

TRAVAUX DIRIGÉS : CONVERGENCES ET APPROXIMATIONS

RÉPONSES - INDICATIONS

Exercice 1. Calculer $F_{Y_n}(x)$, puis $P(|Y_n| > \varepsilon)$ et conclure.

Exercice 2. Appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X_n - X)^2$, en partant du fait que $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = P((X_n - X)^2 \geq \varepsilon^2)$, puis conclure.

Exercice 3.

- (1) On trouve que : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$.
- (2) Vérifier que $\text{cov}(Y_n, Y_m) = p^3 q$ si $|n - m| = 1$ et $\text{cov}(Y_n, Y_m) = 0$ si $|n - m| \geq 2$.
- (3) Montrer que Y_n et Y_m sont indépendantes si et seulement si $|n - m| \geq 2$.
- (4) Calculer $V(S_n)$ et conclure avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 4.

- (1) A faire!
- (2) Utiliser le calcul de $F_{M_n}(x)$ pour montrer que (M_n) converge en loi vers b .
- (3) Montrer que (M_n) converge en probabilité vers b .

Exercice 5.

- (1) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- (2) A l'aide de la question précédente, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\theta} \sum_{k \leq nx} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}.$$

- (3) A l'aide du théorème limite central, on obtient que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n\theta} \sum_{k \leq n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 6.

- (1) Calculer $F_{X_n}(x)$, puis conclure.
- (2) On trouve que (Y_n) converge en loi vers Y , où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1/\theta)$.

Exercice 7.

- (1) Par transfert et stabilité par addition de la loi binomiale, on trouve que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(e^{M_n}) = e^p$.
- (2) Utiliser la loi faible des grands nombres pour montrer que (e^{M_n}) converge en probabilité vers e^p .

Exercice 8. Montrer que $F_{X_n}(x) = F_X\left(\frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}\right)$, puis faire un passage à la limite.

Exercice 9.

- (1) Vérifier que $X_n + 1 \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$. En déduire par stabilité par addition de la loi de Poisson que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P([S_n = k]) = \frac{e^{-n} n^{n+k}}{(k+n)!}.$$

- (2) Utiliser la loi faible des grands nombres pour montrer que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.
- (3) Suivre l'indication donnée!

Exercice 10.

- (1) A faire!
- (2) On trouve que : $F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}.$

- (3) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(x)$.

Exercice 11.

- (1) Vérifier que $-\ln(U_i) \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
 (2) Utiliser la loi faible des grands nombres pour montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} e^{1/2}$.
 (3) Utiliser le théorème central limite pour montrer que $\ln(Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, où $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 12.

- (1) (a) A l'aide du produit de convolution, on trouve que :

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- (b) A démontrer par récurrence à l'aide du produit de convolution.

(c) On trouve que $E(Z_n) = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $E(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\alpha}$.

(d) On trouve que $V(Z_n) = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $V(Z_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

(2) (a) On trouve que : $F_{H_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-\alpha n x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$

- (b) Vérifier que $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers 0.

- (c) Etablir que $(U_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

- (d) On trouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(U_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(U_n) = 0$.

Exercice 13.

- (1) Utiliser l'inégalité de Markov en partant du fait que, pour tout $b > 0$:

$$P(X \geq a) = P(X + b \geq a + b) \leq P((X + b)^2 \geq (a + b)^2).$$

- (2) La fonction $f : b \mapsto \frac{\sigma^2 + b^2}{(a + b)^2}$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\sigma^2}{a}\right]$, croissante sur $\left[\frac{\sigma^2}{a}, +\infty\right[$ et elle admet donc un minimum atteint en $\frac{\sigma^2}{a}$. Il suffit alors de calculer ce minimum pour conclure.

Exercice 14. On trouve que $P([X > 25]) = \Phi(0) = 0,5$ et $P([X \leq 30]) = \Phi(1) \simeq 0,8413$.

