

PRÉPARATION AUX ORAUX DE MATHÉMATIQUES : PROBABILITÉS

1. VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Exercice 1. (ESCP 2018) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des U_i , et soient X et Y les variables aléatoires définies par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} U_i(\omega) \quad \text{et} \quad Y = N - X.$$

- (1) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, $P([X = k] \cap [Y = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell P(N = k + \ell)$.
- (2) On suppose que N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
- (3) On suppose que X et Y sont indépendantes et que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) \neq 0$ et que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $P(Y = \ell) \neq 0$.
 - (a) Vérifier que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$(k+1)P(X = k+1)P(Y = \ell)(1-p) = (\ell+1)P(X = k)P(Y = \ell+1)p.$$

- (b) En déduire la loi suivie par X , puis celle suivie par Y .
 - (c) Justifier que N suit une loi de Poisson. Préciser son paramètre.

Exercice 2. (ESCP 2018) Soit n un entier ≥ 2 . Soit $p_n \in]0, 1[$ et soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des points distincts du plan. On construit une figure géométrique aléatoire admettant ces points pour sommets de la façon suivante. Pour i différent de j , on dessine une arête entre les points A_i et A_j avec la probabilité p_n , et on ne dessine pas d'arête reliant A_i et A_j avec la probabilité $1 - p_n$. L'objet de cet exercice est d'évaluer la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé, c'est-à-dire un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet par une arête. Pour ce faire, on définit des variables aléatoires X_i pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A_i \text{ est isolé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- (1) Déterminer la loi de X_1 . En déduire l'espérance de S_n .
- (2) En déduire un majorant de la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $p_n = c \frac{\ln n}{n}$ avec $c > 0$.

- (3) Dans cette question, on suppose que $c > 1$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0) = 1$.
- (4) Dans cette question, on suppose que $c < 1$.
 - (a) Montrer que, pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a :

$$P(Y = 0) \leq \frac{V(Y)}{(E(Y))^2}.$$

- (b) Calculer $E(X_i X_j)$ pour $i \neq j$, puis $E(S_n^2)$.
 - (c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0)$.

Exercice 3. (ESCP 2019) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$ et on suppose que :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \begin{cases} P(X = m) &= \alpha m q^{m-1} \\ P_{[X=m]}(Y = n) &= \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } 1 \leq n \leq m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

où α est un réel strictement positif que l'on déterminera par la suite.

- (1) (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) en fonction de α et q .
 (b) En déduire la loi de la variable aléatoire Y . Trouver la valeur de α et reconnaître cette loi.
- (2) Soient $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer $P_{[Y=n]}(X = m)$.
- (3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose: $B_n = [Y = n]$.
 (a) Justifier l'existence de l'espérance conditionnelle $E(X|B_n)$ et la calculer. En déduire l'existence de l'espérance de X et la déterminer.
 (b) On considère la variable aléatoire $Z = X + XY$. Montrer que l'espérance conditionnelle $E(Z|B_n)$ existe et la calculer. En déduire que Z admet une espérance et déterminer $E(Z)$.

Exercice 4. (QSP ESCP 2019) Soit $p \in]0, 1[$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = 1 - p$. On considère trois variables aléatoires X, Y, Z définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant respectivement les lois $\mathcal{B}(n, p)$, $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n, q)$. On définit la matrice aléatoire M par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ 0 & Z(\omega) \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 5. (ESCP 2021) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = (e - 1)e^{-n} \quad \text{et} \quad P(Y = n) = \frac{1}{(e - 1)n!}.$$

Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. On suppose que les variables aléatoires U_i, X, Y sont indépendantes.

- (1) Reconnaitre la loi de X .
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\{U_1, \dots, U_n\}$. Déterminer la fonction de répartition de M_n .
- (3) Dans cette question, pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $M(\omega) = \max\{U_1(\omega), \dots, U_{Y(\omega)}(\omega)\}$. On admet que M est une variable aléatoire.
 (a) Calculer la fonction de répartition de M .
 (b) Calculer l'espérance de M .
 (c) On pose $Z = X - M$. Calculer $P(Z > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en déduire la loi de Z .

