Y = 1]) \\ \vdots \\ P([X = n] \cap [Y = 1]) \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} P([X = 1] \cap [Y = n]) \\ \vdots \\ P([X = n] \cap [Y = n]) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P([X = 1] \cap [Y = 1]) + \dots + P([X = 1] \cap [Y = n]) \\ \vdots \\ P([X = n] \cap [Y = 1]) + \dots + P([X = n] \cap [Y = n]) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme la famille $([Y = j])_{1 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements d'après la question précédente, on obtient avec la formule des probabilités totales que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P([X = i]) = P([X = i] \cap [Y = 1]) + \dots + P([X = i] \cap [Y = n]).$$

Dès lors, il s'ensuit avec les calculs précédents que :

$$C_1(M) + \dots + C_n(M) = \begin{pmatrix} P([X = 1]) \\ \vdots \\ P([X = n]) \end{pmatrix}.$$

Mais par définition de U_X , on en déduit que :

$$\boxed{C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X.}$$

- (ii) Montrons que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\beta_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$. Pour ce faire, considérons l'espace vectoriel E engendré par les matrices colonnes $C_1(M), \dots, C_n(M)$. Comme la matrice M est de rang 1, on voit que $\dim E = 1$. De plus, comme $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$ d'après la question précédente, il s'ensuit que U_X appartient à E . En outre, comme la famille $([X = i])_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements, on trouve que :

$$\sum_{i=1}^n P([X = i]) = 1.$$

Dès lors, la somme des composantes de U_X est non nulle, et donc l'une des composantes de U_X est non nulle. En particulier, les matrices colonnes U_X est non nulle, et donc (U_X) est une famille libre de E . Comme $\dim E = 1$, il s'ensuit que (U_X) est une base de E . Mais comme les matrices colonnes $C_1(M), \dots, C_n(M)$ appartiennent toutes à E par définition, elles sont toutes des multiples de U_X . Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \beta_j \in \mathbb{R}, C_j(M) = \beta_j U_X.}$$

- (iii) Montrons que : $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P([Y = j]) = \beta_j$. D'après la question précédente, on sait que $C_j(M) = \beta_j U_X$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui signifie que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{pmatrix} P([X = 1] \cap [Y = j]) \\ \vdots \\ P([X = n] \cap [Y = j]) \end{pmatrix} = \beta_j \begin{pmatrix} P([X = 1]) \\ \vdots \\ P([X = n]) \end{pmatrix}.$$

En sommant les composantes de ces matrices colonnes, on trouve que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$P([X = 1] \cap [Y = j]) + \dots + P([X = n] \cap [Y = j]) = \beta_j [P([X = 1]) + \dots + P([X = n])].$$

Comme $([X = i])_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements, on sait que $P([X = 1]) + \dots + P([X = n]) = 1$, ce qui entraîne que :

$$P([X = 1] \cap [Y = j]) + \dots + P([X = n] \cap [Y = j]) = \beta_j \times 1 = \beta_j.$$

De plus, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $([X = i])_{1 \leq i \leq n}$, on obtient que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\beta_j = P([X = 1] \cap [Y = j]) + \dots + P([X = n] \cap [Y = j]) = P([Y = j]).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\boxed{\beta_j = P([Y = j]).}$$

- (iv) Montrons que les variables X et Y sont indépendantes. D'après les questions précédentes, on voit que $C_j(M) = P([Y = j])U_X$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui signifie que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{pmatrix} P([X = 1] \cap [Y = j]) \\ \vdots \\ P([X = n] \cap [Y = j]) \end{pmatrix} = P([Y = j]) \begin{pmatrix} P([X = 1]) \\ \vdots \\ P([X = n]) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on voit sur les composantes de ces matrices colonnes que $P([X = i] \cap [Y = j]) = P([Y = j])P([X = i])$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Mais comme X et Y sont à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les variables } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

(5) Partie V : une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. On note U et V deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$ et on note $a = \text{Tr}(A)$.

- (a) Montrons tout d'abord que 0 est valeur propre de A . Comme U et V sont deux matrices colonnes non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que $A = U^t V$, on sait d'après la question (3)(c) que $\text{rg}(A) = 1$. Comme n est un entier ≥ 2 par hypothèse, on voit que :

$$\text{rg}(A - 0 \cdot \text{Id}) = \text{rg}(A) = 1 < n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A.}$$

A présent, déterminons la dimension du sous-espace propre associé. Pour ce faire, considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A . D'après le cours, on sait que les sous-espaces propres $E_0(f)$ et $E_0(A)$ sont isomorphes. En particulier, ils ont même dimension, et donc :

$$\dim E_0(A) = \dim E_0(f) = \dim \ker(f - 0 \cdot \text{Id}) = \dim \ker(f).$$

Comme A est la matrice de f dans la base canonique, on sait d'après le cours que $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 1$. En particulier, on obtient avec le théorème du rang que :

$$\dim E_0(A) = \dim \ker(f) = \dim \mathbb{R}^n - \text{rg}(f) = n - 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\dim E_0(A) = n - 1.}$$

- (b) Montrons tout d'abord que ${}^tVU = (a)$. D'après la question (3)(a)(ii), on trouve que :

$$a = \text{Tr}(A) = \text{Tr}(U^tV) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

En outre, on obtient par des calculs simples que :

$${}^tVU = (v_1 \quad \dots \quad v_n) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (u_1 v_1 + \dots + u_n v_n) = \left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{{}^tVU = (a).}$$

A présent, montrons que $A^2 = aA$. D'après les propriétés du produit matriciel, on trouve que :

$$A^2 = (U^tV)^2 = U^tVU^tV = U ({}^tVU) {}^tV.$$

Comme ${}^tVU = (a)$, on voit que tVU est un nombre réel (aux parenthèses près). Mais comme la multiplication par un réel commute avec le produit matriciel, on obtient que :

$$A^2 = U ({}^tVU) {}^tV = U \times (a) \times {}^tV = a (U^tV) = aA.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A^2 = aA.}$$

- (c) Montrons que, si $a = 0$, alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde et on suppose que $a = 0$ et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $A^2 = 0$ d'après la question précédente, le polynôme $x \mapsto x^2$ est annulateur de A , et donc 0 est la seule valeur propre possible de A . Comme de plus 0 est valeur propre de A d'après la question (5)(a), on trouve que 0 est la seule valeur propre de A . Dès lors, comme A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Comme 0 est la seule valeur propre de A , les coefficients diagonaux de D sont tous nuls, et donc $D = 0$. Dès lors, il s'ensuit que :

$$A = P \times 0 \times P^{-1} = 0,$$

mais ceci est impossible puisque A est de rang 1 (et ne peut donc être nulle). Par conséquent, on en déduit que, si $a = 0$:

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

- (d) On suppose que $a \neq 0$. Calculons tout d'abord AU . D'après les propriétés du produit matriciel, on trouve que :

$$AU = (U^tV)U = U ({}^tVU).$$

Comme ${}^tVU = (a)$, on voit que tVU est un nombre réel (aux parenthèses près). Comme la multiplication par un réel commute avec le produit matriciel, on obtient que :

$$AU = U ({}^tVU) = U \times (a) = aU.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{AU = aU.}$$

A présent, montrons que A est diagonalisable. D'après les calculs ci-dessus, on sait que $AU = aU$ et que $U \neq 0$, et donc U est vecteur propre de A pour la valeur propre $a \neq 0$. En particulier, on voit que a est valeur propre de A , et donc :

$$\dim E_a(A) \geq 1.$$

De plus, on sait d'après la question (5)(a) que 0 est valeur propre de A et que :

$$\dim E_0(A) = n - 1.$$

En particulier, on obtient que $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \geq n - 1 + 1 = n$. Mais comme A est une matrice carrée d'ordre n , on sait par ailleurs que $\dim E_0(A) + \dim E_a(A) \leq n$, et donc :

$$\dim E_0(A) + \dim E_a(A) = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

Par conséquent, on en déduit d'après le cours que :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

- (e) D'après les questions précédentes, on sait que A n'est pas diagonalisable si $a = 0$, et qu'elle l'est sinon. Mais comme $a = \text{Tr}(A)$, on en déduit que, pour toute matrice A de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \text{Tr}(A) \neq 0.}$$

(6) Partie VI : construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique.

- (a) Montrons que l'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle = \text{Tr}(^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on commence par exprimer $\langle M, N \rangle$ en fonction des coefficients de $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$. Si l'on pose $^tM = (\alpha_{i,j})$ et $C = ^tMN = (c_{i,j})$, alors $\alpha_{i,j} = m_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, et on a pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} n_{k,j}.$$

Par définition de la trace, il s'ensuit que :

$$\text{tr}(^tMN) = \sum_{j=1}^n c_{j,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{k,j} n_{k,j}.$$

Par interversion des signes sommes et en posant $k = i$, on en déduit que :

$$\boxed{\langle M, N \rangle = \text{tr}(^tMN) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

A présent, montrons que $\langle, \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

Première étape : $\langle, \rangle$ est symétrique.

En effet, pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle M, N \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n_{i,j} m_{i,j} = \langle N, M \rangle,$$

d'où il s'ensuit que $\langle, \rangle$ est symétrique.

Deuxième étape : $\langle, \rangle$ est bilinéaire.

En effet, pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j})$ et $P = (p_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de la transposition et de la trace que :

$$\begin{aligned} \langle \lambda M + \mu N, P \rangle &= \text{tr} [^t(\lambda M + \mu N)P] \\ &= \text{tr} [(\lambda ^tM + \mu ^tN)P] \\ &= \text{tr} [\lambda ^tMP + \mu ^tNP] \\ &= \lambda \text{tr} [^tMP] + \mu \text{tr} [^tNP] \\ &= \lambda \langle M, P \rangle + \mu \langle N, P \rangle, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\langle, \rangle$ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire par symétrie.

Troisième étape : $\langle, \rangle$ est définie positive.

En effet, pour toute matrice $M = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle M, M \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \geq 0,$$

et donc $\langle, \rangle$ est positive. De plus, si $\langle M, M \rangle = 0$, alors on voit que $m_{i,j} = 0$ pour tous i, j (car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls), et donc $M = 0$. En particulier, la forme bilinéaire $\langle, \rangle$ est définie positive.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\langle, \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

- (b) On suppose désormais $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire. On considère une matrice colonne $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$, et l'on pose $S = V^t V$.
- (i) Montrer tout d'abord que S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après les propriétés de la transposition, on trouve que :

$${}^t S = {}^t (V^t V) = {}^t ({}^t V) {}^t V = V^t V = S.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{S \text{ est symétrique.}}$$

A présent, montrons que $S^2 = S$. D'après les calculs de la question (5)(b) avec $U = V$ (et donc avec $a = V^t V$), on trouve que :

$$S^2 = (V^t V)^2 = aS.$$

Comme $a = V^t V = \sum_{i=1}^n v_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$ par hypothèse, on en déduit que :

$$\boxed{S^2 = S.}$$

- (ii) Montrons que l'application $\Phi : M \mapsto SM$ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Tout d'abord, on doit vérifier que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, Φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Reste à montrer que Φ est linéaire. Soient M, N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. D'après les propriétés du produit matriciel, on trouve que :

$$\Phi(\lambda M + \mu N) = S(\lambda M + \mu N) = \lambda SM + \mu SN = \lambda \Phi(M) + \mu \Phi(N).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

A présent, montrons que Φ est symétrique. Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \langle SM, N \rangle = \text{Tr}({}^t(SM)N).$$

D'après les propriétés de la transposition, on obtient que :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \text{Tr}({}^t(SM)N) = \text{Tr}({}^t M {}^t S N).$$

Comme la matrice S est symétrique d'après la question (6)(b)(i), on trouve que :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \text{Tr}({}^t M {}^t S N) = \text{Tr}({}^t M S N).$$

Comme la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux, elle ne change pas par transposition (puisque les coefficients diagonaux restent les mêmes), et donc on obtient avec les propriétés de la transposition que :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \text{Tr}({}^t M S N) = \text{Tr}({}^t ({}^t M S N)) = \text{Tr}({}^t N {}^t S {}^t ({}^t M)) = \text{Tr}({}^t N {}^t S M) = \text{Tr}({}^t (S N) M).$$

En particulier, on vient de trouver que :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \langle \Phi(N), M \rangle.$$

Mais comme le produit scalaire est symétrique, il s'ensuit que :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \langle M, \Phi(N) \rangle.$$

Comme ceci est vrai pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

(iii) Vérifions tout d'abord que $\Phi^2 = \Phi$. Comme $S^2 = S$, on trouve que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\Phi^2(M) = \Phi(\Phi(M)) = S\Phi(M) = SSM = S^2M = SM = \Phi(M).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\Phi^2 = \Phi.}$$

Comme $\Phi^2 = \Phi$, on voit que $x \mapsto x^2 - x$ est un polynôme annulateur de Φ , et donc 0 et 1 sont les seules valeurs propres éventuelles de Φ . En d'autres termes, on a l'inclusion :

$$\text{Sp}(\Phi) \subset \{0, 1\}.$$

Comme $\text{Tr}(S) = {}^tVV = \sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$ d'après les questions précédentes, la matrice S est non nulle. De plus, comme $S^2 = S$, on voit que $\Phi(S) = S^2 = S$, et donc 1 est valeur propre de Φ . En outre, comme $S = V^tV$ et que V est une matrice colonne non nulle, S est de rang 1 d'après la partie III. En particulier, elle est distincte de l'identité (car $n \geq 2$), et donc $S - \text{Id} \neq 0$. Mais comme $S^2 = S$, on voit que $\Phi(S - \text{Id}) = S(S - \text{Id}) = S^2 - S = 0 = 0 \times S$, et donc 0 est aussi valeur propre de Φ . Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Sp}(\Phi) = \{0, 1\}.}$$

(iv) On note e l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que les sous-espaces vectoriels $\ker(\Phi)$ et $\ker(\Phi - e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\Phi^2 = \Phi$ d'après la question précédente, l'endomorphisme Φ est un projecteur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc les sous-espaces vectoriels $\ker(\Phi)$ et $\mathfrak{Im}(\Phi) = \ker(\Phi - e)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme de plus 0 et 1 sont des valeurs propres de Φ d'après la question précédente, on voit que :

$$E_0(\Phi) = \ker(\Phi - 0.e) = \ker(\Phi) \quad \text{et} \quad E_1(\Phi) = \ker(\Phi - e).$$

Mais comme Φ est un endomorphisme symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux d'après le cours, et donc :

$$\boxed{\ker(\Phi) \text{ et } \ker(\Phi - e) \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Corrigé du problème 2.