Exercice 15. Si X est le nombre d'erreurs dans un DS, alors $P(X \leq 15) = 1 - \Phi(1) \simeq 0,1587$.

Exercice 16. On trouve que $P(S \leq 1, 1) = P(S^* \leq \sqrt{2}) = \Phi(\sqrt{2}) \simeq 0,9310$.

1. EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 17.

- (1) Appliquer l'inégalité de Markov à $(X_n - m)^2$ et à ε^2 .
 (2) A faire avec la question précédente!
 (3) A l'aide de la question (2), montrer que (X_n) converge en probabilité vers 1. Par composition avec l'exponentielle, en déduire que $(\exp(X_n))$ converge en probabilité vers e .

Exercice 18.

- (1) On commence par écrire que :

$$\omega \in A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, |X - X_n|(\omega) \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon > 0$, ceci nous donne que :

$$\omega \in A \implies \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n, |X - X_n|(\omega) \leq \varepsilon$$

$$\implies \omega \text{ appartient à } B_n \text{ pour un certain } n$$

$$\implies \omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n.$$

On en déduit que $A \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

- (2) La suite (B_n) d'événements est croissante pour l'inclusion, et de plus $P(A) = 1$. D'après la propriété de limite monotone, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 1$.
- (3) Vérifier que $0 \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq P(\overline{B_n})$ et conclure par encadrement.

Exercice 19.

- (1) Utiliser l'inégalité de Markov.
- (2) (a) On trouve que $P(Y_n \neq 0) = (1 - e^{-\lambda})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Pour tout $\varepsilon > 0$, on constate que $0 \leq P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) \leq P(Y_n \neq 0)$. Conclure par encadrement.
- (c) On trouve que $E(Y_n) = \lambda^n = E(|Y_n|)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc (Y_n) ne converge pas en moyenne vers 0. Conclure avec la question (1) que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas en moyenne de façon générale.

Exercice 20.

- (1) A faire!
- (2) (a) Vérifier par négligeabilité que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge, et en déduire par transfert que X_1 admet une espérance et une variance. Par imparité de l'intégrande, on trouve que :

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = 0.$$

- (b) Utiliser la loi faible des grands nombres et la question précédente!
- (c) On trouve que $F_{M_n}(x) = \frac{1}{(1 + e^{-x})^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (d) Vérifier tout d'abord que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_{T_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{(1 + \frac{x}{n})^n} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Par passage à la limite, en déduire que (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire T , où T suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 21.

- (1) L'intégrale I_n converge comme valeur de la fonction Γ d'Euler, et de plus $I_n = \Gamma(n) = (n-1)!$.
- (2) (a) On voit que $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.
- (b) Effectuer le changement de variable $u = 2x$!
- (c) A l'aide du théorème limite central, on trouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \geq 1\right) = 1 - \Phi(1).$$

- (d) Vérifier avec la loi faible des grands nombres que la suite $(T_n/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 2.

Exercice 22.

Si X est une variable normale centrée réduite, alors on a pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt = P(0 \leq X \leq x) = \frac{1}{2} - P(X \geq x).$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on trouve que, pour tout $x > 0$:

$$P(X \geq x) = \frac{1}{2} P(|X - 0| \geq x) \leq \frac{1}{2x^2}.$$

Conclure avec les deux relations ci-dessus.

Exercice 23.

Vérifier que Y_n admet une espérance et une variance, puis que $E(Y_n) = 0$ et $V(Y_n) = \frac{n+1}{2n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et conclure avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 24.

- (1) Vérifier que, si $v = 0$, alors les constantes $a_n = 1$ et $b_n = (n-1)m$ conviennent!

