

TRAVAUX DIRIGÉS : CONVERGENCES ET APPROXIMATIONS

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$, et posons $Y_n = \inf\{X_1, \dots, X_n\}$. Montrer que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine nulle.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. On suppose que toutes ces variables aléatoires admettent une variance, et que de plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = E(X) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n - X) = 0.$$

A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que (X_n) converge en probabilité vers X .

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes et de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et :

$$S_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}.$$

- (1) Déterminer la loi de Y_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) Calculer la covariance de (Y_n, Y_m) pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \neq m$.
- (3) Les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes? Justifier.
- (4) Montrer que (S_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à p^2 .

Exercice 4. Soit b un réel > 0 , et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant pour densité la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-b)} & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{si } x < b \end{cases}.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \inf\{X_1, \dots, X_n\}$.

- (1) Justifier que f est bien une densité de probabilité.
- (2) Etudier la convergence en loi de la suite (M_n) .
- (3) Etudier la convergence en probabilité de la suite (M_n) .

Exercice 5. (QSP HEC 2008) Soit θ un réel > 0 . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $n\theta$.

- (1) Montrer que la suite $\left(\frac{X_n - n\theta}{n}\right)$ converge en probabilité vers la variable nulle.
- (2) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\theta} \sum_{k \leq nx} \frac{(n\theta)^k}{k!}$ pour tout $x \neq \theta$.
- (3) A l'aide du théorème limite central, établir l'existence et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\theta} \sum_{k \leq n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!}$.

Exercice 6. (QSP HEC 2011) Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, \theta]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \max\{U_1, \dots, U_n\}$.

- (1) Prouver que la suite (X_n) converge en probabilité vers θ .
- (2) Etudier la convergence en loi de $Y_n = n(\theta - X_n)$.

Exercice 7. (QSP HEC 2015) Soit $p \in]0, 1[$ et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $M_n = \frac{1}{n} S_n$.

- (1) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(e^{M_n})$.
- (2) Etudier la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires $(e^{M_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire à densité ne prenant que des valeurs ≥ 0 , et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de variables aléatoires définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $X_n = \frac{\lfloor nX \rfloor}{n}$. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X .

Exercice 9. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket -1, +\infty \rrbracket$, dont la loi est donnée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall k \in \llbracket -1, +\infty \rrbracket, \quad P([X_n = k]) = \frac{1}{e(k+1)!}.$$

- (1) Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) Etudier la convergence en probabilité de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}$.
- (3) A l'aide du théorème limite central, montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P([S_n \leq 0]) = \frac{1}{2}$.

Exercice 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = (n+1)(1-x)^n$ si $x \in [0, 1]$, et $f_n(x) = 0$ sinon.

- (1) Vérifier que f_n est une densité de probabilité.
- (2) Calculer la fonction de répartition de $Y_n = nX_n$, où X_n est une variable aléatoire de densité f_n .
- (3) Montrer que (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.

Exercice 11. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur $]0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$X_n = \prod_{i=1}^n U_i^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad Y_n = (eX_n)^{\sqrt{n}}.$$

- (1) Déterminer la loi de $-\ln(U_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
- (2) Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable certaine que l'on déterminera
- (3) Montrer que la suite $(\ln(Y_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 12. (ESCP 2017) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que Y_k suit la loi exponentielle de paramètre $k\alpha$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et on note g_n une densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (1) (a) Déterminer une densité g_2 de Z_2 .
 (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $g_n(x) = n\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{n-1}$.
 (c) Exprimer l'espérance de Z_n sous la forme d'une somme, et en donner un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ (*indication : on admet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$*).
 (d) Exprimer la variance de Z_n sous la forme d'une somme, et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$.
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $U_n = \frac{1}{n}Z_n$.
 (a) Déterminer la fonction de répartition de H_n de U_n .
 (b) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en loi et déterminer la loi limite.
 (c) Montrer que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire que l'on précisera.
 (d) Déterminer la limite des suites $(E(U_n))_{n \geq 1}$ et $(V(U_n))_{n \geq 1}$.

Exercice 13. (Inégalité de Cantelli - QSP HEC 2023) Soit X une variable aléatoire centrée admettant une variance égale à σ^2 .

- (1) Montrer que : $\forall a, b > 0, P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$.
- (2) En déduire que : $\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(25)$. Calculer des valeurs approchées de $P([X > 25])$ et $P([X \leq 30])$ (*note : $\Phi(1) \simeq 0,8413$*).

Exercice 15. Un étudiant se trompe en moyenne à une question sur 2 dans un DS. Donner une valeur approchée de la probabilité de faire au plus 15 erreurs dans un DS comportant 36 questions (*note : $\Phi(1) \simeq 0,8413$*).

Exercice 16. Soient $X_1, \dots, X_{100}$ des variables aléatoires indépendantes admettant une espérance commune $m = 1$ et une variance commune $\sigma^2 = \frac{1}{2}$, et posons $S = \frac{1}{100}(X_1 + \dots + X_{100})$. Calculer une valeur approchée de $P([S \leq 1, 10])$ (*note : $\Phi(\sqrt{2}) \simeq 0,9310$*).