Partie A : étude de deux suites

On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

(1) (a) Montrons que, pour tout $t > 0$, on a : $\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}$. Tout d'abord, fixons un réel $t > 0$. Comme la fonction $\ln$ est continue sur $[t, t+1]$ et dérivable sur $]t, t+1[$, on obtient avec l'égalité des accroissements finis qu'il existe un réel $c \in]t, t+1[$ tel que :

$$\ln(t+1) - \ln(t) = \frac{\ln(t+1) - \ln(t)}{t+1-t} = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

Comme $0 < t < c < t+1$, on voit que $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{1}{t}$, et donc :

$$\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $t > 0$:

$$\boxed{\frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.}$$

(b) Montrons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont monotones, puis qu'elles convergent vers une même limite notée γ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n+1) \right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1).$$

D'après la question précédente, on voit que $\frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln(n+1)$, ce qui entraîne que :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que :

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n).$$

D'après la question précédente, on voit que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n)$, ce qui entraîne que :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient que :

$$v_n - u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Comme la fonction $\ln$ est continue en 1, on trouve par composition des limites que :

$$v_n - u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0.$$

En particulier et au vu des points précédents, on constate que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, on en déduit que :

les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite (notée γ).

- (2) Montrons que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. D'après la question précédente, on sait que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ , ce qui signifie que :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma.$$

Comme $\ln(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, on obtient par quotient des limites que :

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

- (3) (a) Justifions tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leq \gamma \leq v_n$. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle converge vers γ d'après la question (1)(b), on voit que $u_n \leq \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De même, comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et qu'elle converge vers γ d'après la question (1)(b), on voit que $\gamma \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n \leq \gamma \leq v_n.$$

A présent, montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{v_n - u_n}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve que :

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| = \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2\gamma}{2} \right| = \left| \frac{v_n - \gamma}{2} + \frac{u_n - \gamma}{2} \right|.$$

D'après l'inégalité triangulaire, ceci entraîne que :

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \left| \frac{v_n - \gamma}{2} \right| + \left| \frac{u_n - \gamma}{2} \right|.$$

Comme $v_n \geq \gamma$ d'après ce qui précède, il s'ensuit que $v_n - \gamma \geq 0$, et donc $\left| \frac{v_n - \gamma}{2} \right| = \frac{v_n - \gamma}{2}$. De même, comme $u_n \leq \gamma$ d'après ce qui précède, il s'ensuit que $u_n - \gamma \leq 0$, et donc $\left| \frac{u_n - \gamma}{2} \right| = -\frac{u_n - \gamma}{2}$. Dès lors, ceci nous donne avec l'inégalité ci-dessus que :

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{v_n - \gamma}{2} - \frac{u_n - \gamma}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{v_n - u_n}{2}.$$

- (b) Ecrivons une fonction en Python notée **approx** qui renvoie une approximation du réel γ à 10^{-5} près. D'après les questions (1)(b) et (3)(a), on constate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

En particulier, on voit que $\frac{u_n + v_n}{2}$ est une approximation de γ à 10^{-5} près si $\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 10^{-5}$. Dès lors, pour écrire la fonction en Python recherchée, on pourra procéder comme suit :

```
import numpy as np

def approx():
    s=1
    n=1
    while 0.5*np.log(1+(1/n))>10**(-5):
        s=s+1/(n+1)
        n=n+1
    u=s-np.log(n+1)
    v=s-np.log(n)
    a=(u+v)/2
    return a
```

Partie B : étude d'une fonction définie par une série

- (1) Montrons que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la série $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$ converge. Soit x un réel positif fixé. Par un calcul simple, on trouve que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{k+x-k}{k(k+x)} = \frac{x}{k(k+x)}.$$

Dès lors, comme $x \geq 0$, on voit que $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \geq 0$ et $k(k+x) \geq k^2 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, ceci entraîne que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \leq \frac{x}{k^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, il s'ensuit que $\sum \frac{x}{k^2}$ converge par linéarité, et donc la série $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$ converge d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs. Par conséquent :

$$\text{la série } \sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Par la suite, on pose pour tout $x \in [0, +\infty[$: $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$.

- (2) (a) Calculons $S(0)$ et $S(1)$. Par définition, on voit que :

$$S(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0.$$

De plus, on obtient par télescopage que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$S(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{S(0) = 0 \text{ et } S(1) = 1.}$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Pour ce faire, on va établir par récurrence la propriété $\mathcal{P}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\mathcal{P}(n) : " \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} ".$$

Tout d'abord, on voit que $\mathcal{P}(1)$ est vraie. En effet, on trouve par des calculs simples que :

$$\sum_{k=1}^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

De plus, on obtient que :

$$2 - 2 \sum_{k=1+1}^{2+1} \frac{1}{k} = 2 - 2 \sum_{k=2}^3 \frac{1}{k} = 2 - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 2 - 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

ce qui entraîne que $\sum_{k=1}^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=1+1}^{2+1} \frac{1}{k}$, et donc $\mathcal{P}(1)$ est bien vraie. A présent, supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \geq 1$, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, on trouve que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1 + \frac{1}{2}} \\ &= 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n + \frac{3}{2}} \\ &= 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+3} \\ &= 2 - 2 \left(\sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+3} \\ &= 2 - 2 \left(\sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+3} \\ &= 2 - 2 \left(\sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+3} \\ &= 2 - 2 \sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n+3} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{2n+3} \\ &= 2 - 2 \sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie à tout ordre $n \geq 1$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}.$$

Montrons à présent que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Tout d'abord, on peut commencer par écrire que :

$$2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

En effectuant le changement d'indice $i = k - n$ dans la somme de droite ci-dessus, on obtient que :

$$2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}.$$

Enfin, en utilisant la linéarité de la somme, ceci nous donne que :

$$2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2}{1 + \frac{i}{n}}.$$

Par conséquent, on en déduit avec la première égalité que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}}.}$$

(c) Déterminons la valeur de $S(1/2)$. D'après la question précédente, on trouve que :

$$\begin{aligned} S\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= 2 - 0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}}. \quad (*) \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{2}{1+x}$ est continue sur $[0, 1]$, on obtient d'après le théorème sur les sommes de Riemann que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{2}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{2dt}{1+t} = [2 \ln(1+t)]_0^1 = 2 \ln(2) - 2 \ln(1) = 2 \ln(2).$$

Par conséquent, on en déduit avec l'égalité (*) que :

$$\boxed{S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 \ln(2).}$$

(3) (a) Montrons que, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, on a : $S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}$. Par linéarité de la somme, on trouve que, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$:

$$\begin{aligned} S(y) - S(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y} \right) - \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k+x} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+y} \right). \end{aligned}$$

Toujours par linéarité de la somme, on obtient que, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$:

$$\begin{aligned}
 S(y) - S(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+y} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+y-k-x}{(k+x)(k+y)} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y-x}{(k+x)(k+y)} \\
 &= (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$:

$$S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

- (b) Montrons que la fonction S est croissante sur $[0, +\infty[$. Pour ce faire, considérons deux réels $x, y \geq 0$ tels que $x \geq y$. Comme $\frac{1}{(k+x)(k+y)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et que $y-x \geq 0$, on obtient par somme et produit et d'après la question précédente que :

$$S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)} \geq 0.$$

En particulier, on vient de montrer que, pour tous réels $x, y \geq 0$ tels que $x \leq y$, on avait $S(x) \leq S(y)$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est croissante sur } [0, +\infty[.}$$

- (c) Montrons que, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in [0, +\infty[$, on a :

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

D'après la question (3)(a) de la partie B, on obtient par linéarité de la somme que :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| &= \left| \frac{x+h-x}{h} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+h)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+h)} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(k+x)(k+x+h)} - \frac{1}{(k+x)^2} \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k+x-k-x-h}{(k+x)^2(k+x+h)} \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-h}{(k+x)^2(k+x+h)} \right| \\
 &= \left| -h \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)} \right|.
 \end{aligned}$$

Comme tous les termes $\frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)}$ sont ≥ 0 , ceci entraîne que :

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)}.$$

Comme x et $x + h$ sont ≥ 0 , on voit que $\frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)} \leq \frac{1}{k^3}$ pour tout $k \geq 1$, et donc :

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| = |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2(k+x+h)} \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in [0, +\infty[$:

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

- (d) Montrons que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq \left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Par encadrement, ceci entraîne que :

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

ce qui nous donne en particulier que :

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

En d'autres termes, le taux d'accroissement de S entre $x+h$ et x admet une limite finie quand le pas h tend vers 0. Comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et : } \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

Par la suite, on admet également que S' est continue sur $[0, +\infty[$.

- (4) (a) Montrons que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit par linéarité de la somme que, pour tout $x \in [0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1} \right) \end{aligned}$$

Par télescopage dans la première somme de droite, on obtient que :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+x+1} \right).$$

En effectuant le changement d'indice $i = k+1$ dans la deuxième somme de droite, on trouve que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) &= 1 - \frac{1}{n+1} + \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+x} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} - \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+x} \right) \\ &= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{1+x} + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+x} \right). \quad (*) \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'égalité (*), il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x+1} \right) = \frac{1}{1+x} + \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+x} \right).$$

Mais par définition de S , on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\boxed{S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.}$$

- (b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. D'après la question précédente, on voit que, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$S(i+1) - S(i) = \frac{1}{i+1}.$$

Par sommation sur l'entier i , ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (S(i+1) - S(i)) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}.$$

Par télescopage sur la somme de gauche ci-dessus, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S(n) - S(0) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}.$$

Comme $S(0) = 0$ d'après la question (2)(a) de la partie B, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i+1}.$$

En effectuant le changement d'indice $k = i+1$ dans la somme de droite ci-dessus, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.}$$

- (c) Montrons que : $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$. Pour ce faire, on pose $n_x = \lfloor x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ d'après les propriétés de la partie entière, on voit que $n_x \leq x \leq n_x + 1$. Dès lors, comme la fonction S est croissante sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question (3)(b) de la partie B, on obtient que $S(n_x) \leq S(x) \leq S(n_x + 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. D'après la question précédente, ceci entraîne que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{k} \leq S(x) \leq \sum_{k=1}^{n_x+1} \frac{1}{k}.$$

Après division par $\ln(n_x)$, ceci nous donne que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{k}}{\ln(n_x)} \leq \frac{S(x)}{\ln(n_x)} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{k} + \frac{1}{n_x+1}}{\ln(n_x)} = \frac{\sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{k}}{\ln(n_x)} + \frac{1}{(n_x+1)\ln(n_x)}. \quad (*)$$

Comme $n_x \geq x-1$ par construction, on voit que n_x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Dès lors, comme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ d'après la question (2) de la partie A, on obtient par substitution que $\sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{k} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n_x)$, et donc :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n_x} \frac{1}{k}}{\ln(n_x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Par encadrement dans (*), ceci entraîne que :

$$\frac{S(x)}{\ln(n_x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où il s'ensuit que :

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n_x). \quad (**)$$

En outre, comme $x-1 \leq n_x \leq x$ et que la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient que $\ln(x-1) \leq \ln(n_x) \leq \ln(x)$ pour tout $x > 1$. Après division par $\ln(x)$ (qui est > 0 si $x > 1$), on trouve que, pour tout $x > 1$:

$$\frac{\ln(x-1)}{\ln(x)} \leq \frac{\ln(n_x)}{\ln(x)} \leq 1.$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$1 + \frac{\ln(1 - \frac{1}{x})}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + \ln(1 - \frac{1}{x})}{\ln(x)} \leq \frac{\ln(n_x)}{\ln(x)} \leq 1. \quad (***)$$

Par encadrement dans $(***)$, ceci entraîne que :

$$\frac{\ln(n_x)}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1,$$

d'où il s'ensuit que :

$$\ln(n_x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x). \quad (***)$$

En mettant bout à bout les équivalences $(**)$ et $(***)$, on en déduit que :

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).}$$

(5) (a) Soit u_n le réel défini dans la partie A. Vérifions que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{x}{k} - \ln(k+x) \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - 0 - \ln(k+1) + \ln(k) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k)) \right). \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

Par télescopage dans la deuxième somme de droite ci-dessus, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - (\ln(n+1) - \ln(1)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Mais par définition de u_n , on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{u_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx.}$$

(b) Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq \int_0^1 S(x) dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on obtient que :

$$S(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right).$$

Après calculs, ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$S(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k+x-k}{k(k+x)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}.$$

A noter que, comme $x \geq 0$, on a $0 \leq \frac{x}{k(k+x)} \leq \frac{x}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Par sommation sur l'entier k , on trouve par linéarité de la somme que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq S(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k^2} = x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Par croissance de l'intégrale, ceci entraîne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 \left(S(x) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \right) dx \leq \int_0^1 x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 S(x)dx - \int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^1 xdx.$$

D'après la question précédente, il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 S(x)dx - u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \int_0^1 xdx.$$

Mais comme $\int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 S(x)dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

(c) Montrons que : $\int_0^1 S(x)dx = \gamma$. D'après la question précédente, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 S(x)dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, son reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par encadrement, ceci nous donne que :

$$\int_0^1 S(x)dx - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 S(x)dx.$$

Mais comme cette limite est égale à γ par définition, on en déduit que :

$$\int_0^1 S(x)dx = \gamma.$$

Partie C : application en probabilité

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \geq 1$ et par $f(x) = 0$ sinon.

(1) Montrons que f est une densité de probabilité.

- Tout d'abord, comme la fonction f est nulle sur $] -\infty, 1[$, elle est positive sur $] -\infty, 1[$. De plus, comme $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$, on voit que f est positive sur $[1, +\infty[$, et donc f est positive sur $\mathbb{R}$.
- Par ailleurs, comme la fonction f est nulle sur $] -\infty, 1[$, elle est continue sur $] -\infty, 1[$. En outre, comme $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \geq 1$, on voit que f est continue sur $]1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue sur $]1, +\infty[$, qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$, et donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et est égale à 1. Comme la fonction f est nulle sur $] -\infty, 1[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^1 f(x)dx$ converge et de plus :

$$\int_{-\infty}^1 f(x)dx = 0.$$

En outre, on trouve que, pour tout $a \geq 1$:

$$\int_1^a f(x)dx = \int_1^a \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\int_1^a f(x)dx = 1 - \frac{1}{a} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 1.$$

Dès lors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1. D'après la relation de Chasles, il s'ensuit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

Par conséquent, on en déduit que :

la fonction f est une densité de probabilité.

Par la suite, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f . De plus, on définit la variable aléatoire Y par : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

- (2) (a) Déterminons la fonction de répartition F_X de X . Si $x < 1$, alors on voit que :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dt = 0.$$

Si maintenant $x \geq 1$, alors on trouve avec la relation de Chasles que :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^1 0 \cdot dt + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 0 + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

- (b) Montrons que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance. Par définition, la variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument. Comme f est nulle sur $] -\infty, 1[$, on voit que X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} tf(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ converge absolument. Mais ceci n'est pas le cas car on reconnaît ici une intégrale de Riemann divergente. Par conséquent, on en déduit que :

la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.

