

PRÉPARATION AUX ORAUX DE MATHÉMATIQUES : ANALYSE

Exercice 1. (ESCP 2019) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose : $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{x+k}$.

- (1) Montrer que la suites $(S_{2n}(x))$ et (S_{2n+1}) sont adjacentes. On note $f(x)$ leur limite commune.
 (2) (a) Soit a un réel > 0 . Montrer que, pour tous $x, x_0 \geq a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{k=0}^n \frac{1}{(a+k)^2}.$$

- (b) En déduire que la fonction f est continue sur \mathbb{R}_+^* .
 (3) Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .
 (4) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ (indication : penser aux séries géométriques).

Exercice 2. (ESCP 2019) On rappelle que l'application $(g, h) \mapsto \int_a^b g(t)h(t)dt$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. On note E l'espace vectoriel des fonctions f définies sur $[0, 1]$, à valeurs réelles, de classe \mathcal{C}^2 et telles que $f(0) = 0$.

- (1) Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(y)dy \right|.$$

- (2) Soit $f \in E$. Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f(x)^2 \leq x \left(\int_0^1 (f')^2(y)dy \right).$$

- (3) Soit $f \in E$. En déduire que :

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (f')^2(y)dy \right).$$

- (4) Montrer que l'inégalité précédente peut être fautive si l'on retire l'hypothèse " $f(0) = 0$ ".
 (5) Soit λ un réel < 2 . A l'aide des questions précédentes, montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ non nulle telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad -f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Exercice 3. (ESCP 2019) Soit f une fonction définie et continue sur le segment $[0, 1]$ à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme $B_n(f)$ par :

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

- (1) Soit $x \in]0, 1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes X_1, \dots, X_n , suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre x , et l'on pose :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

- (a) Exprimer $E(\bar{X}_n)$, $V(\bar{X}_n)$ et $E(f(\bar{X}_n))$ en fonction de x , n et du polynôme $B_n(f)$.
 (b) En déduire l'encadrement suivant :

$$\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sqrt{V(\bar{X}_n)} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

- (2) Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leq 1$.
 (a) Montrer que, pour tout réel $\lambda \geq 0$, on a : $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$.
 (b) Pour tous $x \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, établir l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\frac{\alpha}{2}} \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right).$$

(3) On suppose qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $K > 0$ tels que :

$$\forall (y, z) \in [0, 1]^2, \quad |f(y) - f(z)| \leq K|y - z|^\alpha.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{3K}{2n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Exercice 4. (ESCP 2021) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n dx$.

- (1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est bien définie.
- (2) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et positive.
Que peut-on en déduire sur la nature de la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ et sur sa limite éventuelle l ?
- (3) Calculer $I_n + I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de l .
- (4) Déduire de la question précédente que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2p} = (-1)^p \left(I_0 + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{2k-1} \right).$$

Trouver une expression semblable de I_{2p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- (5) En déduire que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et donner sa somme.

Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ converge et préciser sa somme.

- (6) La série $\sum_{n \geq 0} I_n$ est-elle convergente? Justifier (*indication : utiliser la question (3)*).

Exercice 5. (ESCP 2021) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute variable aléatoire Z définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui prend n valeurs réelles distinctes z_1, \dots, z_n avec des probabilités respectives $p_1, \dots, p_n > 0$, on définit l'entropie de Z par :

$$H(Z) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k).$$

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in]0, 1[^n$, on pose : $h_n(x) = h_n(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k)$.

- (1) Calculer l'entropie d'une variable aléatoire U qui suit la loi uniforme sur un ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$.
- (2) Justifier que la fonction h_n est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $]0, 1[^n$ et calculer son gradient et sa hessienne en tout point x de $]0, 1[^n$.
- (3) Montrer que la fonction h_n admet un unique point critique noté x^* sous la contrainte $\mathcal{C} : x_1 + \dots + x_n = 1$ que l'on déterminera.
- (4) Fixons $x \in]0, 1[^n$ tel que $x_1 + \dots + x_n = 1$ et notons $u = x - x^*$.
 - (a) Vérifier que, pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $x^* + tu \in]0, 1[^n$.
Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $\psi(t) = h_n(x^* + tu)$.
 - (b) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 pour ψ entre 0 et 1, montrer que h_n admet en x^* un maximum global sous la contrainte $\mathcal{C} : x_1 + \dots + x_n = 1$. Ce maximum est-il atteint en d'autres points que x^* ? Justifier.
- (5) Parmi les variables aléatoires prenant n valeurs avec des probabilités non nulles, quelles sont les lois de celles qui ont la plus grande entropie?

Exercice 6. (ESCP 2021) Dans tout l'exercice, α est un réel > 0 . On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

- (1) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $I(\alpha, x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xt^\alpha) dt$ converge.
- (b) A l'aide du changement de variable $u = xt^\alpha$ dont on justifiera la validité, montrer que :

$$I(\alpha, x) = Cx^{-1/\alpha},$$

où C est une constante > 0 que l'on déterminera en fonction de α .