- (2) On suppose désormais que $v > 0$. En calculant l'espérance et la variance de $X_1 + \dots + X_n$ et $a_n X + b_n$ (lesquelles doivent être égales car ces deux variables aléatoires suivent la même loi), on trouve que :

$$a_n m + b_n = nm \quad \text{et} \quad a_n^2 v = nv.$$

Comme $v > 0$, il s'ensuit que $a_n = \sqrt{n}$ et $b_n = (n - \sqrt{n})m$. En particulier, on obtient que :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sqrt{nv}} \quad \text{et} \quad \frac{X - m}{\sqrt{v}}$$

suivent la même loi. D'après le théorème limite central, il s'ensuit que $\frac{X-m}{\sqrt{v}}$ suit la loi normale centrée réduite, et donc X suit la loi $\mathcal{N}(m, v)$.

Exercice 25.

- (1) A faire!
- (2) Vérifier que X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas on a $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$. De plus, on peut montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.
- (3) A l'aide de la loi faible des grands nombres, vérifier que $\overline{X}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} E(X_1) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.
- (4) Soit $g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(u) = \frac{u}{u - 1}$.
- (a) La fonction g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et de plus, on a $g(]1, +\infty[) =]1, +\infty[$. On trouve aussi que $g(g(u)) = u$ pour tout $u > 1$. Dès lors, g est sa propre bijection réciproque! Enfin, vérifier avec ce qui précède que l'expression $g(E(X_1))$ est bien définie et égale à α .
- (b) Utiliser le fait que g est à valeurs dans $]1, +\infty[$ d'après la question précédente!
- (c) Soit u un réel tel que $1 < u < g(E(X_1))$. Comme $g = g^{-1}$ est une bijection strictement décroissante de $]1, +\infty[$ dans lui-même, on voit que $E(X_1) < g(u)$. Fixons un réel $\varepsilon > 0$ tel que $E(X_1) + \varepsilon < g(u)$. Par croissance des probabilités, on trouve que :

$$F_{\overline{X}_n}(E(X_1) + \varepsilon) = P(\overline{X}_n \leq E(X_1) + \varepsilon) \leq P(\overline{X}_n \leq u) \leq 1.$$

Comme $(\overline{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $E(X_1)$, elle converge aussi en loi vers $E(X_1)$ d'après ce qui précède. Dès lors, comme $E(X_1)$ est une constante, sa fonction de répartition est continue en $E(X_1) + \varepsilon$ car $\varepsilon > 0$, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\overline{X}_n}(E(X_1) + \varepsilon) = F_{E(X_1)}(E(X_1) + \varepsilon) = 1.$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{X}_n < g(u)) = 1$.

- (d) Soit u un réel tel que $g(E(X_1)) < u$. Comme $g = g^{-1}$ est une bijection strictement décroissante de $]1, +\infty[$ dans lui-même, on voit que $E(X_1) > g(u)$. Par croissance des probabilités, on trouve que :

$$0 \leq P(\overline{X}_n < u) \leq P(\overline{X}_n \leq u) = F_{\overline{X}_n}(g(u)).$$

Comme $(\overline{X}_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $E(X_1)$, elle converge aussi en loi vers $E(X_1)$ d'après ce qui précède. Dès lors, comme $E(X_1)$ est une constante, sa fonction de répartition est continue en $g(u)$ car $g(u) < E(X_1)$, et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{\overline{X}_n}(g(u)) = F_{E(X_1)}(g(u)) = 0.$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{X}_n < g(u)) = 0$.

- (e) Montrons que $(g(\overline{X}_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable certaine $g(E(X_1))$. Si $u \leq 1$, alors on voit que $P(g(\overline{X}_n) \leq u) = 0 = F_{g(E(X_1))}(u)$ car $g(\overline{X}_n)$ est à valeurs dans $]1, +\infty[$. Supposons maintenant que $1 < u < g(E(X_1))$. Comme $g = g^{-1}$ est une bijection strictement décroissante de $]1, +\infty[$ dans lui-même, on trouve que :

$$F_{g(\overline{X}_n)}(u) = P(g(\overline{X}_n) \leq u) = P(\overline{X}_n \geq g(u)) = 1 - P(\overline{X}_n < g(u)).$$

