

Programme de colles en Mathématiques
ECG 2 (semaine 21 : 23 mars 2026)

La colle débutera soit par une démonstration d'un résultat de cours (indiqué par un astérisque), soit par un exercice de début de colle. Le programme portera sur la recherche d'extrema, ainsi que les convergences et approximations en probabilités, et plus particulièrement sur les points suivants:

(1) **Recherche d'extrema des fonctions de plusieurs variables:**

Définition d'un maximum/minimum local, d'un extremum local.

Définition d'un maximum/minimum global, d'un extremum global.

"Toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes".

Définition d'un point critique pour une fonction f d'un ouvert U de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

"Si f est \mathcal{C}^1 sur U et admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f ".

Nature d'un point critique a de f en fonction du signe des valeurs propres de sa hessienne en a ou du signe de la forme quadratique q_a associée à la hessienne en a - Notion de point-selle (ou col).

Définition d'une partie convexe de \mathbb{R}^n - Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour une fonction de plusieurs variables.

Définition d'un ensemble de contraintes linéaires.

Définition d'un extremum local/global d'une fonction f sous contrainte linéaire.

Définition d'un point critique d'une fonction f sous contrainte linéaire.

Caractérisations des points critiques de f sous contrainte linéaire.

(2) **Convergences et approximations:**

Définition de la convergence en probabilité d'une suite (X_n) de variables aléatoires.

Inégalité de Markov : démonstration pour les variables aléatoires discrètes (*) et pour les variables aléatoires à densité (*) - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).

Loi faible des grands nombres (*) - Théorème d'or de Bernoulli.

"Si (X_n) converge en probabilité vers X et si (Y_n) converge en probabilité vers Y , alors $(X_n + Y_n)$ converge en probabilité vers $X + Y$ ".

"Si (X_n) converge en probabilité vers X et si f est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors $(f(X_n))$ converge en probabilité vers $f(X)$ ".

Définition de la convergence en loi d'une suite (X_n) de variables aléatoires.

Cas particulier des variables aléatoires à valeurs entières.

"Si X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ".

"Si (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et si f est continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors (X_n) converge en loi vers $f(X)$ ".

Théorème central limite - Approximations des lois binomiale et de Poisson par la loi normale.

Exercices de début de colle:

Exercice 1. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ par :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x + y}.$$

- (1) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, et donner son gradient et sa hessienne sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- (2) Montrer que f admet un extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ que l'on déterminera.

Exercice 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x^2(1 + y)^3 + 7y^2$.

- (1) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , et calculer son gradient et sa hessienne sur \mathbb{R}^2 .
- (2) Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.
- (3) Montrer que f présente un minimum local en A .

Exercice 3. Pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^3$, on pose $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

- (1) Déterminer les points critiques de f . La fonction f admet-elle des extrema locaux? globaux?
- (2) Déterminer l'unique point critique A de f sous la contrainte $x + y + z = 1$.