- (2) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, la série de terme général $\exp(-xn^\alpha)$ est convergente. On pose alors pour tout $x > 0$:

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-xn^\alpha).$$

- (b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} S_\alpha(x)$.
- (3) (a) Etablir pour tout $x > 0$ l'encadrement : $S_\alpha(x) - 1 \leq I(\alpha, x) \leq S_\alpha(x)$.
- (b) Montrer qu'au voisinage de 0, on a : $S_\alpha(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} I(\alpha, x)$.

Exercice 7. (ESCP 2022) Soit $a > 0$ et soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Pour tout réel λ , on pose :

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt.$$

- (1) Soient λ, μ deux réels tels que $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Montrer que $\lambda = \mu$.
- (2) Pour tout réel x , on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$, et on suppose que H_λ est bornée sur \mathbb{R} .
Montrer que $I(\lambda)$ existe.
- (3) Soit T un réel > 0 . Dans cette question, on suppose que la fonction f est T -périodique.
- (a) Montrer qu'il existe un réel λ_0 pour lequel la fonction H_{λ_0} est elle aussi T -périodique.
- (b) En déduire qu'il existe une unique valeur λ pour laquelle $I(\lambda)$ existe.
- (4) Déterminer un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\int_1^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.

Exercice 8. (ESCP 2022) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : x \mapsto xe^{-x}$. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose :

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - f(x + y).$$

- (1) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et exprimer, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, les dérivées partielles premières de F en fonction de $f'(x), f'(y), f'(x + y)$.
- (2) Etablir que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $f'(x) = f'(a)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet au plus une solution distincte de a .
- (3) En déduire que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, (x, y) est un point critique de F si et seulement si $x = y$ et $f'(x) = f'(2x)$.
- (4) Montrer que F admet un unique point critique, noté (α, α) , et montrer que $1 < \alpha < 2$.
- (5) Etablir que $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.
- (6) Montrer que F admet un extremum local. Déterminer la nature de cet extremum local.

Exercice 9. (ESCP 2022) Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $f \in E$, on définit la norme infinie de f sur $[0, 1]$ par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

- (1) Soit φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = F$ avec $F' = f$ et $\int_0^1 F(t) dt = 0$. Montrer que φ est bien définie, puis que φ est un endomorphisme de E .
- (2) (a) Justifier que l'ensemble :

$$A = \left\{ \frac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}, f \in E \setminus \{0\} \right\}$$

est non vide et majoré. On note M sa borne supérieure.

- (b) Soit $f \in E$, $F = \varphi(f)$ et G la primitive de F sur \mathbb{R} qui s'annule en 0. Pour tout $x \in [0, 1]$, exprimer $G(0)$ et $G(1)$ en fonction de $G(x), G'(x), G''(x)$ à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|F(x)| \leq \left[\frac{(1-x)^2 + x^2}{2} \right] \|f\|_\infty.$$

- (c) Déterminer la constante M .
- (3) On définit une suite de fonctions de E par $P_0 : x \mapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P_{n+1} = \varphi(P_n)$.
- (a) Expliciter les polynômes P_1 et P_2 .
- (b) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} P_n(x)t^n$ converge pour tout réel t tel que $|t| < 2$.

Exercice 10. (QSP ESCP 2019) Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ et $\int_0^{+\infty} |f(u)| du$ converge, et soient a, b deux réels > 0 .

(1) Montrer l'existence et calculer $\lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^{+\infty} [f(a+x) - f(b+x)] dx$.

(2) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+ae^x)(1+be^x)} dx$

Exercice 11. (QSP ESCP 2021) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et soit U l'application définie pour tout $f \in E$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$U(f)(x) = \int_0^x \cos(t) f(x-t) dt.$$

(1) Montrer que U est un endomorphisme de E .

(2) Montrer que $U(f)$ est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

Exercice 12. (HEC 2021)

(1) Question de cours : définition de la convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$ converge.

On note alors : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

(3) Soient x et y deux réels positifs, et notons $z = \max\{x, y\}$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq e^z |x - y|$.
En déduire que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

(4) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) > 1$ et $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

(5) Pour tout $x > 0$, on pose : $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t(f(t)^2)} dt$.

(a) Justifier que g est bien définie sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 13. (QSP HEC 2021) Soit a un réel > 0 .

(1) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} [\arctan(n+a) - \arctan(n)]$.

(2) Ecrire une fonction en Python permettant d'en donner une valeur approchée à 0,001 près quand $a = 1/2$ (on rappelle qu'en Python, la commande `np.arctan(x)` renvoie la valeur de $\arctan(x)$).

Exercice 14. (QSP HEC 2023) On cherche les extrema de la fonction $f : (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2$ sous les contraintes $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ et $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1$.

(1) Ecrire la condition nécessaire du premier ordre pour ce système.

(2) Trouver l'ensemble des points vérifiant cette condition.