D'après la question (3)(c), il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{g(\overline{X}_n)}(u) = 1 - 1 = 0 = F_{g(E(X_1))}(u).$$

Supposons enfin que $g(E(X_1)) < u$. Comme $g = g^{-1}$ est une bijection strictement décroissante de $]1, +\infty[$ dans lui-même, on trouve que :

$$F_{g(\overline{X}_n)}(u) = P(g(\overline{X}_n) \leq u) = P(\overline{X}_n \geq g(u)) = 1 - P(\overline{X}_n < g(u)).$$

D'après la question (3)(d), il s'ensuit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{g(\overline{X}_n)}(u) = 1 - 0 = 1 = F_{g(E(X_1))}(u).$$

Par conséquent, on en déduit qu'en tout point de continuité u de $F_{g(E(X_1))}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{g(\overline{X_n})}(u) = F_{g(E(X_1))}(u),$$

et donc $(g(\overline{X_n}))_{n \geq 1}$ converge en loi vers la variable certaine $g(E(X_1))$.

Exercice 26.

(1) Cf. cours!

(2) Comme X_n suit la loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit que $\frac{X_n - m_n}{\sigma_n}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ par changement d'échelle pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, ceci nous donne que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = P\left(\frac{X_n - m_n}{\sigma_n} \leq \frac{x - m_n}{\sigma_n}\right) = \Phi\left(\frac{x - m_n}{\sigma_n}\right).$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Comme $\frac{X - m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ par changement d'échelle et que Φ est continue sur $\mathbb{R}$, on obtient par passage à la limite que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{X_n}(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{x - m}{\sigma}\right) = P(X \leq x) = F_X(x).$$

On en déduit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

(3) On pose $u = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuer un DL à l'ordre 2 sur $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la série télescopique $\sum u_{n+1} - u_n$ converge, et donc que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. Si γ est la limite de cette suite, il s'ensuit que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$, et donc :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

(4) Vérifier avec la linéarité de l'espérance que :

$$E(H_n) = \frac{m}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

A l'aide de la question précédente, on trouve alors que :

$$E(H_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} m.$$

A l'aide du lemme des coalitions, on voit que les variables aléatoires Y_k/k sont indépendantes. D'après les propriétés de la variance, on obtient que :

$$V(H_n) = \frac{1}{\ln^2(n+1)} \sum_{k=1}^n V\left(\frac{Y_k}{k}\right) = \frac{\sigma^2}{\ln^2(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, il s'ensuit que :

$$V(H_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En appliquant l'inégalité de Markov à $(H_n - m)^2$ et à ε^2 , on obtient que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P(|H_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(H_n) + (E(H_n) - m)^2}{\varepsilon^2}.$$

Il s'ensuit par encadrement que $P(|H_n - m| \geq \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers m .

(5) Comme la loi commune des Y_n est une loi normale et qu'elles ont toutes m et σ^2 comme espérance et variance, on voit qu'elles suivent toutes la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Dès lors, on obtient en utilisant le lemme des coalitions, le changement d'échelle et la stabilité par addition de la loi normale que :

$$H_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{m}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \frac{\sigma^2}{\ln^2(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right).$$

Toujours par changement d'échelle, ceci nous donne que :

$$\ln(n)(H_n - m) \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m \ln(n) \left(\frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1\right), \frac{\sigma^2 \ln^2(n)}{\ln^2(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)$$

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$m_n = m \ln(n) \left(\frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1\right) \quad \text{et} \quad \sigma_n = \frac{\sigma^2 \ln^2(n)}{\ln^2(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

A l'aide de la question (3), on vérifie alors que :

$$\frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\gamma}{\ln(n)} + o\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = m\gamma$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \frac{\sigma^2 \pi^2}{6}$. Par conséquent, on en déduit avec la question (1) que la suite $(\ln(n)(H_n - m))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z , où :

$$Z \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m\gamma, \frac{\sigma^2 \pi^2}{6}\right).$$