- (c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right).$$

Supposons tout d'abord que $x < 1$. Comme U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, on voit que $0 < U < 1$ et $0 < 1 - U < 1$, ce qui entraîne que $\frac{1}{1-U} > 1 > x$. D'après la question (2)(a) de la partie C, ceci nous donne que :

$$P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right) = 0 = F_X(x).$$

Supposons maintenant que $x \geq 1$. Comme U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, on voit que $0 < U < 1$ et $0 < 1 - U$. Dès lors, comme $x > 0$, on trouve que :

$$P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right) = P(1 \leq x(1-U)) = P\left(\frac{1}{x} \leq 1-U\right) = P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x}\right).$$

Comme $1 - \frac{1}{x}$ est compris entre 0 et 1 et que U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, il s'ensuit que :

$$P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right) = P\left(U \leq 1 - \frac{1}{x}\right) = F_U\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = F_X(x).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right).$$

- (d) Déterminons une fonction en Python notée `simulX` qui réalise et affiche une simulation de X . D'après la question précédente, on sait que, si U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P\left(\frac{1}{1-U} \leq x\right) = F_{\frac{1}{1-U}}(x).$$

En particulier, on voit que X et $\frac{1}{1-U}$ suivent la même loi. Dès lors, on procèdera comme suit :

```

import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulX():
    u=rd.random()
    x=1/(1-u)
    return x

```

- (3) (a) Montrons que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a $P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x)$. Notons que, comme f est nulle sur $] -\infty, 1[$, la variable aléatoire X est à valeurs dans $[1, +\infty[$, et donc la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Dès lors, d'après la formule des probabilités totales appliquée à l'événement $[Y \leq x]$ et au système complet d'événements $(\lfloor X \rfloor = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, on trouve que, pour tout réel $x \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([Y \leq x] \cap [\lfloor X \rfloor = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X - \lfloor X \rfloor \leq x] \cap [\lfloor X \rfloor = k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X - k \leq x] \cap [k \leq X < k+1]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X \leq k+x] \cap [k \leq X < k+1]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x).$$

A présent, montrons que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a $P(Y \leq x) = S(x)$. Comme X est une variable à densité, de densité f , on a d'après la question de la partie C que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} (F_X(k+x) - F_X(k)) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k+x} - 1 + \frac{1}{k}\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right).
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit par définition de S que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$P(Y \leq x) = S(x).$$

- (b) Déterminons la fonction de répartition de Y . D'après les propriétés de la partie entière, on sait que $\lfloor X \rfloor \leq X < \lfloor X \rfloor + 1$, ce qui entraîne que $0 \leq Y = X - \lfloor X \rfloor < 1$, et donc Y est à valeurs dans $[0, 1[$. En particulier, ceci nous donne que $F_Y(x) = 0$ si $x < 0$ et $F_Y(x) = 1$ si $x \geq 1$. Par conséquent, on

en déduit avec la question précédente que :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

- (c) Montrons que Y est une variable aléatoire à densité. Comme la fonction F_Y est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$, elle est de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ sur ces deux intervalles. De plus, comme la fonction S est dérivable et que sa dérivée est continue sur $[0, 1[$ d'après la question (3)(d) de la partie B, on voit avec la question précédente que F_Y est de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$, et donc F_Y est de classe $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Reste à montrer que F_Y est continue en 0 et en 1. Comme la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question (3)(d) de la partie B, la fonction S est continue en 0. De plus, comme $S(0) = 0$ d'après la question (2)(a) de la partie B, on obtient que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = S(0) = 0 = F_Y(0).$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} F_Y(x) = 0 = F_Y(0),$$

et donc F_Y est continue en 0. De même, comme la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la question (3)(d) de la partie B, la fonction S est continue en 1. De plus, comme $S(1) = 1$ d'après la question (2)(a) de la partie B, on obtient que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1) = 1 = F_Y(1) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} F_Y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$\lim_{x \rightarrow 1} F_Y(x) = 1 = F_Y(1),$$

et donc F_Y est continue en 1. En résumé, on vient de montrer que F_Y était continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, et donc :

la variable aléatoire Y est à densité.

Par dérivation, une densité de Y est donnée par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ S'(x) & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Par conséquent, on en déduit avec la question (3)(d) de la partie B que :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (4) Justifions tout d'abord que Y admet une espérance. D'après la question (3)(b) de la partie C, on sait que $0 \leq Y < 1$. Dès lors, comme la variable aléatoire constante égale à 1, on obtient par existence de l'espérance par domination que :

Y admet une espérance.

A présent, montrons que $E(Y) = 1 - \gamma$. Comme f_Y est nulle en dehors de $[0, 1[$ d'après la question précédente, on voit que :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t) dt = \int_0^1 t f_Y(t) dt = \int_0^1 t S'(t) dt.$$

Posons alors $u(t) = t$ et $v(t) = S(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et de plus, on a $u'(t) = 1$ et $v'(t) = S'(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Par intégration par parties, on trouve que :

$$E(Y) = \int_0^1 u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t) v(t) dt = [t S(t)]_0^1 - \int_0^1 S(t) dt.$$

D'après les questions (2) et (5)(c) de la partie B, on en déduit que :

$$E(Y) = S(1) - \int_0^1 S(t) dt = 1 - \gamma.$$

2. Sujet type HEC-ESSEC Maths 1

Le problème comporte cinq parties. Dans les trois premières parties, on étudie des propriétés usuelles des matrices de la forme tAA , où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la quatrième partie, on définit la racine carrée d'une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives, afin d'obtenir une décomposition d'une matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la cinquième partie, on applique ce qui précède au calcul de la distance d'une matrice A inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans tout le problème :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
- $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on lui associe la matrice :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_0$.

- On note $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne qui lui est associée est notée $\| \cdot \|$.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tA désigne sa transposée et $\text{Tr}(A)$ désigne sa trace.
- I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^n$.
- Endomorphisme adjoint : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A , on note f^* l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice tA . On notera aussi $s_f = f^* \circ f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice tAA .
- Si λ est un nombre réel, on définit :

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \text{Id}) \quad \text{et} \quad E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (A - \lambda I_n)X = 0\}.$$

- Liste étendue des valeurs propres : Lorsqu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, on appelle liste étendue des valeurs propres de A une liste de nombres réels où chaque valeur propre λ de A se trouve répétée $\dim E_\lambda(A)$ fois. Par exemple, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

admet $(1, 4, 4)$ pour liste étendue des valeurs propres.

- $S(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
- $S^+(\mathbb{R}^n)$ (respectivement $S_n^+(\mathbb{R})$) désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ (respectivement des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) à valeurs propres positives ou nulles.
- On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que P est une matrice orthogonale si P est inversible et si $P^{-1} = {}^tP$.
- On rappelle la propriété suivante notée $(*)$: "toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, et toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure".
- Matrices définies par bloc : Considérons $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix},$$

où $(A_1, B_1) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})^2$, $(A_4, B_4) \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})^2$, $(A_2, B_2) \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{R})^2$ et $(A_3, B_3) \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{R})^2$. On utilisera sans démonstration les égalités suivantes :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_2 \\ {}^tA_3 & {}^tA_4 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Un premier exemple.

Soit a un réel différent de 1 et posons : $A = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix}$.

- (1) Déterminons tout d'abord le rang de A . Comme les deux colonnes de A sont proportionnelles et qu'elles sont non nulles, on voit que :

$$\boxed{\text{rg}(A) = 1.}$$

Calculons ensuite A^2 . Par des calculs simples, on trouve que :

$$A^2 = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} \times \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1-a & -1+a \\ a-a^2 & -a+a^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit après simplification que :

$$\boxed{A^2 = A.}$$

Comme $A^2 = A$, il s'ensuit que $f^2 = f$, et donc :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ canoniquement associé à } A \text{ est un projecteur.}}$$

Comme f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$, on sait d'après le cours que :

$$\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \mathfrak{Im}(f) = \ker(f) \oplus \ker(f - \text{Id}).$$

De plus, comme $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 1$, on voit d'après le théorème du rang que $\dim \ker(f) = 2 - \text{rg}(f) = 1$, et donc 0 est bien valeur propre de f . En outre, comme $\mathbb{R}^2 = \ker(f) \oplus \ker(f - \text{Id})$, ceci entraîne que $\dim \ker(f) + \dim \ker(f - \text{Id}) = 2$, et donc $\dim \ker(f - \text{Id}) = 1$. En particulier, 1 est aussi valeur propre de f , et donc la somme directe ci-dessus peut se réécrire sous la forme :

$$\mathbb{R}^2 = E_0(f) \oplus E_1(f).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } f \text{ est diagonalisable.}}$$

Par ailleurs, on constate que :

$$\boxed{\text{Sp}(f) = \{0, 1\}.}$$

Enfin, déterminons les sous-espaces propres de f . Par des calculs simples, on trouve que :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

En particulier, ceci entraîne que $(1, 1)$ et $(1, a)$ sont vecteurs propres de f pour les valeurs propres respectives 0 et 1, et donc $\text{Vect}((1, 1)) \subset E_0(f)$ et $\text{Vect}((1, a)) \subset E_1(f)$. De plus, comme $(1, 1) \neq (0, 0)$, la famille $((1, 1))$ est libre, et donc c'est une base de $\text{Vect}((1, 1))$. De même, comme $(1, a) \neq (0, 0)$, la famille $((1, a))$ est libre, et donc c'est une base de $\text{Vect}((1, a))$. En particulier, on voit d'après ce qui précède que :

$$\dim \text{Vect}((1, 1)) = 1 = \dim E_0(f) \quad \text{et} \quad \dim \text{Vect}((1, a)) = 1 = \dim E_1(f).$$

Mais comme $\text{Vect}((1, 1)) \subset E_0(f)$ et $\text{Vect}((1, a)) \subset E_1(f)$, on en déduit que :

$$\boxed{E_0(f) = \text{Vect}((1, 1)) \quad \text{et} \quad E_1(f) = \text{Vect}((1, a)).}$$

(2) Calculons tout d'abord $M = {}^tAA$. Par des calculs simples, on trouve que :

$$M = {}^tAA = \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & -a \end{pmatrix} \times \frac{1}{1-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & -a \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & 1+a^2 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{M = \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & 1+a^2 \end{pmatrix}.}$$

A noter que, comme M est symétrique, on obtient d'après le théorème spectral que :

$$\boxed{\text{la matrice } M \text{ est diagonalisable.}}$$

Comparons à présent $\ker f$ et $\ker(s_f)$. Pour ce faire, considérons un élément x de $\ker(f)$. Alors on voit que $f(x) = 0$, ce qui entraîne que $f^* \circ f(x) = f^*(f(x)) = f^*(0) = 0$ car f^* est linéaire, et donc x appartient à $\ker(s_f)$. En particulier, on a :

$$\ker(f) \subset \ker(s_f).$$

Comme les deux colonnes de M sont proportionnelles et qu'elles sont non nulles, on voit que $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(M) = 1$. D'après le théorème du rang, ceci entraîne que $\dim \ker(s_f) = \dim \mathbb{R}^2 - \text{rg}(s_f) = 2 - 1 = 1$. Dès lors, comme $\dim \ker(f) = 1 = \dim \ker(s_f)$ et que $\ker(f) \subset \ker(s_f)$, on en déduit que :

$$\boxed{\ker(f) = \ker(s_f).}$$

Enfin, déterminons les valeurs propres et les sous-espaces propres de s_f . Comme $\dim \ker(s_f) = 1$, on voit que 0 est valeur propre de s_f et que $E_0(s_f) = \ker(s_f) = \ker(f) = E_0(f) = \text{Vect}((1, 1))$ d'après la question précédente. De plus, comme M est diagonalisable, la somme des valeurs propres de M (et donc de s_f) est égale à $\frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}$, et donc $\lambda_a = \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}$ est valeur propre de s_f . Par ailleurs, on voit que :

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & 1+a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, ceci entraîne que $(1, -1)$ est vecteur propre de s_f pour la valeur propre λ_a , et donc $\text{Vect}((1, -1)) \subset E_{\lambda_a}(s_f)$. De plus, comme $(1, -1) \neq (0, 0)$, la famille $((1, -1))$ est libre, et donc c'est une base de $\text{Vect}((1, -1))$. En particulier, on voit d'après ce qui précède que :

$$\dim \text{Vect}((1, -1)) = 1 = \dim E_{\lambda_a}(s_f).$$

Mais comme $\text{Vect}((1, -1)) \subset E_{\lambda_a}(s_f)$, il s'ensuit que $E_{\lambda_a}(s_f) = \text{Vect}((1, -1))$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Sp}(s_f) = \left\{ 0, \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2} \right\}, \quad E_0(s_f) = \text{Vect}((1, 1)), \quad E_{\frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2}}(s_f) = \text{Vect}((1, -1)).}$$

- (3) Déterminons à quelle condition nécessaire et suffisante M est la matrice d'un projecteur. Par des calculs simples, on trouve que :

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & 1+a^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{(1-a)^2} \begin{pmatrix} 1+a^2 & -(1+a^2) \\ -(1+a^2) & 1+a^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1-a)^4} \begin{pmatrix} 2(1+a^2)^2 & -2(1+a^2)^2 \\ -2(1+a^2)^2 & 2(1+a^2)^2 \end{pmatrix} = \frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2} M. \end{aligned}$$

Dès lors, on voit que M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$, c'est-à-dire si $\frac{2(1+a^2)}{(1-a)^2} = 1$. En particulier, ceci revient à écrire que $2(1+a^2) = (1-a)^2$, c'est-à-dire $a^2 + 2a + 1 = (1+a)^2 = 0$, ou en d'autres termes que $a = -1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{M \text{ est la matrice d'un projecteur si et seulement si } a = -1.}$$

Partie II : Généralités.

- (1) Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donnons l'expression de $\text{Tr}(^tAB)$ en fonction des coefficients de A et de B . Si l'on pose $^tA = (\alpha_{i,j})$ et $C = ^tAB = (c_{i,j})$, alors $\alpha_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Par produit ligne-colonne, on trouve que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n \alpha_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} b_{k,j}.$$

Par définition de la trace, il s'ensuit que :

$$\text{tr}(^tAB) = \sum_{j=1}^n c_{j,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,j} b_{k,j}.$$

Par intervention des signes sommes et en posant $k = i$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{tr}(^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

- (b) Montrons que l'application $\langle, \rangle_2 : (A, B) \mapsto \text{Tr}(^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour ce faire, on va vérifier que $\langle, \rangle_2$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

Première étape : $\langle, \rangle_2$ est symétrique.

En effet, pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle M, N \rangle_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n_{i,j} m_{i,j} = \langle N, M \rangle_2,$$

d'où il s'ensuit que $\langle, \rangle_2$ est symétrique.

Deuxième étape : $\langle, \rangle_2$ est bilinéaire.