1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 17. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires admettant toutes une espérance et une variance. On suppose qu'il existe un réel m tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X_n) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V(X_n) = 0.$$

- (1) A l'aide de l'inégalité de Markov, montrer que : $\forall \varepsilon > 0, P(|X_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_n) + (E(X_n) - m)^2}{\varepsilon^2}$.
- (2) En déduire que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m .
- (3) Dans cette question, on suppose que X_n suit la loi géométrique de paramètre $\frac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la convergence en probabilité de la suite (e^{X_n}) .

Exercice 18. (Convergence presque sûre) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. On suppose que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X , c'est-à-dire :

$$P(A) = 1, \quad \text{où} \quad A = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \right\}.$$

- (1) Soit $\varepsilon > 0$ et posons $B_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} [|X_k - X| \leq \varepsilon]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $A \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.
- (2) A l'aide de la propriété de limite monotone, déterminer la limite de la suite $(P(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
- (3) En déduire que (X_n) converge en probabilité vers X .

Exercice 19. (Convergence en moyenne) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers X s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|X_n - X|$ admet une espérance et si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X_n - X|) = 0.$$

- (1) Montrer que, si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en moyenne vers X , alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X .
- (2) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Poisson indépendantes de même paramètre $\lambda \geq 1$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = X_1 \dots X_n$.
 - (a) Calculer $P([Y_n \neq 0])$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (b) En déduire que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle.
 - (c) Calculer $E(Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en moyenne.

Exercice 20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

- (1) Montrer que f est une densité de probabilité.
- (2) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de densité f . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $T_n = ne^{-M_n}$.
 - (a) Montrer que X_1 admet une espérance et une variance, puis calculer $E(X_1)$.
 - (b) Etablir que la suite $(\bar{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire nulle.
 - (c) Déterminer la fonction de répartition de M_n .
 - (d) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi.

Exercice 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$ et $J_n = \frac{2^n}{(n-1)!} \int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1} e^{-2x} dx$.

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de l'intégrale I_n et calculer sa valeur en fonction de n .
- (2) Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1, et l'on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $T_n = \sum_{k=1}^n X_k^2$.
 - (a) Donner la loi de la variable aléatoire S_n .
 - (b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $J_n = P([S_n \geq n + \sqrt{n}])$.
 - (c) En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.
 - (d) Etudier la convergence en probabilité de la suite $(T_n/n)_{n \geq 1}$.

Exercice 22. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\int_0^x e^{-t^2/2} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right).$$

Exercice 23. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Exercice 24. (QSP HEC 2019) Soit X une variable aléatoire admettant une espérance m et une variance v . Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On dit que la loi de X est *stable* si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe des réels a_n, b_n avec $a_n > 0$ tels que les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_n$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi.

- (1) Montrer que, si $v = 0$, alors la loi de X est stable.
- (2) On suppose désormais que $v > 0$. Déterminer la loi de X (*indication : utiliser le théorème limite central*).

Exercice 25. (ESCP 2021) Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit α un réel > 0 et soit f_α la fonction définie par :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}.$$

On admet sans démonstration le résultat suivant : une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers une variable certaine λ si et seulement si elle converge en loi vers λ .

- (1) Montrer que f_α est une densité de probabilité.
- (2) Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_α pour un certain réel $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α la variable aléatoire X admet-elle une espérance? Calculer $E(X)$ dans ce cas. Pour quelles valeurs de α la variable aléatoire X admet-elle une variance?

Pour la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]1, +\infty[$ et toutes à densité, de densité f_α avec $\alpha > 2$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

- (3) Etudier la convergence en probabilité de la suite $(\overline{X_n})_{n \geq 1}$.
- (4) Soit $g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(u) = \frac{u}{u-1}$.
 - (a) Etudier les variations de la fonction g sur $]1, +\infty[$ et décrire l'ensemble $g(]1, +\infty[)$. Après avoir justifié son existence, calculer $g(g(u))$ pour tout $u > 1$. Montrer ensuite que g admet une bijection réciproque que l'on calculera. Enfin, montrer que l'expression $g(E(X_1))$ est bien définie et calculer sa valeur en fonction de α .
 - (b) On admet que $g(\overline{X_n})$ est une variable aléatoire. Montrer qu'elle est à valeurs dans $]1, +\infty[$.
 - (c) Soit u un réel tel que $1 < u < g(E(X_1))$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{X_n} < g(u)) = 1$.
 - (d) Soit u un réel tel que $g(E(X_1)) < u$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{X_n} < g(u)) = 0$.
 - (e) Montrer que $(g(\overline{X_n}))_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable certaine $g(E(X_1))$.

Exercice 26. (HEC 2023)

- (1) Question de cours : convergence en probabilité et convergence en loi.
- (2) Soit $(m_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels convergeant vers un réel m , soit $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers un réel $\sigma > 0$ et soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que X_n suit la loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
- (3) Montrer l'existence d'une constante réelle γ telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance m et d'écart-type σ . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{k}.$$

- (4) Etablir que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m .
- (5) On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et on suppose dans cette question que la loi commune des Y_n est une loi normale. Etudier la convergence en loi de la suite $(\ln(n)(H_n - m))_{n \geq 1}$.