Exercice 6. (ESCP 2022)

- (1) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer un équivalent de $\binom{n}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.
- (2) En déduire que la série $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^k$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$.

$$\text{Par la suite, on pose } f_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

- (3) En utilisant la formule du triangle de Pascal, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$f_{k+1}(x) = x f_k(x) + x f_{k+1}(x).$$

- (4) En déduire l'expression de $f_k(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$ en fonction de k .
- (5) Soit $p \in]0, 1[$ et posons $q = 1 - p$. On effectue une suite de lancers avec une pièce truquée qui donne "pile" avec la probabilité p et "face" avec la probabilité q . Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de ne jamais obtenir k "pile" (indication : pour tout $n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket$, on pourra s'intéresser à l'événement A_n "obtenir le k -ème pile au bout de n lancers exactement")

Exercice 7. (QSP HEC 2021) Un joueur lance simultanément N dés équilibrés. Puis il effectue un deuxième lancer en ne relançant que les dés qui n'ont pas donné 6. Il continue ainsi, en ne relançant à chaque tirage que les dés n'ayant jamais donné 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le nombre de 6 obtenus lors des n premiers lancers.

- (1) Déterminer la loi de S_1 , puis celle de S_2 .
- (2) Quelle est la loi de S_n ? Son espérance?
- (3) Montrer que $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} [S_n = N]\right) = 1$.

Exercice 8. (HEC 2022) Toutes les variables aléatoires intervenant dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que, pour tout entier $k \geq 1$, on a :

$$P(X_k = -1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $U_n = \frac{S_n^4}{n^4}$.

- (1) Énoncer l'inégalité de Markov.
- (2) Calculer $E(S_n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$.
- (4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $P\left(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{3}{n^{3/2}}$.

Par la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$:

$$Z_n = \left\{ \omega \in \Omega \mid \exists k \geq n, U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}.$$

- (5) Montrer que Z_n appartient à $\mathcal{A}$ pour tout $n \geq 1$, puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0$.
- (6) En déduire qu'il existe $Z \in \mathcal{A}$ tel que $P(Z) = 0$ et que, pour tout $\omega \in \Omega \setminus Z$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = 0$
(indication : considérer $Z = \bigcap_{n \geq 1} Z_n$).

2. VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉ

Exercice 9. (ESCP 2017) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U . On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a . La roue porte une marque M qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1, 0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X = \cos(U)$, $Y = \sin(U)$. Enfin, on pose :

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-au} \cos(u) du \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-au} \sin(u) du.$$

- (1) Montrer que les intégrales I et J convergent.
- (2) À l'aide d'intégrations par parties que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J . En déduire les valeurs de I et J .
- (3) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y .
- (4) Dans cette question, on suppose qu'un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation $Y \geq 1/2$.
 - (a) Calculer la probabilité $p(a)$ que le joueur gagne.
 - (b) Écrire une fonction en Python qui, étant donné un réel $a > 0$, permet d'estimer la valeur de $p(a)$.
 - (c) Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0} p(a)$.

Exercice 10. (ESCP 2018) Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}.$$

- (1) (a) Déterminer la fonction de répartition de X .

- (b) Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
- (2) On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$, indépendantes et de même loi que X . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Z_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ et } T_n = Z_n - \ln(n).$$

- (a) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire T .
- (b) Vérifier que T est à densité et donner une densité f_T de T .
- (3) On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V admettant chacune f_T pour densité. À l'aide du changement de variable $y = (1 + e^{-x})e^t$, calculer une densité de $W = U - V$.