En effet, pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j})$ et $P = (p_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on trouve par linéarité de la transposition et de la trace que :

$$\begin{aligned} \langle \lambda M + \mu N, P \rangle_2 &= \text{tr} [{}^t(\lambda M + \mu N)P] \\ &= \text{tr} [(\lambda {}^tM + \mu {}^tN)P] \\ &= \text{tr} [\lambda {}^tMP + \mu {}^tNP] \\ &= \lambda \text{tr} [{}^tMP] + \mu \text{tr} [{}^tNP] \\ &= \lambda \langle M, P \rangle_2 + \mu \langle N, P \rangle_2, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\langle, \rangle_2$ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire par symétrie.

Troisième étape : $\langle, \rangle_2$ est définie positive.

En effet, pour toute matrice $M = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle M, M \rangle_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \geq 0,$$

et donc $\langle, \rangle_2$ est positive. De plus, si $\langle M, M \rangle_2 = 0$, alors on voit que $m_{i,j} = 0$ pour tous i, j (car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels sont nuls), et donc $M = 0$. En particulier, la forme bilinéaire $\langle, \rangle_2$ est définie positive.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\langle, \rangle_2 \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Dans la suite du problème, on notera $\|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}({}^tAA)}$ la norme euclidienne associée à $\langle, \rangle_2$.

(c) Rappelons tout d'abord l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\boxed{|\langle A, B \rangle_2| \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2 \text{ avec égalité si et seulement si } A \text{ et } B \text{ sont colinéaires.}}$$

A présent, vérifions que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(A^2) \leq \text{Tr}({}^tAA).$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on trouve avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\text{Tr}(A^2) = \langle {}^tA, A \rangle_2 \leq \|{}^tA\|_2 \cdot \|A\|_2. \quad (*)$$

D'après les propriétés de la trace, on obtient que :

$$\|{}^tA\|_2^2 = \text{Tr}({}^t({}^tA){}^tA) = \text{Tr}(A{}^tA) = \text{Tr}({}^tAA) = \|A\|_2^2.$$

En passant à la racine carrée, on trouve que $\|{}^tA\|_2 = \|A\|_2$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En reportant cette égalité dans (*), il s'ensuit que :

$$\text{Tr}(A^2) \leq \|A\|_2^2 = \text{Tr}({}^tAA).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\boxed{\text{Tr}(A^2) \leq \text{Tr}({}^tAA) .}$$

Montrons à présent que : $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}({}^tAA) \iff A \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit que $|\text{Tr}(A^2)| = \text{Tr}({}^tAA)$ si et seulement si les matrices A et tA sont colinéaires. Comme A est nulle si et seulement si tA l'est, on obtient que $|\text{Tr}(A^2)| = \text{Tr}({}^tAA)$ si et seulement si il existe une constante λ telle que ${}^tA = \lambda A$. En particulier, si $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}({}^tAA)$, alors on trouve par linéarité de la trace que :

$$\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(\lambda A^2) = \lambda \text{Tr}(A^2).$$

Dès lors, on voit que, soit $\text{Tr}(A^2) = 0$, soit $\text{Tr}(A^2) \neq 0$ et $\lambda = 1$. A noter que, si $\text{Tr}(A^2) = 0$, on obtient avec l'égalité ci-dessus que $\text{Tr}({}^tAA) = \|A\|_2^2 = 0$, ce qui entraîne que $A = 0$, et donc A est symétrique. Si maintenant $\text{Tr}(A^2) \neq 0$, alors on voit que $\lambda = 1$, ce qui implique que ${}^tA = A$, et donc A est encore symétrique. Dans tous les cas, on vient de montrer que, si $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}({}^tAA)$, alors A est symétrique. Quant à la réciproque, elle est évidente puisque, si ${}^tA = A$, alors on a $\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(AA) = \text{Tr}({}^tAA)$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Tr}(A^2) = \text{Tr}({}^tAA) \iff A \in S_n(\mathbb{R}).}$$

Dans la suite, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- (2) Caractérisation de la matrice de f^* en base orthonormée : Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers B' et A' la matrice de f dans la base B' .

- (a) Rappelons la relation liant A et A' . Comme A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$ et que A' est la matrice de f dans la base B' , on obtient d'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes que :

$$A' = P^{-1}AP.$$

- (b) Rappelons pourquoi P est une matrice orthogonale. Comme P est la matrice de passage entre deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique, il s'ensuit que :

$$P \text{ est une matrice orthogonale.}$$

- (c) Montrons que ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base B' . Comme f^* est l'endomorphisme canoniquement associé à tA , on trouve d'après la formule de changement de bases que :

$$\text{mat}_{B'}(f^*) = P_{B_0, B'}^{-1} \text{mat}_{B_0}(f^*) P_{B_0, B'} = P^{-1} ({}^tA) P.$$

En outre, comme P est orthogonale, on sait que ${}^tP = P^{-1}$, et donc on obtient d'après la question (2)(a) que :

$$\text{mat}_{B'}(f^*) = P^{-1} ({}^tA) P = {}^tP {}^tA P = {}^tP {}^tA ({}^tP^{-1}) = {}^t(P^{-1}AP) = {}^t(A').$$

Par conséquent, on en déduit que :

$${}^tA' \text{ est la matrice de } f^* \text{ dans la base } B'.$$

- (3) Réduction de s_f .

- (a) Vérifions que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tX({}^tAA)X = \|AX\|^2$. D'après l'écriture matricielle du produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tX({}^tAA)X = {}^tX {}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^tX({}^tAA)X = \|AX\|^2.$$

- (b) Montrons tout d'abord que $\ker(f) = \ker(s_f)$. Pour ce faire, considérons un élément x de $\ker(f)$. Alors, on voit que $f(x) = 0$, ce qui entraîne que $f^* \circ f(x) = f^*(f(x)) = f^*(0) = 0$ car f^* est linéaire par définition, et donc $s_f(x) = 0$ et x appartient à $\ker(s_f)$. En particulier, on voit que :

$$\ker(f) \subset \ker(s_f).$$

A présent, considérons un élément x de $\ker(s_f)$. Alors, on voit que $s_f(x) = 0$, ce qui signifie que $f^* \circ f(x) = 0$. Si X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors l'égalité précédente entraîne en termes matriciels que ${}^tAAX = 0$. En particulier, on trouve que ${}^tX {}^tAAX = {}^tX0 = 0$, ce qui entraîne que $\|AX\|^2 = 0$, et donc $AX = 0$. En retraduisant cette relation matricielle, il s'ensuit que $f(x) = 0$, et donc x appartient à $\ker(f)$. En d'autres termes, on a montré que :

$$\ker(f) \subset \ker(s_f).$$

Par double inclusion, on en déduit que :

$$\ker(f) = \ker(s_f).$$

Vérifions maintenant que $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(f)$. Comme $\ker(f) = \ker(s_f)$, on obtient d'après le théorème du rang que :

$$\text{rg}(s_f) = \dim R^n - \dim \ker(s_f) = \dim R^n - \dim \ker(f) = \text{rg}(f).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{rg}(s_f) = \text{rg}(f).$$

- (c) Vérifions que s_f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. Comme f et f^* sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, $s_f = f^* \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ comme composée d'endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. Reste à montrer que s_f est symétrique. Comme $s_f = f^* \circ f$, on voit que :

$$\text{mat}_{B_0}(s_f) = {}^tAA.$$

D'après les propriétés de la transposition, on trouve que :

$${}^t(\text{mat}_{B_0}(s_f)) = {}^t({}^tAA) = {}^tA {}^t({}^tA) = {}^tAA = \text{mat}_{B_0}(s_f).$$

En particulier, la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(s_f)$ est symétrique. Mais comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (vu que c'est la base canonique de $\mathbb{R}^n$), on en déduit que :

$$s_f \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^n.$$

- (d) Montrons que les valeurs propres de s_f sont positives ou nulles. Pour ce faire, considérons une valeur propre λ de s_f , et soit x un vecteur propre de s_f pour la valeur propre λ . Si X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors on voit que $s_f(x) = \lambda x$, ce qui entraîne en termes matriciels que ${}^t A A X = \lambda X$, et donc :

$${}^t X {}^t A A X = \lambda {}^t X X.$$

D'après l'écriture matricielle du produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on trouve que :

$${}^t X {}^t A A X = \|A X\|^2 = \lambda \|X\|^2.$$

Comme x est un vecteur propre de s_f , il est non nul, ce qui entraîne que $X \neq 0$, et donc $\|X\|^2 > 0$. Dès lors, on voit que :

$$\lambda = \frac{\|A X\|^2}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\text{les valeurs propres de } s_f \text{ sont positives ou nulles.}$$

On note $r = \text{rg}(f)$ et on suppose pour la fin de la question (3) que $1 \leq r \leq n - 1$.

- (e) Justifions qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de s_f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$

où D est une matrice diagonale d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont strictement positifs et où $0_{r,n-r}, 0_{n-r,r}, 0_{n-r,n-r}$ sont des matrices dont tous les coefficients sont nuls. Comme l'endomorphisme s_f est symétrique d'après la question (3)(c), s_f est diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral. Fixons une base orthonormée de diagonalisation $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de s_f telle que les valeurs propres associées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ soient rangées en ordre décroissant. Comme $1 \leq \text{rg}(f) \leq n - 1$ et que $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(f)$ d'après la question (3)(b), l'endomorphisme s_f n'est ni nul ni inversible. En particulier, tous les λ_i ne sont pas nuls et il y en a au moins un qui l'est. Dès lors, comme les valeurs propres de s_f sont ≥ 0 d'après la question précédente, il existe un entier $r' \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ tel que $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r' \rrbracket$ et $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket r', n \rrbracket$. Si D' est la matrice diagonale d'ordre r' dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}$, alors on voit que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(s_f) = \begin{pmatrix} D' & 0_{r',n-r'} \\ 0_{n-r',r'} & 0_{n-r',n-r'} \end{pmatrix}.$$

En particulier, comme $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_{r'} > 0$, on voit que $\text{rg}(s_f) = r'$. Mais comme $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(f)$ d'après la question (3)(b), il s'ensuit que $r' = r$. Par conséquent, on en déduit qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et une matrice diagonale D d'ordre r dont les éléments diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont strictement positifs, telles que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(s_f) = \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

- (f) Montrons tout d'abord que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix},$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $A_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$. D'après la question précédente, on sait que la matrice de s_f dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(s_f) = \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

En particulier, les $(n - r)$ dernières colonnes de cette matrice sont nulles, et donc on voit que $s_f(\varepsilon_{r+1}) = 0, \dots, s_f(\varepsilon_n) = 0$. Comme $\ker(s_f) = \ker(f)$ d'après la question (3)(b), il s'ensuit que $f(\varepsilon_{r+1}) = 0, \dots, f(\varepsilon_n) = 0$, et donc les $(n - r)$ dernières colonnes de la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ sont nulles. En particulier, il existe des matrices $A_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et $A_3 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Vérifions maintenant que ${}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D$. Comme la base $\mathcal{C}$ est orthonormée, on sait d'après la question (2)(c) que, si A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$, alors ${}^tA'$ est la matrice de f^* dans la base $\mathcal{C}$. Dès lors, il s'ensuit que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(s_f) = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f^*) \times \text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = {}^t(\text{mat}_{\mathcal{C}}(f^*)) \times \text{mat}_{\mathcal{C}}(f).$$

En particulier, ceci entraîne d'après les règles de calcul rappelées au début du problème que :

$$\begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Par identification, on en déduit que :

$$\boxed{{}^tA_1A_1 + {}^tA_3A_3 = D.}$$

(4) Étude des valeurs propres de A^tA : On note $\tau_f = f \circ f^*$ l'endomorphisme canoniquement associé à A^tA .

- (a) Montrons tout d'abord que $\text{rg}(s_f) = \text{rg}(\tau_f)$. Remarquons au départ que f^* est l'endomorphisme canoniquement associé à tA si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A . Comme ${}^t({}^tA) = A$, on voit que $(f^*)^* = f$, et donc $\tau_f = f \circ f^* = (f^*)^* \circ f^* = s_{f^*}$. D'après la question (3)(b) et les propriétés de la transposition, on trouve alors que :

$$\text{rg}(\tau_f) = \text{rg}(s_{f^*}) = \text{rg}(f^*) = \text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A) = \text{rg}(f) = \text{rg}(s_f).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{rg}(s_f) = \text{rg}(\tau_f).}$$

Vérifions maintenant que $\dim \ker(s_f) = \dim \ker(\tau_f)$. D'après le théorème du rang, on obtient que :

$$\dim \ker(s_f) = \dim R^n - \text{rg}(s_f) = \dim R^n - \text{rg}(\tau_f) = \dim \ker(\tau_f).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\dim \ker(s_f) = \dim \ker(\tau_f).}$$

- (b) Soit λ une valeur propre strictement positive de s_f et x un vecteur propre associé. Vérifions tout d'abord que λ est une valeur propre de τ_f et que $f(x)$ est un vecteur propre associé. Par définition, on voit que $s_f(x) = \lambda x$, ce qui signifie que $f^* \circ f(x) = \lambda x$. Par composition et par linéarité de f , ceci nous donne que :

$$f \circ f^* \circ f(x) = (f \circ f^*)(f(x)) = \tau_f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

A noter que $f(x) \neq 0$. En effet, si $f(x) = 0$, alors on voit que $f^* \circ f(x) = f^*(0) = 0 = \lambda x$ par linéarité de f^* , mais ceci est impossible car $\lambda > 0$ par hypothèse et $x \neq 0$ en tant que vecteur propre. Dès lors, comme $f(x) \neq 0$, il s'ensuit d'après l'égalité ci-dessus que :

$$\boxed{f(x) \text{ est vecteur propre de } \tau_f \text{ pour la valeur propre } \lambda.}$$

Montrons maintenant que :

$$\dim E_\lambda(s_f) \leq \dim E_\lambda(\tau_f).$$

Pour ce faire, on considère la restriction g de f à $E_\lambda(s_f)$, c'est-à-dire l'application g définie pour tout $x \in E_\lambda(s_f)$ par $g(x) = f(x)$. D'après ce qui précède, on voit que g est une application de $E_\lambda(s_f)$ dans $E_\lambda(\tau_f)$. De plus, g est linéaire comme restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Vérifions alors que g est injective. Pour ce faire, considérons un vecteur x de $E_\lambda(s_f)$ tel que $g(x) = 0$. Alors ceci signifie que $f(x) = 0$ et $s_f(x) = f^* \circ f(x) = \lambda x$, ce qui entraîne que $f^*(0) = 0 = \lambda x$, et donc $x = 0$ car $\lambda > 0$. En particulier, on a $\ker(g) = \{0\}$, et donc g est injective. D'après le théorème du rang, on constate que :

$$\dim E_\lambda(s_f) = \dim \ker(g) + \dim \mathfrak{Im}(g) = \dim \mathfrak{Im}(g).$$

Comme $\mathfrak{Im}(g)$ est un sous-espace vectoriel de $E_\lambda(\tau_f)$, il s'ensuit que :

$$\dim E_\lambda(s_f) = \dim \mathfrak{Im}(g) \leq \dim E_\lambda(\tau_f).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\dim E_\lambda(s_f) \leq \dim E_\lambda(\tau_f).}$$

- (c) Montrons que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, qu'il possède exactement les mêmes valeurs propres que s_f et que, pour chacune de ces valeurs propres λ , on a :

$$\dim E_\lambda(s_f) = \dim E_\lambda(\tau_f).$$

D'après la question (4)(a), on peut commencer par remarquer que $\tau_f = s_{f^*}$. Comme s_h est diagonalisable en base orthonormée pour tout endomorphisme h de $\mathbb{R}^n$, et ce d'après la question (3)(e), il s'ensuit que τ_f est diagonalisable en base orthonormée. De plus, comme $\tau_f = s_{f^*}$, on sait d'après la question (3)(d) que toutes les valeurs propres de τ_f sont ≥ 0 . En outre, comme $\dim \ker(s_f) = \dim \ker(\tau_f)$, on voit que 0 est valeur propre de τ_f si et seulement si 0 est valeur propre de s_f et que, dans ce cas, on a :

$$\dim E_0(s_f) = \dim \ker(s_f) = \dim \ker(\tau_f) = \dim E_0(\tau_f).$$

Par ailleurs, si λ est une valeur propre > 0 de s_f , on sait d'après la question précédente que λ est aussi valeur propre de τ_f et que :

$$\dim E_\lambda(s_f) \leq \dim E_\lambda(\tau_f).$$

Comme toutes les valeurs propres de s_f sont ≥ 0 et que s_f est diagonalisable, on obtient d'après ce qui précède que :

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(s_f)} \dim E_\lambda(s_f) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(s_f)} \dim E_\lambda(\tau_f).$$

Par ailleurs, comme τ_f est aussi diagonalisable, on trouve que :

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(s_f)} \dim E_\lambda(s_f) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(s_f)} \dim E_\lambda(\tau_f) \leq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\tau_f)} \dim E_\lambda(\tau_f) = n.$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(s_f)} \dim E_\lambda(s_f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(s_f)} \dim E_\lambda(\tau_f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(\tau_f)} \dim E_\lambda(\tau_f) = n.$$

En d'autres termes, ceci signifie que τ_f n'a pas d'autre valeur propre que celles de s_f , et de plus on a $\dim E_\lambda(s_f) = \dim E_\lambda(\tau_f)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(s_f)$. Par conséquent, on en déduit que τ_f est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, et que de plus :

$$\boxed{\text{Sp}(s_f) = \text{Sp}(\tau_f) \text{ et } \forall \lambda \in \text{Sp}(s_f), \dim E_\lambda(s_f) = \dim E_\lambda(\tau_f).}$$

- (d) Montrons qu'il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^t A = \Omega ({}^t A A) {}^t \Omega$. Comme τ_f est diagonalisable en base orthonormée, que τ_f et s_f ont les mêmes valeurs et que les dimensions de leurs sous-espaces propres correspondants sont égales d'après la question précédente, il existe une base orthonormée $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\text{mat}_{\mathcal{D}}(\tau_f) = \begin{pmatrix} D & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{C}}(s_f).$$

Si P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{C}$ et si Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{D}$, on obtient d'après la formule de changement de bases que :

$$Q^{-1} A^t A Q = P^{-1} {}^t A A P.$$

En particulier, ceci nous donne que :

$$A^t A = Q Q^{-1} A^t A Q Q^{-1} = Q P^{-1} {}^t A A P Q^{-1}. \quad (*)$$

Si l'on pose $\Omega = Q P^{-1}$, alors on constate que Ω est inversible comme produit de matrices inversibles et que, de plus on a :

$$\Omega P Q^{-1} = Q P^{-1} P Q^{-1} = Q I_n Q^{-1} = Q Q^{-1} = I_n.$$

En particulier, on voit que $\Omega^{-1} = P Q^{-1}$, et donc l'égalité (*) se réécrit sous la forme :

$$A^t A = \Omega {}^t A A \Omega^{-1}.$$

A noter que, comme P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{C}$ et que Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{D}$, $\Omega = Q P^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Dès lors, comme les bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont orthonormées, il s'ensuit que la matrice Ω est orthogonale, ce qui signifie que $\Omega^{-1} = {}^t \Omega$. Par conséquent, on en déduit qu'il existe bien $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\boxed{A^t A = \Omega ({}^t A A) {}^t \Omega.}$$

- (5) Une inégalité : Dans cette question, on pose $V = [0, +\infty[^n$, $U =]0, +\infty[^n$ et on considère l'application φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n x_i.$$

On admet que V est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

- (a) Montrons que $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$. Commençons par vérifier que W est bornée. Pour ce faire, considérons un élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de W . Comme x appartient à V , on voit que $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Comme $x_1 + \dots + x_n = 1$, on constate que $0 \leq x_i \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc :

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 + \dots + 1 = n.$$

En particulier, ceci entraîne que $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n}$ pour tout $x \in W$, et donc W est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.

Montrons à présent que W est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Pour ce faire, on considère l'application $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$ et l'on pose :

$$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n \leq 1\} \quad \text{et} \quad W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n \geq 1\}.$$

Comme g est polynomiale, elle est continue sur $\mathbb{R}^n$ et les ensembles W_1 et W_2 sont fermés dans $\mathbb{R}^n$. Dès lors, comme $W = V \cap W_1 \cap W_2$ et que V est fermé dans $\mathbb{R}^n$, il s'ensuit que W est fermé dans $\mathbb{R}^n$ comme intersection de fermés.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{W \text{ est une partie fermée bornée de } \mathbb{R}^n.}$$

- (b) Montrons que φ admet un maximum global noté M sur W . Par définition, la fonction φ est polynomiale, et donc elle est continue sur $\mathbb{R}^n$. Dès lors, comme W est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ d'après la question précédente, la fonction φ est bornée sur W et elle y atteint ses bornes. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\varphi \text{ admet un maximum global noté } M \text{ sur } W.}$$

- (c) Calculons $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ lorsque $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$, on constate que tous les x_i sont ≥ 0 et qu'ils ne sont pas tous > 0 . En particulier, l'un des x_i est nul, et donc $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n = 0$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in V \setminus U$:

$$\boxed{\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0.}$$

- (d) Montrons que M est le maximum de φ sur U sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$. Par construction, on voit que M est le maximum de φ sur W sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$. De plus, on peut commencer par remarquer que $(1/n, \dots, 1/n)$ est un élément de W car tous les $1/n$ sont ≥ 0 et $1/n + \dots + 1/n = 1$. Par ailleurs, on trouve que :

$$\varphi\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n > 0.$$

En particulier, ceci entraîne que φ prend des valeurs > 0 sur W , et donc le maximum M de φ sur W est > 0 . Dès lors, comme φ est nulle sur $V \setminus U$, il s'ensuit que ce maximum M est atteint en un point extérieur à $V \setminus U$, et donc il est atteint en un point de U . Mais comme M est le maximum de φ sur W , on en déduit que :

$$\boxed{M \text{ est le maximum de } \varphi \text{ sur } U \text{ sous la contrainte } x_1 + \dots + x_n = 1.}$$

- (e) Déterminons la valeur du maximum M et précisons en quel vecteur de U il est atteint. Pour ce faire, considérons un point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U en lequel ce maximum M est atteint. D'après le cours, le point x est un point critique de φ sur U sous la contrainte $g(x) = 1$, et donc :

$$\begin{cases} g(x_1, \dots, x_n) = 1 \\ x_1, \dots, x_n > 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \nabla(\varphi)(x_1, \dots, x_n) = \lambda \nabla(g)(x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ x_1, \dots, x_n > 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left(\frac{x_1 \dots x_n}{x_1}, \dots, \frac{x_1 \dots x_n}{x_n}\right) = \lambda(1, \dots, 1) \end{cases}.$$

En particulier, ceci équivaut à dire que :

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ x_1, \dots, x_n > 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R}, \left(\frac{x_1 \dots x_n}{\lambda}, \dots, \frac{x_1 \dots x_n}{\lambda} \right) = (x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

et donc on voit que $(x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de φ sur U sous la contrainte $g(x) = 1$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = 1 \\ x_1, \dots, x_n > 0 \\ x_1 = \dots = x_n \end{cases}.$$

Après résolution, il s'ensuit que $(x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de φ sur U sous la contrainte $g(x) = 1$ si et seulement si :

$$(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right).$$

D'après ce qui précède, le maximum de M sur U sous la contrainte $g(x) = 1$ est atteint au point $(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$, et il est égal à :

$$\varphi \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) = \left(\frac{1}{n} \right)^n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$M = \left(\frac{1}{n} \right)^n \text{ et ce maximum } M \text{ est atteint au point } (x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right).$$

- (f) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres de S sont positives ou nulles et on note $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ une liste étendue des valeurs propres de S . Montrons que :

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{\text{Tr}(S)}{n} \right)^n.$$

Pour ce faire, on distingue deux cas. Tout d'abord, si $\sum_{i=1}^n \mu_i = 0$, alors tous les μ_i sont nuls car une somme de réels ≥ 0 est nulle si et seulement si tous les μ_i sont nuls. Dans ce cas, on voit que $\prod_{i=1}^n \mu_i = 0$. Comme de plus S est diagonalisable, sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres, et donc $\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n \mu_i = 0$. En particulier, l'inégalité ci-dessus est bien vérifiée (et c'est même une égalité).

Supposons maintenant que $\sum_{i=1}^n \mu_i > 0$, et posons $r = \sum_{i=1}^n \mu_i$ et $x_i = \frac{\mu_i}{r}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par construction, on voit que tous les x_i sont ≥ 0 , et de plus :

$$g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n = \frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{r} = 1.$$

D'après la question précédente, on voit que :

$$\prod_{i=1}^n \frac{\mu_i}{r} = \prod_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{1}{n} \right)^n,$$

ce qui nous donne l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{r^n} \prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{1}{n} \right)^n.$$

En particulier, ceci entraîne que :

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{r}{n} \right)^n = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n} \right)^n$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{\text{Tr}(S)}{n} \right)^n.$$

Par conséquent, on en déduit dans tous les cas que :

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \leq \left(\frac{\text{Tr}(S)}{n} \right)^n.$$

Par ailleurs, on peut remarquer qu'on a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si soit tous les μ_i sont nuls, soit tous les $\frac{\mu_i}{r}$ sont égaux à $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire si tous les μ_i sont égaux vu que $r = \sum_{i=1}^n \mu_i$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\prod_{i=1}^n \mu_i = \left(\frac{\text{Tr}(S)}{n} \right)^n \text{ si et seulement si } \mu_1 = \dots = \mu_n.$$

- (6) Dans cette question, on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de tAA . On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x) = \prod_{i=1}^n (x + \lambda_i).$$

Montrons que, pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{\text{Tr}(xI_n + {}^tAA)}{n} \right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n.$$

Pour ce faire, fixons un réel $x \geq 0$ et considérons une base orthonormée $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ de vecteurs colonnes propres de tAA pour les valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Comme ${}^tAAE_i = \lambda_i E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on voit que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$(xI_n + {}^tAA) E_i = xI_n E_i + {}^tAAE_i = (x + \lambda_i) E_i.$$

En particulier, $(E_1, \dots, E_n)$ est aussi une base de vecteurs colonnes propres de $xI_n + {}^tAA$ pour les valeurs propres respectives $x + \lambda_1, \dots, x + \lambda_n$, et donc $\Delta(x)$ est égal au produit des valeurs propres de $xI_n + {}^tAA$. En outre, comme la trace d'une matrice diagonalisable est égale à la somme de ses valeurs propres, ceci nous donne par linéarité de la somme que :

$$\text{Tr}(xI_n + {}^tAA) = \sum_{i=1}^n (x + \lambda_i) = nx + \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Dès lors, il s'ensuit d'après la question précédente que :

$$\Delta(x) = \prod_{i=1}^n (x + \lambda_i) \leq \left(\frac{\text{Tr}(xI_n + {}^tAA)}{n} \right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\Delta(x) \leq \left(\frac{\text{Tr}(xI_n + {}^tAA)}{n} \right)^n = \left(\frac{nx + \lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \right)^n.$$

Partie III : Étude de deux cas particuliers.

Dans cette partie encore, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- (1) On suppose dans cette question que f est un projecteur de rang $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

- (a) Montrons que la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme f est égale à r . D'après le cours, on sait que la trace de l'endomorphisme f est égale à celle de sa matrice dans toute base de $\mathbb{R}^n$ (puisque toutes les matrices représentant un même endomorphisme sont semblables, et que deux matrices semblables ont même trace). En particulier, la trace de f est indépendante de la base choisie pour la calculer. Dès lors, fixons une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathfrak{Im}(f)$ (ce qui fait sens car $\dim \mathfrak{Im}(f) = \text{rg}(f) = r$). Comme $\dim \mathbb{R}^n = \text{rg}(f) + \dim \ker(f)$, on voit que $\dim \ker(f) = n - r$. Fixons alors une base $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de $\ker(f)$. Comme f est un projecteur, on sait que $\mathfrak{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^n$, et donc la concaténation $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. De plus, comme f est un projecteur et que $e_1, \dots, e_r$ appartiennent à $\mathfrak{Im}(f)$, on constate que $f(e_i) = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. Par ailleurs, comme $e_{r+1}, \dots, e_n$ appartiennent à $\ker(f)$, on voit que $f(e_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket r+1, n \rrbracket$. En particulier, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale, ses r premiers coefficients diagonaux sont égaux à 1 et les autres à 0, ce qui entraîne que :

$$\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)) = 1 + \dots + 1 + 0 + \dots + 0 = r.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la trace de toute matrice représentant l'endomorphisme } f \text{ est égale à } r.}$$

- (b) On reprend les notations de la question (3) de la partie II selon lesquelles :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r, n-r} \\ A_3 & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}.$$

Vérifions tout d'abord que $A_1^2 = A_1$ et que $\text{Tr}(A_1) = r$. Comme f est un projecteur, on voit que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f^2) = (\text{mat}_{\mathcal{C}}(f))^2 = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f).$$

D'après les propriétés rappelées au début du problème, ceci nous donne que :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A_1 A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 A_1 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

En particulier, ceci entraîne que $A_1^2 = A_1$. En outre, comme tous les coefficients diagonaux non nuls de $\text{mat}_{\mathcal{C}}(f)$ sont ceux de A_1 , on obtient d'après la question précédente que :

$$\text{Tr}(f) = r = \text{Tr}(A_1).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{A_1^2 = A_1 \text{ et } \text{Tr}(A_1) = r.}$$