Exercice 11. (ESCP 2021) Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Le temps d'attente d'un patient chez un dentiste suit une loi uniforme sur $[0, \theta]$, où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu propre à chaque dentiste. Un nouveau dentiste s'installe dans votre voisinage, et vous voulez estimer son paramètre θ . À cette fin, vous interrogez ses patients sur leur temps d'attente. On modélise les temps d'attente des patients par une suite $(X_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

- (1) (a) Montrer que Y_n est un estimateur sans biais et convergent de θ .
- (b) Étudier la convergence en loi de la suite $(\sqrt{n}(Y_n - \theta))_{n \geq 1}$.
- (c) En déduire un intervalle de confiance de θ au niveau de confiance $1 - \alpha$, avec $\alpha \in]0, 1[$ (On exprimera cet intervalle de confiance à l'aide de Y_n et du réel $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$).
- (2) (a) Calculer la fonction de répartition de Z_n .
- (b) Étudier la convergence en loi de la suite $(-\sqrt{n}(Z_n - \theta))_{n \geq 1}$.

Exercice 12. (ESCP 2021) On considère la fonction f définie pour tout $x > 0$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln(x))}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln^2(x)/2}.$$

- (1) À l'aide du changement de variable $u = \ln(x) - k$ que l'on justifiera, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} x^k f(x) dx = 0.$$

- (2) Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On pose $X = e^Y$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité, dont une densité est donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln^2(x)/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

- (3) Soit a un réel tel que $|a| \leq 1$. On considère la fonction f_a définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} (1 + a \sin(2\pi \ln(x)))g(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Montrer que f_a est une densité de probabilité.

- (4) Soit Y_a une variable aléatoire à densité, de densité f_a . Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$;

$$E(Y_a^k) = E(X^k).$$

- (5) En déduire qu'il existe une infinité de lois distinctes qui ont les mêmes moments à tout ordre.

Exercice 13. (QSP ESCP 2022) Soit (λ_n) une suite réelle monotone strictement positive. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre λ_n . Étudier la convergence en loi de $(X_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 14. (HEC 2022) On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes la loi normale centrée réduite. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

- (1) Question de cours : définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Exemple.
- (2) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 1}$.

- (3) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $G(t) = P(X_1 \geq t)$. Etablir que, pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel b_n tel que $G(b_n) = \frac{1}{n}$.
- (4) (a) Etablir pour tout $x > 0$ l'égalité :

$$G(x) = c \frac{e^{-x^2/2}}{x} - c \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2} dt$$

pour une certaine constante c indépendante de x que l'on précisera.

- (b) En déduire l'équivalent suivant :

$$G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} c \frac{e^{-x^2/2}}{x}.$$

- (c) Proposer un équivalent simple de b_n lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

- (5) Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(b_n(M_n - b_n))_{n \geq 2}$.

Exercice 15. (HEC 2021) Soit un réel > 0 . On considère deux variables aléatoires Y et Z indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes deux une loi exponentielle de paramètre λ .

- (1) Question de cours : Rappeler la définition et les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
- (2) Soit μ un réel > 0 .
- (a) Montrer que $Z = -\mu X$ est une variable à densité, et en donner une densité.
- (b) On pose $S_\mu = Y - \mu X$. Montrer que S_μ admet pour densité la fonction f_μ définie par :

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1+\mu} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\lambda}{1+\mu} e^{\lambda x/\mu} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- (3) On considère le polynôme Q à coefficients aléatoires défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $Q(t) = t^2 + tX - Y$.
- (a) Vérifier que Q admet, avec probabilité 1, deux racines réelles aléatoires distinctes, notées S et T , telles que $S \leq 0 \leq T$.
- (b) Justifier que, pour tout réel $t \geq 0$, on a $[T \leq t] = [Y - tX \leq t^2]$.
- (c) En déduire que la variable aléatoire T admet une densité, et en donner une.

Exercice 16. (QSP HEC 2021) Donner la finalité de la fonction suivante :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def bidule():
    S=0
    for k in range(10000):
        u=rd.random()
        S=S+4/(1+u**2)
    S=S/10000
    return S
```