A présent, déterminons la matrice A_1 . Comme A_1 est une matrice carrée de taille r et que $A_1^2 = A_1$, A_1 est la matrice d'un projecteur g de $\mathbb{R}^r$ dans la base canonique. D'après la question précédente, la trace de g est égale à son rang. Dès lors, comme $\text{Tr}(A_1) = r$, ceci entraîne que g est de rang r . Mais comme g est un projecteur de $\mathbb{R}^r$, il s'ensuit d'après les arguments de la question précédente qu'il existe une base dans laquelle la matrice de g est égale à I_r , et donc g est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^r$. Mais comme g est l'endomorphisme canoniquement associé à A_1 , on en déduit que :

$$\boxed{A_1 = I_r.}$$

- (c) Montrons tout d'abord que les valeurs propres non nulles de tAA sont supérieures ou égales à 1. Avec les notations de la question précédente, on voit d'après les propriétés rappelées au début du problème que :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^tA_1 & {}^tA_3 \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_1 A_1 + {}^tA_3 A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Comme $A_1 = I_r$ d'après la question précédente, ceci entraîne que :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} I_r + {}^tA_3 A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Considérons un vecteur propre X de tAA pour une valeur propre $\lambda \neq 0$, que l'on écrit sous la forme :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},$$

où X_1 appartient à $\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ et X_2 appartient à $\mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$. Par des calculs simples, on trouve que :

$${}^tAAX = \begin{pmatrix} I_r + {}^tA_3 A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + {}^tA_3 A_3 X_1 \\ 0_{n-r,1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\lambda \neq 0$, on voit que $X_2 = 0$ et $X_1 + {}^tA_3 A_3 X_1 = \lambda X_1$, et donc ${}^tA_3 A_3 X_1 = (\lambda - 1)X_1$. Comme X est un vecteur propre et que $X_2 = 0$, on obtient que $X_1 \neq 0$, et donc X_1 est un vecteur propre de ${}^tA_3 A_3$ pour la valeur propre $\lambda - 1$. Or, on sait d'après la question (3)(d) de la partie II que les valeurs propres de ${}^tA_3 A_3$ sont positives ou nulles, ce qui entraîne que $\lambda - 1 \geq 0$, et donc $\lambda \geq 1$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres non nulles de } {}^tAA \text{ sont supérieures ou égales à 1.}}$$

Montrons maintenant que $\text{Tr}({}^tAA) \geq r$. D'après les calculs précédents, on sait que :

$${}^tAA = \begin{pmatrix} I_r + {}^tA_3 A_3 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Comme la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux, on trouve par linéarité de la trace que :

$$\text{Tr}({}^tAA) = \text{Tr}(I_r + {}^tA_3 A_3) = \text{Tr}(I_r) + \text{Tr}({}^tA_3 A_3) = r + \text{Tr}({}^tA_3 A_3).$$

Or, on sait d'après la question (1)(b) de la partie II que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ est un produit scalaire. En particulier, ceci nous donne que :

$$\text{Tr}({}^tA_3 A_3) = \langle A_3, A_3 \rangle_2 \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{Tr}({}^tAA) \geq r.}$$

- (d) Déterminons les projecteurs pour lesquels $\text{Tr}(^tAA) = r$. Pour ce faire, fixons un projecteur quelconque f de $\mathbb{R}^n$. D'après la question (3)(f) de la partie II, on sait qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{r,n-r} \\ A_3 & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

D'après les questions précédentes, on sait aussi que $A_1 = I_r$ et que :

$$\text{Tr}(^tAA) = r + \langle A_3, A_3 \rangle_2.$$

Comme l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ est un produit scalaire, on voit que $\text{Tr}(^tAA) = r$ si et seulement si $\langle A_3, A_3 \rangle_2 = 0$, c'est-à-dire si $A_3 = 0$. En d'autres termes, le projecteur f vérifie la relation " $\text{Tr}(^tAA) = r$ " si et seulement si :

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

En particulier, on voit que la base $\mathcal{C}$ est adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathfrak{Im}(f) \oplus \ker(f)$, c'est-à-dire que les r premiers vecteurs de $\mathcal{C}$ forment une base $\mathcal{C}_1$ de $\mathfrak{Im}(f)$ et les $(n-r)$ suivants une base $\mathcal{C}_2$ de $\ker(f)$. Dès lors, comme $\mathcal{C}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on voit que les éléments de $\mathcal{C}_1$ sont orthogonaux à ceux de $\mathcal{C}_2$, et donc $\mathfrak{Im}(f)$ et $\ker(f)$ sont orthogonaux. En d'autres termes, on voit que, si $\text{Tr}(^tAA) = r$, alors f est un projecteur orthogonal.

Réciproquement, si f est un projecteur orthogonal, alors sa matrice A dans la base canonique est symétrique (car la base canonique est orthonormée). En particulier, on trouve d'après la question (1)(a) de la partie III que :

$$\text{Tr}(^tAA) = \text{Tr}(AA) = \text{Tr}(A^2) = \text{Tr}(A) = r.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout projecteur f de $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\text{Tr}(^tAA) = r \text{ si et seulement si } f \text{ est orthogonal.}}$$

- (2) On suppose dans cette question que f est une symétrie, c'est-à-dire $f^2 = \text{Id}$.

- (a) Justifions que tAA est inversible et exprimons son inverse en fonction de A et de tA . Comme $f^2 = \text{Id}$, on obtient en termes matriciels que $A^2 = I_n$. Par transposition, ceci nous donne que :

$$^t(A^2) = (^tA)^2 = ^tI_n = I_n.$$

Par des calculs simples, on trouve que :

$$^tAAA^tA = ^tAI_n^tA = ^tA^tA = (^tA)^2 = I_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{^tAA \text{ est inversible et : } (^tAA)^{-1} = A^tA.}$$

- (b) Montrons tout d'abord que, si λ est une valeur propre de tAA , alors $1/\lambda$ est aussi une valeur propre de tAA . Pour ce faire, fixons une valeur propre λ de tAA . Comme tAA est inversible d'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de tAA , et donc $\lambda \neq 0$. Fixons alors un vecteur propre X de tAA pour la valeur propre λ . Comme $^tAAX = \lambda X$, ceci entraîne que :

$$X = I_n X = (^tAA)^{-1} ^tAAX = (^tAA)^{-1} (\lambda X) = \lambda (^tAA)^{-1} X.$$

Comme $(^tAA)^{-1} = A^tA$ d'après la question précédente, ceci nous donne que :

$$X = \lambda A^tAX.$$

En d'autres termes, on peut écrire que :

$$A^tAX = \frac{1}{\lambda} X.$$

En particulier, X est vecteur propre de A^tA pour la valeur propre $1/\lambda$. Mais comme tAA et A^tA ont les mêmes valeurs propres d'après la question (4)(d) de la partie II, il s'ensuit que $1/\lambda$ est valeur propre de tAA . Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } ^tAA, \text{ alors } \frac{1}{\lambda} \text{ est valeur propre de } ^tAA.}$$

A présent, montrons que, pour toute valeur propre λ de tAA :

$$\dim E_{\lambda}(^tAA) = \dim E_{1/\lambda}(^tAA).$$

D'après ce qui précède, on vient de vérifier que, si X est vecteur propre de tAA pour la valeur propre λ , alors X est aussi vecteur propre de A^tA pour la valeur propre $1/\lambda$, et donc on a l'inclusion :

$$E_{\lambda}(^tAA) \subset E_{1/\lambda}(A^tA).$$

De la même façon, on peut montrer que, si X est vecteur propre de A^tA pour la valeur propre $1/\lambda$, alors X est aussi vecteur propre de tAA pour la valeur propre λ , et donc on a aussi l'inclusion :

$$E_{1/\lambda}(A^tA) \subset E_\lambda({}^tAA).$$

Par double inclusion, il s'ensuit que :

$$E_\lambda({}^tAA) = E_{1/\lambda}(A^tA).$$

En passant aux dimensions, on trouve que :

$$\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}(A^tA).$$

Toujours d'après la question (4)(d) de la partie II, on sait que :

$$\dim E_{1/\lambda}({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}(A^tA).$$

Par conséquent, on en déduit que, pour toute valeur propre λ de tAA :

$$\boxed{\dim E_\lambda({}^tAA) = \dim E_{1/\lambda}({}^tAA).}$$

(c) Vérifions que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

puis établissons l'équivalence logique : $x + \frac{1}{x} = 2 \iff x = 1$. Pour ce faire, on peut remarquer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0.$$

Par conséquent, on en déduit que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{x + \frac{1}{x} \geq 2.}$$

De plus, on voit d'après ce qui précède que $x + \frac{1}{x} = 2$ si et seulement si $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, c'est-à-dire si $(\sqrt{x})^2 = x = 1$. Par conséquent, on en déduit aussi que, pour tout $x > 0$:

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = 2 \iff x = 1.}$$

(d) On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une liste étendue des valeurs propres de tAA . Montrer que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 2^n.$$

D'après la question (2)(b) de la partie III, on sait que, si λ est valeur propre de tAA , alors $1/\lambda$ est aussi valeur propre de tAA et que les dimensions des sous-espaces propres correspondants sont égales. On distingue alors trois cas.

Supposons tout d'abord que 1 est la seule valeur propre de tAA . Alors 1, ..., 1 est une liste étendue des valeurs propres de tAA , et l'on trouve que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = \prod_{i=1}^n (1 + 1) = \prod_{i=1}^n 2 = 2^n.$$

Supposons maintenant que 1 n'est pas la seule valeur propre de tAA . On note s la dimension du sous-espace propre associé à 1, et on désigne par $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r$ les valeurs propres > 1 de tAA , répétées autant de fois que la dimension des sous-espaces propres correspondants. Alors $1/\lambda'_1, \dots, 1/\lambda'_r$ est la liste des valeurs propres < 1 de tAA , répétées autant de fois que la dimension des sous-espaces propres correspondants. De plus, on voit que $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r, 1/\lambda'_1, \dots, 1/\lambda'_r, 1, \dots, 1$ est une liste étendue des valeurs propres de tAA , et de plus on a $2r + s = n$. Dès lors, on trouve que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = \prod_{i=1}^r \left[(1 + \lambda'_i) \left(1 + \frac{1}{\lambda'_i} \right) \right] \times \prod_{i=1}^s (1 + 1) = \prod_{i=1}^r \left[2 + \lambda'_i + \frac{1}{\lambda'_i} \right] \times \prod_{i=1}^s 2.$$

Comme $\lambda'_i > 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, ceci entraîne d'après la question précédente que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) > \prod_{i=1}^r [2 + 2] \times \prod_{i=1}^s 2 = \prod_{i=1}^r 4 \times \prod_{i=1}^s 2 = 4^r 2^s = 2^{2r+s} = 2^n.$$

Enfin, supposons que 1 n'est pas valeur propre de tAA . On note $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r$ les valeurs propres > 1 de tAA , répétées autant de fois que la dimension des sous-espaces propres correspondants. Alors

$\lambda'_1, \dots, \lambda'_r, 1/\lambda'_1, \dots, 1/\lambda'_r$ est une liste étendue des valeurs propres de tAA , et de plus on a $2r = n$. Dans ce cas, on obtient que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = \prod_{i=1}^r \left[(1 + \lambda'_i) \left(1 + \frac{1}{\lambda'_i} \right) \right] = \prod_{i=1}^r \left[2 + \lambda'_i + \frac{1}{\lambda'_i} \right].$$

Comme $\lambda'_i > 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, ceci nous donne avec la question précédente que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) > \prod_{i=1}^r [2 + 2] = \prod_{i=1}^r 4 = 4^r = 2^{2r} = 2^n.$$

Dans tous les cas, on en déduit que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq 2^n.$$

- (e) Déterminons les matrices pour lesquelles $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = 2^n$ et montrons que cette égalité correspond au cas où f est une symétrie orthogonale, ce qui signifie que les sous-espaces $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux. D'après la distinction de cas de la question précédente, on voit que $\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = 2^n$ si et seulement si 1 est la seule valeur propre de tAA . Or, comme cette matrice est symétrique d'après la question (3)(c) de la partie II, elle est diagonalisable en base orthonormée d'après le théorème spectral. En particulier, si 1 est la seule valeur propre de tAA , il existe une matrice orthogonale P telle que :

$${}^tAA = PI_nP^{-1} = PP^{-1} = I_n,$$

et donc A est une matrice orthogonale. Réciproquement, si A est orthogonale, alors on sait que ${}^tAA = I_n$, et donc 1 est la seule valeur propre de tAA . Par conséquent, on en déduit que, pour toute symétrie f de $\mathbb{R}^n$:

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = 2^n \iff A \text{ est orthogonale.}$$

A noter que, dans ce cas, on a ${}^tAA = I_n$ et $A^2 = I_n$ (car $f^2 = \text{Id}$ par hypothèse). Comme A est inversible, ceci entraîne que :

$${}^tA = A^{-1} = A.$$

En particulier, la matrice A est symétrique, ce qui implique que f est un endomorphisme symétrique (car A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée), et donc les sous-espaces propres $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux.

Réciproquement, supposons que les sous-espaces propres $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$ sont orthogonaux. Comme f est une symétrie de $\mathbb{R}^n$, on sait d'après le cours que :

$$\mathbb{R}^n = \ker(f - \text{Id}) \oplus \ker(f + \text{Id}) = E_1(f) \oplus E_{-1}(f).$$

Dans ce cas, la concaténation d'une base orthonormée de $E_1(f)$ et d'une base orthonormée de $E_{-1}(f)$ donne une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, qui est de plus une base de diagonalisation de f . En d'autres termes, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, et donc symétrique. D'après le cours, il s'ensuit que f est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$. Comme A est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est elle aussi orthonormée), il s'ensuit que A est une matrice symétrique. Dès lors, comme $f^2 = \text{Id}$, on obtient que $A^2 = I_n$ et ${}^tA = A$, ce qui nous donne que ${}^tAA = AA = A^2 = I_n$, et donc A est orthogonale.

Par double implication, on en déduit que :

$$\prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = 2^n \iff f \text{ est une symétrie orthogonale.}$$

Partie IV : Décomposition polaire.

Dans cette partie encore, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, f est toujours l'endomorphisme canoniquement associé à A et on suppose de plus que A est inversible.

- (1) Montrons qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et n réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i.$$

D'après la question (3)(c) de la partie II, l'endomorphisme s_f est symétrique. Dès lors, on voit avec le théorème spectral que l'endomorphisme f est diagonalisable en base orthonormée. En d'autres termes, il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i.$$

A noter que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont ≥ 0 d'après la question (3)(d) de la partie II. De plus, comme A est inversible par hypothèse, sa transposée l'est aussi, et donc tAA est inversible comme produit de matrices inversibles. Dès lors, comme s_f est l'endomorphisme canoniquement associé à tAA , l'endomorphisme s_f est bijectif, et donc 0 n'est pas valeur propre de s_f . En particulier, toutes les valeurs propres de s_f sont > 0 . Par conséquent, on en déduit que :

il existe une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

On pose alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i$.

Montrons que l'on définit ainsi un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$. Comme $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et qu'un endomorphisme est uniquement déterminé par l'image, il existe un unique endomorphisme v tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, v(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i$. Dans ce cas, la matrice de v dans la base $\mathcal{C}$ est diagonale, et donc symétrique. Comme la base $\mathcal{C}$ est orthonormée, l'endomorphisme v est symétrique. De plus, comme les valeurs propres de v sont les $\sqrt{\lambda_i}$, elles sont toutes positives, et donc v appartient à $S^+(\mathbb{R}^n)$. Enfin, on trouve par linéarité de v que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$v^2(\varepsilon_i) = v(v(\varepsilon_i)) = v(\sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i = s_f(\varepsilon_i).$$

Comme les endomorphismes v^2 et s_f coïncident sur la base $\mathcal{C}$, ils sont donc égaux. Par conséquent, on en déduit que :

l'endomorphisme v est bien défini, il appartient à $S^+(\mathbb{R}^n)$ et de plus : $v^2 = s_f$.

- (2) Soit ω un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $\omega \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $\omega^2 = s_f$. Montrons tout d'abord que, pour toute valeur propre μ de ω , on a $E_\mu(\omega) \subset E_{\mu^2}(s_f)$. Pour ce faire, fixons une valeur propre μ de ω . Si x est un élément de $E_\mu(\omega)$, on sait que $\omega(x) = \mu x$. Comme $\omega^2 = s_f$, on trouve par linéarité de ω que :

$$\omega^2(x) = \omega(\omega(x)) = \omega(\mu x) = \mu \omega x = \mu^2 x = s_f(x).$$

En particulier, on voit que x appartient à $E_{\mu^2}(s_f)$. Par conséquent, on en déduit que, pour toute valeur propre μ de ω :

$$E_\mu(\omega) \subset E_{\mu^2}(s_f).$$

Montrons ensuite que :

$$E_\mu(\omega) = E_{\mu^2}(s_f) \quad \text{et} \quad \text{Sp}(\omega) = \left\{ \sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(s_f) \right\}.$$

Pour tout $\mu \in \text{Sp}(\omega)$, on sait d'après ce qui précède que $E_\mu(\omega) \subset E_{\mu^2}(s_f)$, ce qui entraîne en passant aux dimensions que :

$$\dim E_\mu(\omega) \leq \dim E_{\mu^2}(s_f).$$

Par sommation, ceci nous donne que :

$$\sum_{\mu \in \text{Sp}(\omega)} \dim E_\mu(\omega) \leq \sum_{\mu \in \text{Sp}(\omega)} \dim E_{\mu^2}(s_f).$$

Comme ω est symétrique par hypothèse, ω est diagonalisable d'après le théorème spectral, et donc :

$$\dim \mathbb{R}^n = \sum_{\mu \in \text{Sp}(\omega)} \dim E_\mu(\omega) \leq \sum_{\mu \in \text{Sp}(\omega)} \dim E_{\mu^2}(s_f) \leq \dim \mathbb{R}^n.$$

Dès lors, il s'ensuit que :

$$\dim \mathbb{R}^n = \sum_{\mu \in \text{Sp}(\omega)} \dim E_\mu(\omega) = \sum_{\mu \in \text{Sp}(\omega)} \dim E_{\mu^2}(s_f).$$

En particulier, s_f n'admet pas d'autre valeur propre que les réels de la forme μ^2 , où μ est valeur propre de ω . Dès lors, comme ω n'a que des valeurs propres positives par hypothèse, on obtient que les valeurs propres de ω sont exactement les réels de la forme $\sqrt{\lambda}$, où λ est valeur propre de s_f , et donc :

$$\text{Sp}(\omega) = \left\{ \sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \text{Sp}(s_f) \right\}.$$

Par ailleurs, on sait d'après ce qui précède que :

$$\sum_{\mu \in \text{Sp}(\omega)} [\dim E_{\mu^2}(s_f) - \dim E_{\mu}(\omega)] = 0.$$

Comme $\dim E_{\mu^2}(s_f) - \dim E_{\mu}(\omega) \geq 0$ pour tout $\mu \in \text{Sp}(\omega)$, on voit que $\dim E_{\mu^2}(s_f) = \dim E_{\mu}(\omega)$ pour tout $\mu \in \text{Sp}(\omega)$ car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les réels le sont. Mais comme $E_{\mu}(\omega) \subset E_{\mu^2}(s_f)$ pour tout $\mu \in \text{Sp}(\omega)$, on en déduit que, pour tout $\mu \in \text{Sp}(\omega)$:

$$E_{\mu}(\omega) = E_{\mu^2}(s_f).$$

- (3) Montrons qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et tel que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f , la matrice de v est diagonale. D'après la question (1) de la partie IV, on sait qu'il existe un endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$. De plus, d'après la question précédente appliquée à l'endomorphisme $\omega = v$, on voit que tout vecteur propre de s_f est un vecteur propre de v . En particulier, toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f est une base orthonormée de vecteurs de v , ce qui entraîne que la matrice de v dans une telle base est diagonale, d'où l'existence d'un endomorphisme satisfaisant les conditions recherchées.

En ce qui concerne l'unicité, considérons un endomorphisme v' de $\mathbb{R}^n$ tel que $v' \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $(v')^2 = s_f$ et tel que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f , la matrice de v' est diagonale. Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ la base orthonormée et les n réels strictement positifs donnés à la question (1) de la partie IV, c'est-à-dire tels que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad s_f(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i.$$

Comme les ε_i sont des vecteurs propres de s_f , ce sont aussi des vecteurs propres de v' (car la matrice de v' dans cette base est diagonale), et donc il existe pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un réel α_i tel que $v'(\varepsilon_i) = \alpha_i \varepsilon_i$. Dès lors, comme $(v')^2 = s_f$, on obtient que $\alpha_i^2 = \lambda_i$. Comme v' appartient à $S^+(\mathbb{R}^n)$, toute valeur propre de v' est positive, et donc $\alpha_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En d'autres termes, on vient de montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$v'(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i} \varepsilon_i = v(\varepsilon_i).$$

Mais comme un endomorphisme est entièrement déterminé par l'image d'une base, il s'ensuit que $v' = v$, d'où l'unicité recherchée.

Par conséquent, on en déduit que :

il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et tel que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f , la matrice de v est diagonale.

- (4) Montrons qu'il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tAA}$ appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $(\sqrt{{}^tAA})^2 = {}^tAA$. D'après la question précédente, on sait qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ tel que $v \in S^+(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = s_f$ et tel que, dans toute base orthonormée de vecteurs propres de s_f , la matrice de v est diagonale. En considérant la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, cela signifie qu'il existe une unique matrice B de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que (1) $B^2 = {}^tAA$ et (2) toute base orthonormée de vecteurs propres de tAA est une base orthonormée de vecteurs propres de B . En particulier, cela établit l'existence de la matrice recherchée.

En ce qui concerne l'existence, considérons une matrice B' de $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $(B')^2 = {}^tAA$. Soit ω l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B' . Comme B' appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ et que $(B')^2 = {}^tAA$, on voit que ω appartient à $S^+(\mathbb{R}^n)$ et $\omega^2 = s_f$. D'après les questions (2) et (3), il s'ensuit que $\omega = v$, et donc on obtient en termes matriciels que $B' = B$, d'où l'unicité recherchée.

Par conséquent, on en déduit que :

il existe une unique matrice notée $\sqrt{{}^tAA}$ appartenant à $S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $(\sqrt{{}^tAA})^2 = {}^tAA$.

- (5) Vérifions tout d'abord que la matrice $A(\sqrt{{}^tAA})^{-1}$ est orthogonale. Pour simplifier, on pose $B = \sqrt{{}^tAA}$. Comme $B^2 = {}^tAA$, on trouve par des calculs simples que :

$${}^t(AB^{-1})AB^{-1} = {}^t(B^{-1}){}^tAAB^{-1} = {}^t(B^{-1})B^2B^{-1} = {}^t(B^{-1})B.$$

De plus, comme B est symétrique, son inverse B^{-1} l'est aussi, et donc :

$${}^t(AB^{-1})AB^{-1} = {}^t(B^{-1})B = B^{-1}B = I_n.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$A(\sqrt{{}^tAA})^{-1}$ est orthogonale.

A présent, montrons qu'il existe un unique couple $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$. Si l'on pose $\Omega = A \left(\sqrt{{}^t A A} \right)^{-1}$ et $S = \sqrt{{}^t A A}$, alors on voit d'après ce qui précède que Ω et S appartiennent respectivement à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et à $S_n^+(\mathbb{R})$, et que de plus $\Omega = AS^{-1}$. En particulier, ceci nous donne que :

$$A = AS^{-1}S = \Omega S,$$

d'où l'existence d'une telle décomposition. Pour montrer l'unicité, supposons qu'il existe un couple $(\Omega_1, S_1) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega_1 S_1$. Comme Ω_1 est orthogonale, on trouve par des calculs simples que :

$${}^t A A = ({}^t \Omega_1 S_1) \Omega_1 S_1 = {}^t S_1 {}^t \Omega_1 \Omega_1 S_1 = {}^t S_1 I_n S_1 = {}^t S_1 S_1.$$

De plus, comme S_1 est symétrique, ceci entraîne que :

$${}^t A A = {}^t S_1 S_1 = S_1 S_1 = S_1^2.$$

Comme $S_1^2 = {}^t A A$ et que S_1 appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$, il s'ensuit d'après la question précédente que $S_1 = S$. Dès lors, comme $A = \Omega_1 S_1$, on voit que $A = \Omega_1 S$, et donc $\Omega = AS^{-1} = \Omega_1 S S^{-1} = \Omega_1$, d'où l'unicité d'une telle décomposition.

Par conséquent, on en déduit que :

il existe un unique couple $(\Omega, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega S$.

Partie V : Application à la distance d'une matrice inversible à l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, on note $d(M)$ la distance de M à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire :

$$d(M) = \inf_{V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|M - V\|_2.$$

(1) Justifions que $d(M)$ est bien définie. Pour ce faire, considérons l'ensemble :

$$E_M = \{\|M - V\|_2, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}.$$

Alors on voit que E_M est une partie non vide de $\mathbb{R}$. De plus, comme toute norme est un réel positif, E_M est minorée par 0. D'après la propriété (*) rappelée au début du problème, E_M admet une borne inférieure. Par conséquent, on en déduit que :

$d(M)$ est bien définie.

(2) Soit $R \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrons tout d'abord que :

$$\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.$$

Pour ce faire, fixons une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme R est orthogonale, on trouve que :

$$\|RN\|_2^2 = \text{Tr}({}^t(RN)RN) = \text{Tr}({}^t N {}^t R R N) = \text{Tr}({}^t N I_n N) = \text{Tr}({}^t N N) = \|N\|_2^2,$$

d'où l'égalité $\|RN\|_2 = \|N\|_2$ en passant aux racines carrées. De même, on trouve d'après les propriétés de la trace que :

$$\|NR\|_2^2 = \text{Tr}({}^t(NR)NR) = \text{Tr}({}^t R {}^t N N R) = \text{Tr}({}^t R I_n N) = \text{Tr}({}^t N N) = \|N\|_2^2,$$

d'où l'égalité $\|NR\|_2 = \|N\|_2$ en passant aux racines carrées. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$\|RN\|_2 = \|NR\|_2 = \|N\|_2.$

A présent, montrons que les applications $l_1 : V \mapsto VR^{-1}$ et $l_2 : V \mapsto R^{-1}V$ sont des bijections de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même. On va se contenter de le vérifier pour l_1 , la démonstration pour l_2 étant analogue. Pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on peut remarquer que :

$${}^t(VR^{-1})VR^{-1} = {}^t(R^{-1}){}^t V V R^{-1} = {}^t(R^{-1})I_n R^{-1} = {}^t(R^{-1})R^{-1} = {}^t(R)R = I_n.$$

En particulier, on voit que $l_1(V)$ appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et donc l_1 est bien une application de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. Posons alors $l_3(V) = VR$ pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Comme précédemment, on peut vérifier que l_3 est bien une application de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. De plus, on trouve que, pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$l_1 \circ l_3(V) = l_1(l_3(V)) = l_1(VR) = VRR^{-1} = VI_n = V.$$

De même, on obtient que, pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$:

$$l_3 \circ l_1(V) = l_3(l_1(V)) = l_3(VR^{-1}) = VR^{-1}R = VI_n = V.$$

En particulier, cela signifie que $l_1 \circ l_3 = l_3 \circ l_1 = \text{Id}_{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$, et donc l_1 est bijective. De la même façon, on peut vérifier que l_2 est bijective. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{l_1 : V \mapsto VR^{-1} \text{ et } l_2 : V \mapsto R^{-1}V \text{ sont des bijections de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ sur lui-même.}}$$

Enfin, vérifions que :

$$d(M) = d(RM) = d(MR).$$

Pour ce faire, on considère les ensembles :

$$E_M = \{\|M - V\|_2, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad E_{RM} = \{\|RM - V\|_2, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}.$$

Pour tout $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on voit d'après la première partie de la question que :

$$\|RM - V\|_2 = \|RM - RR^{-1}V\|_2 = \|R(M - R^{-1}V)\|_2 = \|M - R^{-1}V\|_2 = \|M - l_2(V)\|_2.$$

Comme l_2 est une bijection de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même, $l_2(V)$ décrit $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tout entier quand V parcourt $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, et donc :

$$E_{RM} = \{\|RM - V\|_2, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} = \{\|M - l_2(V)\|_2, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} = \{\|M - V\|_2, V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\} = E_M.$$

Comme $E_{RM} = E_M$, ces deux ensembles ont même borne inférieure, et donc $d(M) = d(RM)$. De même, on peut vérifier que $d(M) = d(MR)$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{d(M) = d(RM) = d(MR).}$$

- (3) On note $A = \Omega S$ la décomposition polaire de A . On considère une matrice diagonale D à éléments diagonaux strictement positifs et une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$S = PD^tP.$$

Vérifions que $d(A) = d(D)$. Comme les matrices Ω et P sont orthogonales, on obtient d'après la question précédente que :

$$d(A) = d(\Omega S) = d(S) = d(PDP^{-1}) = d(DP^{-1}).$$

Comme P est orthogonale, la matrice P^{-1} est aussi orthogonale car :

$${}^t(P^{-1})P^{-1} = {}^t({}^tP)P^{-1} = PP^{-1} = I_n.$$

Toujours d'après la question précédente, ceci entraîne que :

$$d(A) = d(DP^{-1}) = d(D).$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{d(A) = d(D).}$$

- (4) Soit $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On note $W = \frac{1}{2}(V + {}^tV)$ et v l'endomorphisme canoniquement associé à V .

- (a) Justifions que W est diagonalisable. Par linéarité de la transposition, on trouve que :

$${}^tW = {}^t\left(\frac{1}{2}(V + {}^tV)\right) = \frac{1}{2}({}^tV + {}^{tt}V) = \frac{1}{2}({}^tV + V) = W.$$

En particulier, la matrice W est symétrique. D'après le théorème spectral, on en déduit que :

$$\boxed{W \text{ est diagonalisable.}}$$

On note ω l'endomorphisme canoniquement associé à W .

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Vérifions tout d'abord que $\langle \omega(x), x \rangle = \langle v(x), x \rangle$ et que $\|v(x)\| = \|x\|$. Pour ce faire, on désigne par X le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. D'après l'écriture matricielle du produit scalaire en base orthonormée, on trouve que :

$$\langle \omega(x), x \rangle = {}^t(WX)X = {}^tX^tWX.$$

Comme W est symétrique et que $W = \frac{1}{2}(V + {}^tV)$, ceci nous donne que :

$$\langle \omega(x), x \rangle = {}^tX^tWX = {}^tXWX = {}^tX\left[\frac{1}{2}(V + {}^tV)\right]X.$$

Par des calculs simples, on trouve que :

$$\langle \omega(x), x \rangle = {}^tX\left[\frac{1}{2}(V + {}^tV)\right]X = \frac{1}{2}({}^tXVX + {}^tX{}^tVX) = \frac{1}{2}({}^tX(VX) + {}^t(VX)X).$$

En termes de produit scalaire, ceci entraîne que :

$$\langle \omega(x), x \rangle = \frac{1}{2}({}^tX(VX) + {}^t(VX)X) = \frac{1}{2}(\langle x, v(x) \rangle + \langle v(x), x \rangle).$$

Par symétrie du produit scalaire, il s'ensuit que :

$$\langle \omega(x), x \rangle = \frac{1}{2} (\langle x, v(x) \rangle + \langle v(x), x \rangle) = \frac{1}{2} (\langle v(x), x \rangle + \langle v(x), x \rangle) = \langle v(x), x \rangle.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\langle \omega(x), x \rangle = \langle v(x), x \rangle.}$$

Toujours d'après l'écriture matricielle du produit scalaire en base orthonormée, on trouve que :

$$\|v(x)\|^2 = \langle v(x), v(x) \rangle = {}^t(VX) VX = {}^tX {}^tV V X.$$

Comme V est orthogonale, ceci entraîne que :

$$\|v(x)\|^2 = {}^tX {}^tV V X = {}^tX I_n X = {}^tX X = \|x\|^2.$$

En passant aux racines carrées, on en déduit que :

$$\boxed{\|v(x)\| = \|x\|.}$$

A présent, montrons que :

$$|\langle \omega(x), x \rangle| \leq \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \langle x - \omega(x), x \rangle \geq 0.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et aux vecteurs x et $v(x)$, et aussi d'après les égalités montrées plus haut, on trouve que :

$$|\langle \omega(x), x \rangle| = |\langle v(x), x \rangle| \leq \|x\| \times \|v(x)\| = \|x\| \times \|x\|.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{|\langle \omega(x), x \rangle| \leq \|x\|^2.}$$

Par linéarité à gauche du produit scalaire et d'après l'inégalité ci-dessus, on obtient que :

$$\langle x - \omega(x), x \rangle = \langle x, x \rangle - \langle \omega(x), x \rangle \geq \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\langle x - \omega(x), x \rangle \geq 0.}$$

- (c) Montrons que les valeurs propres de $I_n - W$ sont positives ou nulles. Pour ce faire, considérons une valeur propre λ de $I_n - W$. Alors λ est aussi valeur propre de l'endomorphisme $\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \omega$ canoniquement associé à $I_n - W$. Considérons un vecteur propre x de $\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \omega$ pour la valeur propre λ . Comme $x - \omega(x) = (\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - \omega)(x) = \lambda x$, on trouve par linéarité à gauche du produit scalaire que :

$$\langle x - \omega(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle.$$

Comme $\langle x - \omega(x), x \rangle \geq 0$ d'après la question précédente, on voit que :

$$\langle x - \omega(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \geq 0.$$

Mais comme x est un vecteur propre, il est non nul et donc $\langle x, x \rangle > 0$, d'où il s'ensuit que $\lambda \geq 0$. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } I_n - W \text{ sont positives ou nulles.}}$$

- (d) On note $W = (w_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Montrons que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $1 - w_{i,i} \geq 0$. Pour ce faire, on rappelle que $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme W est la matrice de ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on voit que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\omega(e_i) = \sum_{j=1}^n w_{j,i} e_j.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\langle e_i - \omega(e_i), e_i \rangle = \left\langle e_i - \sum_{j=1}^n w_{j,i} e_j, e_i \right\rangle = \langle e_i, e_i \rangle - \sum_{j=1}^n w_{j,i} \langle e_j, e_i \rangle.$$

Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, ceci entraîne que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\langle e_i - \omega(e_i), e_i \rangle = 1 - w_{i,i} - \sum_{j \neq i} w_{j,i} \times 0 = 1 - w_{i,i}.$$

Mais comme $\langle x - \omega(x), x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ d'après la question (4)(b) de la partie V, on voit en particulier que $\langle e_i - \omega(e_i), e_i \rangle \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par conséquent, on en déduit que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\boxed{1 - w_{i,i} \geq 0.}$$

- (e) Montrons que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $w_{i,i} = 1$ si et seulement si $W = I_n$. Pour ce faire, supposons que $W = I_n$. Alors il est clair que $w_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Dès lors, établissons la réciproque, et supposons que $w_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tous vecteurs x, y de $\mathbb{R}^n$, on obtient par linéarité de ω et par bilinéarité du produit scalaire que :

$$\begin{aligned} \langle x + y - \omega(x + y), x + y \rangle &= \langle x - \omega(x) + y - \omega(y), x + y \rangle \\ &= \langle x - \omega(x), x \rangle + \langle x - \omega(x), y \rangle + \langle y - \omega(y), x \rangle + \langle y - \omega(y), y \rangle. \end{aligned}$$

Comme la matrice W de ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est symétrique d'après la question (4)(a) de la partie V, la matrice $I_n - W$ de $\text{Id} - \omega$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est elle aussi symétrique. Dès lors, comme la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, l'endomorphisme $\text{Id} - \omega$ est symétrique pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, et le calcul précédent nous donne que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x + y - \omega(x + y), x + y \rangle = \langle x - \omega(x), x \rangle + 2\langle x - \omega(x), y \rangle + \langle y - \omega(y), y \rangle.$$

En particulier, si $x = e_i$ et $y = \lambda e_j$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par bilinéarité du produit scalaire que :

$$\langle e_i + \lambda e_j - \omega(e_i + \lambda e_j), e_i + \lambda e_j \rangle = \langle e_i - \omega(e_i), e_i \rangle + 2\lambda \langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle + \lambda^2 \langle e_j - \omega(e_j), e_j \rangle.$$

D'après les calculs de la question précédente, on voit que, pour tous indices i, j tels que $i \neq j$, on a $\langle e_i - \omega(e_i), e_i \rangle = 1 - w_{i,i} = 0$ et $\langle e_j - \omega(e_j), e_j \rangle = 1 - w_{j,j} = 0$. Dès lors, ceci entraîne que, pour tous indices i, j tels que $i \neq j$ et pour tout réel λ , on a :

$$\langle e_i + \lambda e_j - \omega(e_i + \lambda e_j), e_i + \lambda e_j \rangle = 2\lambda \langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle.$$

D'après la question (4)(b) de la partie V, ceci nous donne que, pour tous indices i, j tels que $i \neq j$ et pour tout réel λ :

$$\langle e_i + \lambda e_j - \omega(e_i + \lambda e_j), e_i + \lambda e_j \rangle = 2\lambda \langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle \geq 0.$$

Comme ceci est vrai pour tout réel λ , on trouve en choisissant $\lambda = -\langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle$ que, pour tous indices i, j tels que $i \neq j$:

$$-(\langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle)^2 \geq 0,$$

d'où il s'ensuit que $(\langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle)^2 \leq 0$, et donc $\langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle = 0$ (*).

A présent, comme W est la matrice de ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\omega(e_i) = \sum_{k=1}^n w_{k,i} e_k.$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$:

$$\langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle = \left\langle e_i - \sum_{k=1}^n w_{k,i} e_k, e_j \right\rangle = \langle e_i, e_j \rangle - \sum_{k=1}^n w_{k,i} \langle e_k, e_j \rangle.$$

Comme $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, ceci entraîne avec l'égalité (*) que, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \neq j$:

$$\langle e_i - \omega(e_i), e_j \rangle = 0 - w_{j,i} - \sum_{k \neq j} w_{k,i} \times 0 = -w_{j,i} = 0.$$

Mais comme ceci est vrai pour tous indices i, j tels que $i \neq j$, et que $w_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il s'ensuit que $W = I_n$. Par double implication, on en déduit que :

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_{i,i} = 1 \iff W = I_n.}$$

- (5) On conserve les notations des deux questions précédentes.

- (a) Montrons que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\langle I_n - V, D \rangle_2 = 2\langle I_n - W, D \rangle_2.$$

D'après l'identité de polarisation et par bilinéarité du produit scalaire, on trouve que :

$$\begin{aligned} \|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 &= \|D\|_2^2 + \|V\|_2^2 - 2\langle V, D \rangle_2 - \|D\|_2^2 - \|I_n\|_2^2 + 2\langle I_n, D \rangle_2 \\ &= \|V\|_2^2 - \|I_n\|_2^2 - 2\langle V, D \rangle_2 + 2\langle I_n, D \rangle_2 \\ &= \|V\|_2^2 - \|I_n\|_2^2 + 2\langle I_n - V, D \rangle_2. \end{aligned}$$

Comme V appartient à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on sait d'après la question (2) de la partie V que :

$$\|V\|_2 = \|V \times I_n\|_2 = \|I_n\|_2,$$

d'où il s'ensuit que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = \|V\|_2^2 - \|I_n\|_2^2 + 2\langle I_n - V, D \rangle_2 = 2\langle I_n - V, D \rangle_2. \quad (*)$$

Par ailleurs, comme la matrice W est symétrique d'après la question (4)(a) de la partie V, on trouve par définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ et par linéarité de la trace que :

$$\begin{aligned} \langle I_n - W, D \rangle_2 &= \text{Tr}({}^t(I_n - W)D) \\ &= \text{Tr}((I_n - W)D) \\ &= \text{Tr}\left(\left(I_n - \frac{1}{2}(V + {}^tV)\right)D\right) \\ &= \text{Tr}(I_n D) - \frac{1}{2}\text{Tr}(VD) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tVD). \end{aligned}$$

Comme la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux, elle ne change pas par transposition. De plus, comme D est diagonale par hypothèse, elle est symétrique. Dès lors, on obtient d'après les propriétés de la trace que :

$$\begin{aligned} \langle I_n - W, D \rangle_2 &= \text{Tr}(I_n D) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^t(VD)) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tVD) \\ &= \text{Tr}(I_n D) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tD{}^tV) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tVD) \\ &= \text{Tr}(I_n D) - \frac{1}{2}\text{Tr}(D{}^tV) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tVD) \\ &= \text{Tr}({}^tI_n D) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tVD) - \frac{1}{2}\text{Tr}({}^tVD) \\ &= \text{Tr}({}^tI_n D) - \text{Tr}({}^tVD) \\ &= \langle I_n, D \rangle_2 - \langle V, D \rangle_2. \end{aligned}$$

Par bilinéarité du produit scalaire, il s'ensuit que :

$$\langle I_n - W, D \rangle_2 = \langle I_n - V, D \rangle_2. \quad (**)$$

Par conséquent, on en déduit d'après (*) et (**) que :

$$\boxed{\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\langle I_n - V, D \rangle_2 = 2\langle I_n - W, D \rangle_2.}$$

(b) Montrons que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0.$$

D'après la question précédente, on sait que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2\langle I_n - W, D \rangle_2.$$

Posons alors $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. D'après la question (1)(a) de la partie II, on obtient que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\delta_{i,j} - w_{i,j}) d_{i,j}.$$

Comme D est diagonale, on voit que $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, et donc :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\delta_{i,i} - w_{i,i}) d_{i,i}.$$

Comme $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on constate que $\delta_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2 \sum_{i=1}^n (1 - w_{i,i}) d_{i,i}.$$

Dès lors, comme $1 - w_{i,i} \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ d'après la question (4)(d) de la partie V, et que $d_{i,i} \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par hypothèse, il s'ensuit que $\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2$ est une somme de produits de termes positifs. Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 \geq 0.}$$

(c) Montrons tout d'abord que :

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \left\| \sqrt{A^t A} - I_n \right\|_2.$$

D'après la question (3) de la partie V, on sait que :

$$d(A) = d(D) = \inf_{V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \|D - V\|_2.$$

D'après la question précédente, on voit que $\|D - V\|_2 \geq \|D - I_n\|_2$, et donc $\|D - I_n\|_2$ est un minorant de l'ensemble E_D défini à la question (1) de la partie V. Dès lors, comme I_n est une matrice orthogonale, le réel $\|D - I_n\|_2$ appartient à E_D , et donc $\|D - I_n\|_2$ est le plus grand minorant de E_D . Par conséquent, on en déduit par définition de D que :

$$d(A) = \|D - I_n\|_2 = \left\| \sqrt{A^t A} - I_n \right\|_2.$$

A présent, montrons que I_n est l'unique élément V de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $d(A) = \|D - V\|_2$. Pour ce faire, considérons un élément V de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $d(A) = \|D - V\|_2$. D'après ce qui précède, on a :

$$d(A) = d(D) = \|D - I_n\|_2 = \|D - V\|_2.$$

D'après les calculs de la question précédente, ceci entraîne que :

$$\|D - V\|_2^2 - \|D - I_n\|_2^2 = 2 \sum_{i=1}^n (1 - w_{i,i}) d_{i,i} = 0.$$

Comme une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes en question sont nuls, on obtient que $(1 - w_{i,i}) d_{i,i} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme tous les coefficients diagonaux $d_{i,i}$ de D sont strictement positifs par hypothèse, ceci entraîne que $1 - w_{i,i} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et donc on a $w_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la question (4)(e) de la partie V, on constate que $W = I_n$. D'après la question (5)(a) de la partie V (dont le résultat est valable pour toute matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs), on obtient en remplaçant D par I_n que :

$$\|I_n - V\|_2^2 = \|I_n - V\|_2^2 - \|I_n - I_n\|_2^2 = 2\langle I_n - W, I_n \rangle_2 = 2\langle I_n - I_n, I_n \rangle_2 = 2\langle 0, I_n \rangle_2 = 0,$$

d'où il s'ensuit que $I_n - V = 0$ d'après le caractère défini du produit scalaire, et donc $V = I_n$. Quant à la réciproque, elle est évidente d'après la première partie de cette question. Par conséquent, on en déduit que :

$$I_n \text{ est l'unique élément } V \text{ de } \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } d(A) = \|D - V\|_2.$$